

黃敏晃教授 ○ 數學素養系列

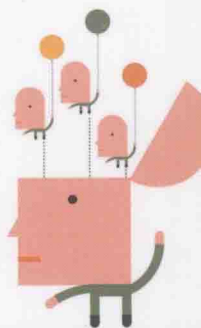
另類數學教室

教室裡的主角是學生，不是老師

強化解題的能力

一方面需要收斂性的分析能力

另一方面又需要發散性的連接能力



科學天地 127

黃敏晃教授

另類數學教室

作者／黃敏晃

顧問群／林和、牟中原、李國偉、周成功

科學館總監／林榮崧

責任編輯／畢馨云

內頁繪圖／陳彩鳳、幸心雅

美術編輯暨封面設計／江儀玲

出版者／天下遠見出版股份有限公司

創辦人／高希均、王力行

遠見·天下文化·事業群 董事長／高希均

事業群發行人／CEO／王力行

出版事業部總編輯／許耀雲

版權部經理／張紫蘭

法律顧問／理律法律事務所陳長文律師 著作權顧問／魏啟翔律師

社址／台北市104松江路93巷1號2樓

讀者服務專線／(02) 2662-0012 傳真／(02) 2662-0007 2662-0009

電子信箱／cwpc@cwgv.com.tw

直接郵撥帳號／1326703-6號 天下遠見出版股份有限公司

電腦排版／極翔企業有限公司

製版廠／東豪印刷事業有限公司

印刷廠／中康彩色印刷事業股份有限公司

裝訂廠／晨捷印製股份有限公司

登記證／局版台業字第2517號

總經銷／大和書報圖書股份有限公司 電話／(02) 8990-2588

出版日期／2013年1月28日第一版

定價／260元

ISBN: 978-986-320-112-0

書號：WS127

BOOKZONE 天下文化書坊

<http://www.bookzone.com.tw>

本書如有缺頁、破損、裝訂錯誤，
請寄回本公司調換。

國家圖書館出版品預行編目(CIP)資料

另類數學教室 / 黃敏晃著. -- 第一版. -- 臺北市 : 天下遠見, 2013.01

面 ; 公分. -- (科學天地 ; 127)

ISBN 978-986-320-112-0(平裝)

1.數學教育 2.中小學教育

523.32

102000106

閱讀天下文化，傳播進步觀念。

- 書店通路——歡迎至各大書店·網路書店選購天下文化叢書。
- 團體訂購——企業機關、學校團體訂購書籍，另享優惠或特製版本服務。

請洽讀者服務專線 02-2662-0012 或 02-2517-3688 *904 由專人為您服務。

- 讀家官網——天下文化書坊

天下文化書坊網站，提供最新出版書籍介紹、作者訪談、講堂活動、書摘簡報及精彩影音剪輯等，最即時、最完整的書籍資訊服務。

www.bookzone.com.tw

- 閱讀社群——天下遠見讀書俱樂部

全國首創最大 VIP 閱讀社群，由主編為您精選推薦書籍，可參加新書導讀及多元演講活動，並提供優先選領書籍特殊版或作者簽名版服務。

RS.bookzone.com.tw

- 專屬書店——「93巷·人文空間」

文人匯聚的新地標，在商業大樓林立中，獨樹一格空間，提供閱讀、餐飲、課程講座、場地出租等服務。

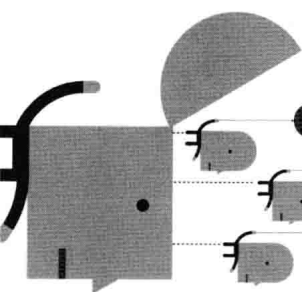
地址：台北市松江路93巷2號1樓 電話：02-2509-5085

CAFE.bookzone.com.tw

黃敏晃教授

另類數學教室

目錄



● 0.	引言 培養孩子的數學能力， 值得我們好好努力	5
1.	制式課程外的另類數學活動	17
2.	漫談數學步道	34
3.	國旗國旗我愛你	50
4.	數學偵探	71
5.	數學燈謎—— 數學與生活語言的另類連接	88
6.	芳齡五問	105
7.	也算是一種大陸經驗	127
8.	數學魔術又一則	141
9.	從一條算則談起	152
10.	切成幾個小正方形	167
11.	閒話費米問題	191
12.	籃球場數學步道	212

另類數學教室

黃敏晃教授

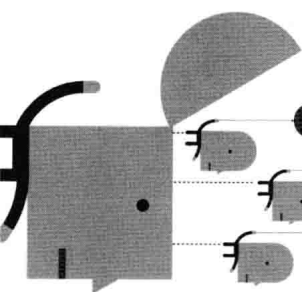
黃敏晃 著



黃敏晃教授

另類數學教室

目錄



● 0.	引言 培養孩子的數學能力， 值得我們好好努力	5
1.	制式課程外的另類數學活動	17
2.	漫談數學步道	34
3.	國旗國旗我愛你	50
4.	數學偵探	71
5.	數學燈謎—— 數學與生活語言的另類連接	88
6.	芳齡五問	105
7.	也算是一種大陸經驗	127
8.	數學魔術又一則	141
9.	從一條算則談起	152
10.	切成幾個小正方形	167
11.	閒話費米問題	191
12.	籃球場數學步道	212

引言

培養孩子的數學能力，值得我們好好努力

這是一本集子，收在裡面的十二篇文章，都是筆者退休後的這幾年陸續寫成的。文章中的許多材料和想法，其實不完全是我自己的，而是和幾位已退休的中、小學數學老師討論出來的。這裡先謝謝他們，他們是

戴寶蓮 許文化 林志忠 張鳳蕙 陳彩鳳 蔡淑英

李和淑 宋立忠 楊守容 呂玉英 李信仲

我們小組的每兩週見面一次，並非每次大家都到。比如說，本書形成的期間，上排的六位老師來得較勤快。討論成熟後，由我寫成文章。所以，文章掛名的著者雖然常只我一人，但他們都是不可或缺的合作者。

我們這些都已退休的人，說不肯每天被孫子女綁住也好，說不甘寂寞想證明自己還有被利用價值也好，總是高高興興的相約見面，討論台灣中小學數學教育改進之管見。

說「管見」，是因為有自知之明，清楚我們沒能力提倡牽扯許多人的重大改革措施，只能談簡單易行的小方案。比如說，設計一些有趣的活動（遊戲、魔術類的），老師若有意願可以立即執行，運用的時間也不會太多。

本書的每篇文章，都在介紹這樣的活動。而且，這些活動都

經過我們親自實驗教學過（在大台北地區的中小學，或是一些數學才藝班之類的教室），證實它們確實是受學生歡迎的，有助於引發他們對學習數學的興趣。

〈制式課程外的另類數學活動〉是本書最早的文章。當時有聽到一些年輕的數學老師抱怨，他們的數學課肯好好聽講的學生不到一半，很洩氣之類的話。所以寫此文給他們打氣，順便分享我們的經驗。

與此同時，筆者應邀到台北市某小學去當「燈謎」（也含自然科的題材）小組成員。此次活動的成功，令我印象深刻，立即動手蒐集更多資料，寫成〈數學燈謎——數學與生活語言的另類連接〉這篇文章。

「數學步道」則是在1991年秋，筆者和朱建正、林福來由加拿大的魁北克市開會回來後，開始推動的。許多學校在設置時，順便做了數學老師的進修培訓，效果不錯。開發中正紀念堂的數學步道時，在他們行政單位的建議下，寫了〈漫談數學步道〉這篇文章，來說明它在數學教育上的功用。

〈籃球場數學步道〉一文，記錄了某校學生在走此步道時的實際狀況。意在讓老師知道，學生會發生的錯誤和迷思，以及可能的因應之道。希望他們由這些事實，回頭反省他們的平常教學，有什麼可以改進之處。

「數學偵探」很受學生歡迎，每次玩這個活動，他們總是從頭high到尾，大家都想當小柯南。在活動中被選出來當謎底的數學物件，都會在學生腦海裡留下細節鮮明的刻印，得到最佳的學習效果。

「數學魔術」是最近學生很瘋狂的活動，本書有兩篇文章討論到。〈芳齡五問〉介紹了「猜年齡」的五種方式：兩種用到某些數的特性，因數分解和乘、除；一種用代數手法；一種用坐標概念；另一種用到「二進位」的定位法。用到的數學內容都有點深度，但〈數學魔術又一則〉只用到簡單的邏輯及「單、雙」的概念，是低年級小朋友也可以學到的魔術。小朋友一再要求重複玩，欲罷不能。

「國旗國旗我愛你」深獲老師認同，因為他們覺得學生會得到額外的學習（世界上其他國家的介紹）。而且此活動的數學教材如長度、面積、形狀和比例等，都是制式課程中很重要的。加上有動手畫國旗的機會，學生也喜歡。

〈從一條算則談起〉一文中，法國農夫比手勢輔助記住部分（六到九）九九乘法事實的材料，令大多數的師生感到驚豔。但很遺憾的，其中許多人對文中所討論的，為什麼這個算則為「恆真」，以及它沒有繼續被沿用而流傳的理由，並沒有什麼興趣。

教室裡的主角是學生，不是老師

其實，我團隊中的老師和我之間，對於出「怎樣的書」一直有很大的歧見。我們都同意讀者群是中、小學數學老師，和高中以上對數學有興趣的學生以及家長或一般大眾，其中以數學老師為主。但是怎樣的書，才會對老師有最大的幫助呢？

我團隊中的老師，都是常被全台灣中、小學校邀請去幫忙該

校週三進修的優秀老師。根據他們的經驗，老師們都很忙，故如果能拿到準備好的學習單，他們會比較肯改變教學方式（照著學習單的流程）。若要他們自己設計學習單，一方面沒時間，另一方面不見得有能力。

他們曾經拿我寫過的文章，給學校老師讀，並要求把文章中的材料，改寫成學習單。結果是吃力不討好，最後常以提供事先準備好的學習單收場。由此可證，我們的書所含的內容及其表達方式，跟目標端的老師（還是有心想進修改變的老師）有一段不小的距離。

我承認這段距離的存在，但對一般老師的成長有不同的看法。我認為一個人的改變，一定起自意識型態。若非如此，則只是表面上的教學法技術層面的改變，他（或她）不會變成更好的老師。譬如說，〈從一條算則談起〉中介紹了各種的乘法，老師們很高興，這符合了目前制式課程中，要求多元解題的原則。但是，課程為什麼這樣要求？他們大多說不出話來，也懶得去理解！

2012年4月，我應邀到杭州大學去參加「千課萬人」的活動。這是個大型的數學教育秀場，大陸各地報名參加的小學數學老師（在大陸是專任，即這些老師只教數學課）就有四千多人。演講結束後的Q&A時段，有人問我為什麼需要多元解題（他們的課綱中也如此要求）？

我反問他怎麼想？他愣了一下後說：「『現』過後發現學生很佩服我。」我說：「你實在很幽默。」這恐怕也是許多台灣老師的想法。他們把上一堂數學課，當作一場秀，自己是個數學藝人。若是這樣，很難上好數學課。

教室中的主角是學生，而非老師。教學的目的，是要讓學生因學到而成長為一個未來社會中的人才，至於老師的形象如何，一點也無關緊要。內人常嫌我出門上課或演講時穿得邋遢（不肯穿她幫我買的名牌衣服），我向她保證在開講5分鐘後沒有人會記得我穿什麼衣服。有次我在演講中間脫了鞋襪，講完才有聽眾發現我光著腳丫子。

問題有兩個，即如何選擇適合的教材，以及如何的教學才會讓學生學到。這兩個都是值得花很多篇幅討論的課題，這裡也不想討論。只想指出，要成為一個好的老師，是要稍微想深一點點。比如說，多元解題的課題會被提出來的原因，可分成下面幾點來說：

1. 教育最後的目的，是使每個學生變成一個健全的公民，這包含會思考。即若他對某議題有興趣，就要能思考後有他自己的意見。所以，數學教育的第一步，是老師在提出問題（當然要讓學生感興趣）後，要求每位學生想出解法。初期，學童提出的想法會南轅北轍，甚至離譜，此時一定要加以鼓勵（不然他以後都不想了），再來討論改進之道。這樣子，兒童想法就會百花齊放，百鳥爭鳴，多元解法紛紛出籠。
2. 兒童的解題想法，和老師或其他人提供的民俗算法，以及解一些特殊題目非常有效的「撇步」，都只是過渡性的。老師一定要花時間，將之慢慢引導到制式的想法——這些都是比較形式而抽象的。這些制式的想法很重要，因為等

到後來在我們腦袋中堆疊、建構數學知識時，這樣的想法之延伸性才夠強。

3. 1991年左右，台灣的小學數學課程修訂的時候，剛好是1988年解嚴、台灣步入民主時代的關鍵時刻，提出多元解題想法為教材一部分，意在強調「任何人的意見都應該被尊重」，是有其時代意義的。

數學科是各級考試都很被重視的科目，老師都認為解題效率較高的制式解題想法是得分的必要，所以對學生學習有嚴重的強制性（對非制式解法，有很多老師不給分），讓一些學生覺得像是傀儡（不能有自己的想法），而討厭數學。現在，這種狀況已有改善。

4. 鼓勵兒童勇於發表「另類的解題想法」，有助於發散性的運思或創作，但也一定要有收斂於制式解法的社會化歷程（不然，很多小孩將來恐怕變成跟社會格格不入的怪物），其起點就是傾聽，並想辦法理解別人的想法，然後透過質疑、澄清、討論、辯難各種解法之優缺點的過程，來形成社會共識。

這種過程雖然很花時間，卻是培養〈從一條算則談起〉一文中談到的「知識之上層結構」最好的方法。教育（把小孩變成對複雜的人類社會有用的人）本來是漫長的路程，許多家長卻常期望教學有立竿見影的效果，而很多老師也跟著這種想法起舞，真是怪事。下面，提供一個案例。

孩子的成長，是需要時間累積且急躁不得的

蔡聰池退休前是台北市建國中學的數學老師，曾因忙碌（也許是接太多家教學生）而病倒。病癒後，參加了筆者和好友朱建正教授（已過世）合開的「數學老師聊天會」，每週二晚上見面三小時（此聊天會維持了五年，產生了多位早期師鐸獎數學組的得主），討論

- (1) 老師對數學或數學教學方面的疑難問題；
- (2) 老師想做的教案設計，執行後的檢討；
- (3) 若沒人提出問題或想做什麼事，則由朱教授和我講些外國的教育見聞和理念。

在這樣的氛圍下，蔡老師啟動了在建中的幾輪教學實驗，每次都由高一帶一班學生到高三（兼導師）。數學課的教學法類似上述，重視自學和討論。這樣的學習進度，開頭當然很慢（學生需要時間適應）。所以，該班高一上的數學考試成績，在同年級35班中排名殿尾，不足為奇。

學生慢慢適應後，高一下成績升到二十幾，高二上又升到二十左右，高二下躋到第十附近，高三就進入前十名以及前五名了。大專聯考的成績更炫，他的班總平均約430分，這相當於拿到台、清、交、成等大學的入學證書。

蔡老師說，這有點像信教。「老師對自己的教育理念要有信心，學生和家長也信任我，給我三年，我當然可以做出成績。頭

一輪較難，但第一輪的亮麗成績單，使第二、三輪的學生和家長都無條件信任，目標就更容易達成。」

當然會有讀者質疑，建中學生本來就很優秀，能如此不見得能證明什麼。老實說並非如此，建中畢業生的聯考成績平均歷年都不到400分。蔡老師在最後一輪，特別去接一班含許多加分後才進到建中的學生，三年後也可以達到相同的效果。可見，這樣的教育理念，是正確的。

鄔瑞香老師（已逝世多年）是台北市東園國小的教務主任（後來是輔導主任），曾擔任過我國科會研究計畫的助理，也是「數學老師聊天會」的成員。她在1989年起帶了一班做教學實驗，由一年級到六年級。

該年的一年級級任老師中，有一位是代課老師，她表明不擅長教數學，鄔主任遂和她換課，教該班的數學課。後來該班的幾任級任老師都和她換課，讓她教了該班六年的數學課（該班也因此實驗教學，沒在二年級升三年級，及四年級升五年級時和別班的學生重新組合分班）。

在該班一年級的尾巴，六月中有外國的數學教育學者來台開會，堅持要看我們小學數學的教學現場。沒有人願意的狀況下，我拜託鄔主任教一堂課¹，才使這個實驗班曝光。

她的教學令人驚豔，學生的表現更是搶眼。課堂中充滿了對學生的挑戰，和師生、生生互動。之後陸續有許多人請求觀摩，全台九所師院（現在都已改成教育大學）數理系學生，更視此觀

1. 實況「骰子遊戲」摘錄於拙作《讓我們來玩數學吧！》，第6-13頁，小天下2005年出版。