卓越工程师教育培养计划配套教材 机械工程系列

优化设计学习与典型题辅导

金全意 编

清华大学出版社

卓越工程师教育培养计划配套教材

机械工程系列

优化设计学习与典型题辅导

金全意 编

清华大学出版社
北京

内容简介

优化设计是机械设计制造及其自动化专业的核心专业课程，本书为该课程的配套辅导用书。全书共分7章，主要介绍了机械优化设计的数学模型、优化设计的数学基础、一维搜索方法、无约束优化方法、线性规划方法、约束优化方法等方面内容的重难点，提供了典型例题及常用的优化算法程序。

全书按教材的章节编排，除第7章外，每章编写了学习导引、重难点回顾、典型例题、习题与习题参考答案等，针对学习中常见的问题和需要进行辅导。本书内容切合学生实际，针对性强，注重帮助学生掌握优化设计的基本知识、基本理论和基本技能。本书可作为机械和其他工科专业学生学习优化设计的辅导用书，也可作为相关教师的教辅参考书。

图书在版编目（CIP）数据

优化设计学习与典型题辅导/金全意编. --北京：清华大学出版社，2013
（卓越工程师教育培养计划配套教材·机械工程系列）
ISBN 978-7-302-31068-6

Ⅰ. ①优… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①机械设计－最优设计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①TH122

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第303509号

责任编辑：庄红权　洪　英
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　　张**：8.25　**字　　数**：196千字
版　　次：2013年7月第1版　**印　　次**：2013年7月第1次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：22.00元

产品编号：050597-01

卓越工程师教育培养计划配套教材

总编委会名单

FOREWORD

前言

优化设计是20世纪60年代初发展起来的一门新学科，它将最优化原理和计算机技术结合并应用于设计领域，为工程设计提供了一种重要的科学设计方法。利用这种新的设计方法，人们可以从众多的设计方案中寻找出最佳的设计方案，从而大大提高设计效率和质量。因此优化设计是现代设计理论和方法的一个重要领域，它已广泛应用于各个工业设计领域。

在这种形势下，为适应专业的不断调整与课程体系的更新，针对机械类本科专业的优化设计教学要求和本科生的学习特点，特编写了本书。本书的编写既注重应用性，又考虑到理论基础，同时，还考虑其最新技术，解题过程力求通俗易懂。

本书共分7章：第1章为机械优化设计概述，第2章为优化设计的数学基础，第3章为一维搜索方法，第4章为无约束优化方法，第5章为线性规划方法，第6章为约束优化方法，第7章为常用优化设计程序。除第7章外，每一章按学习导引→重难点回顾→典型例题→习题→习题参考答案的顺序来编排。

本书内容较全面，体系较完整，既可作为普通高等院校机电类专业本专科学生的课后辅导教材，也可以作为机电工程类人员的参考书。

本书由金全意编写，在编写过程中参阅了大量相关文献，得到了许多同事的大力支持和帮助，另有唐宇欣、李博雅、周宏宇等同学也参与了部分工作，在此一并表示感谢。

由于时间仓促，书中难免存在错误和不妥之处，恳请广大读者和专家批评指正。

编　者

2012年8月于上海

CONTENTS

目录

第1章

机械优化设计概述

1.1 学习导引

本章主要内容包括机械优化设计概述、机械优化设计的数学模型、优化问题的分类和优化方法简介、优化的几何解释、数值迭代法及终止判定准则等。其中对优化设计数学模型的三要素的定义及性质的掌握是重点，它是机械优化设计的一个基础。

1.2 重难点回顾

1.2.1 机械优化设计的数学模型

用一组设计变量描述优化设计对象的设计内容，即描述优化意图（目标、指标）和有关限制条件的数学表达式，称为优化设计的数学模型。

$$\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{X}), \quad X \in \mathbf{R}^n \\ \text{s. t.}\quad &g_j(\boldsymbol{X}) \leqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,l \\ &h_k(\boldsymbol{X}) = 0, \quad k = 1,2,\cdots,m \end{aligned}$$

数学模型三要素为：设计变量、目标函数、约束条件。

(1) 设计变量

在优化设计过程中，要优化选择的设计参数为设计变量。设计变量必须是独立变量，即在一个优化设计问题中，任意两个设计变量之间没有函数关系。按照产品设计变量的取值特点，设计变量可分为连续变量（例如轴径、轮廓尺寸等）和离散变量（例如各种标准规格等）。

设计变量的个数为优化问题的维数。

设计变量为列向量：

$$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$$

一般来说，在满足设计要求的前提下，应尽量减少设计变量的个数，使设计的难度降低。

(2) 目标函数

目标函数是用来使设计得以优化的函数，或可以评价设计方案好坏的函数。实际上它是反映优化意向的关于设计变量的数学表达式。

$$\min f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

(3) 约束条件

约束条件是优化设计中设计变量必须满足的条件，这些条件是设计变量的函数。根据约束的性质可分为：

① 边界约束，直接限定设计变量的取值范围的约束条件，即

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

② 性能约束，即由方案的某种性能或设计要求推导出来的约束条件。

在设计空间中，由所有约束条件所限定的区域叫做设计可行域。

1.2.2 优化的几何解释

等值线(等高线)是由许多具有相同目标函数值的设计点所构成的平面曲线，如图 1-1 所示。

目标函数的等值线的数学表达式为

$$f(\boldsymbol{X}) = C \tag{1-1}$$

无约束优化问题就是在没有限制的条件下，对设计变量求目标函数的极小点。在设计空间内，目标函数是以等值面的形式反映出来的，则无约束优化问题的极小点即为等值面(超曲面)的中心。

约束优化问题是在可行域内对设计变量求目标函数的极小点，此极小点在可行域内或在可行域边界上，一般为目标函数等值面(超曲面)与可行域边界(超曲面)的一个切点。

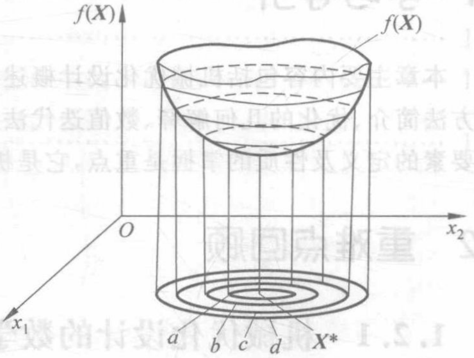

图 1-1　函数的等值线

1.2.3 数值迭代法及终止判定准则

数值迭代法的基本公式为

$$\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{X}^k + \alpha^k \boldsymbol{S}^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1-2}$$

式中，α^k、$\boldsymbol{S}^k$ 分别为第 k 次迭代的步长和搜索方向。

迭代法要解决的问题有：

(1) 选择搜索方向，一般不同算法搜索方向产生的机理不同。

(2) 确定步长因子，在无约束优化设计中一般采用最优步长，而约束优化设计中采用适当步长。

(3) 给定终止判定准则

点距准则：

$$\| \boldsymbol{X}^{k+1} - \boldsymbol{X}^k \| \leqslant \varepsilon$$

函数下降量准则：

$$\| f(\boldsymbol{X}^{k+1}) - f(\boldsymbol{X}^k) \| \leqslant \varepsilon$$

梯度准则：

$$\| \nabla f(\boldsymbol{X}^k) \| \leqslant \varepsilon$$

采用哪种收敛准则，可视具体问题而定。可以取 $\varepsilon=10^{-2}\sim10^{-5}$。

上述准则都在一定程度上反映了逼近最优点的程度，但都有一定的局限性。在实际应用中，可取其中一种或多种同时满足来进行判定。

1.3 典型例题

【例 1-1】 某厂因生产需要，购进五种配件，其个数分别为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5。每种配件的单价分别为 60 元、80 元、85 元、100 元、120 元。要求 x_1 不少于 20 个，x_3 不少于 40 个，其余每种配件不少于 30 个，x_1、x_2 之和不少于 80 个，x_3、x_4 之和不少于 200 个，x_1、x_3、x_4、x_5 之和不少于 400 个。试建立数学模型，问每种配件为多少个，配件总的进价才最低。

解：本例题中影响总进价的因素是每种配件的个数。要求参数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 在一定的条件下，使所有配件的总进价最低。

设所有配件的总进价为 P，有

$$P=60x_1+80x_2+85x_3+100x_4+120x_5$$

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]^{\mathrm{T}}$$

则数学模型为：

目标函数

$$\min f(\boldsymbol{X})=60x_1+80x_2+85x_3+100x_4+120x_5$$

且满足约束条件

$$\begin{aligned}
g_1(\boldsymbol{X})&=x_1+x_2\geqslant 80\\
g_2(\boldsymbol{X})&=x_3+x_4\geqslant 200\\
g_3(\boldsymbol{X})&=x_1+x_3+x_4+x_5\geqslant 400\\
g_4(\boldsymbol{X})&=x_1\geqslant 20\\
g_5(\boldsymbol{X})&=x_2\geqslant 30\\
g_6(\boldsymbol{X})&=x_3\geqslant 40\\
g_7(\boldsymbol{X})&=x_4\geqslant 30\\
g_8(\boldsymbol{X})&=x_5\geqslant 30
\end{aligned}$$

【例 1-2】 试建立数学模型，设计一闭式直齿圆锥齿轮转动。已知：小锥齿轮悬臂支承，大锥齿轮两端支承，轴交角 $\Sigma=90°$，小锥齿轮传递扭矩 $T_1=40\mathrm{N\cdot m}$，转速 $n=960\mathrm{r/min}$，齿数比 $u=3$，精度等级为 7 级，电动机驱动，工作机载电荷稳定，两班制工作，使用期限为 8 年。小锥齿轮选用 40Cr，调质处理，硬度为 241～286HB，大锥齿轮选用 42SiMn，调质处理，硬度为 217～255HB。要求所设计的圆锥齿轮转动体积最小。

解：本例题是要求确定独立设计参数，小齿轮齿数 z、大端模数 m、齿宽系数 Ψ_R 的值。这组值不仅要满足齿轮的强度要求，而且还要使锥齿轮转动体积小（重量轻）。

直齿圆锥齿轮转动的体积可取为小锥齿轮的体积 V_1 和大锥齿轮的体积 V_2 之和，而每个直齿圆锥齿轮的体积又可近似为其大端分度圆与小端分度圆之间的截头圆锥的体积。因此根据截头圆锥的体积计算公式可知，直齿圆锥齿轮转动的体积计算式可写成

$$V=V_1+V_2$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\pi}{3}b\cos\delta_1\left[\left(\frac{mz_1}{2}\right)^2+\frac{mz_1}{2}\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_1}{2}\right)+\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_1}{2}\right)^2\right]\\
&\quad+\frac{\pi}{3}b\cos\delta_2\left[\left(\frac{mz_2}{2}\right)^2+\frac{mz_2}{2}\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_2}{2}\right)+\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_2}{2}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

式中，b 为齿宽；δ_1、δ_2 分别为小、大锥齿轮的分锥角；m 为模数；z_1 为小锥齿轮的齿数；R 为锥距；z_2 为大锥齿轮的齿数。

使圆锥齿轮转动体积最小时还应满足如下条件。

(1) 接触强度条件

齿面接触应力必须小于等于许用接触应力

$$\sigma_H=Z_EZ_HZ_\varepsilon\sqrt{\frac{4.7KT_1}{\Psi_R(1-0.5\Psi_R)^2m^3z_1^3u}}\leqslant[\sigma_H]$$

式中，Z_E 为弹性系数，大、小锥齿轮均为钢制的，故 $Z_E=189.8$；Z_H 为节点区域系数，直齿轮 $Z_H=2.5$；Z_ε 为重合度系数；K 为载荷系数；$[\sigma_H]$为许用接触应力。

(2) 齿根弯曲强度条件

两齿轮齿根的弯曲应力必须分别小于等于它们各自的许用弯曲应力

$$\sigma_{F1}=\frac{4.7KT_1Y_{Fa1}Y_{Sa1}Y_\varepsilon}{\Psi_R(1-0.5\Psi_R)^2m^3z_1^3\sqrt{u^2+1}}\leqslant[\sigma_{F1}]$$

$$\sigma_{F2}=\sigma_{F1}\frac{Y_{Fa2}Y_{Sa2}}{Y_{Fa1}Y_{Sa1}}\leqslant[\sigma_{F2}]$$

式中，σ_{F1}、σ_{F2} 分别为小、大齿轮的齿根弯曲应力；$[\sigma_{F1}]$、$[\sigma_{F2}]$分别为小、大齿轮的许用弯曲应力；Y_{Fa1}、Y_{Sa1} 分别为小齿轮的齿形系数和应力修正系数；Y_{Fa2}、Y_{Sa2} 分别为大齿轮的齿形系数和应力修正系数；Y_ε 为重合度系数。

(3) 最大圆周速度条件

7 级精度的直齿圆锥齿轮，其平均直径处的圆周速度 V_m 应满足

$$V_m<8\text{m/s}$$

(4) 模数限制条件

传递动力的齿轮，其最小模数不得小于 1.5，因此得

$$m_{\max}\geqslant m\geqslant 1.5$$

式中，$m_{\max}$ 为 m 的最大值。

(5) 齿宽系数限制条件

一般的圆锥齿轮齿宽系数范围是

$$\Psi_R=0.25\sim0.3$$

即

$$\Psi_R\geqslant0.25$$

$$\Psi_R\leqslant0.3$$

(6) 小锥齿轮不根切条件

$$z_{1\max}\geqslant z_1\geqslant 17\cos\delta_1$$

设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1\\m\\\Psi_R\end{bmatrix}$$

则直齿圆锥齿轮传动的优化数学模型为：

使目标函数

$$f(\boldsymbol{X})=V=\frac{\pi}{3}b\cos\delta_1\left[\left(\frac{mz_1}{2}\right)^2+\frac{mz_1}{2}\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_1}{2}\right)+\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_1}{2}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\pi}{3}b\cos\delta_2\left[\left(\frac{mz_2}{2}\right)^2+\frac{mz_2}{2}\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_2}{2}\right)+\left(\frac{R-b}{R}\cdot\frac{mz_2}{2}\right)^2\right]$$
$$\rightarrow\min$$

且满足约束条件。

$$g_1(\boldsymbol{X})=Z_EZ_HZ_\varepsilon\sqrt{\frac{4.7KT_1}{\Psi_R(1-0.5\Psi_R)^2m^3z_1^3u}}-[\sigma_H]\leqslant0$$
$$g_2(\boldsymbol{X})=\frac{4.7KT_1Y_{Fa1}Y_{Sa1}Y_\varepsilon}{\Psi_R(1-0.5\Psi_R)^2m^3z_1^3\sqrt{u^2+1}}-[\sigma_{F1}]\leqslant0$$
$$g_3(\boldsymbol{X})=\frac{4.7KT_1Y_{Fa2}Y_{Sa2}Y_\varepsilon}{\Psi_R(1-0.5\Psi_R)^2m^3z_1^3\sqrt{u^2+1}}-[\sigma_{F2}]\leqslant0$$
$$g_4(\boldsymbol{X})=V_m-8<0$$
$$g_5(\boldsymbol{X})=1.5-m\leqslant0$$
$$g_6(\boldsymbol{X})=m-m_{\max}\leqslant0$$
$$g_7(\boldsymbol{X})=0.25-\Psi_R\leqslant0$$
$$g_8(\boldsymbol{X})=\Psi_R-0.3\leqslant0$$
$$g_9(\boldsymbol{X})=17\cos\delta_1-z_1\leqslant0$$
$$g_{10}(\boldsymbol{X})=z_1-z_{1\max}\leqslant0$$

【例 1-3】 试建立数学模型，设计一重量最轻的空心转动轴。空心转动轴的轴截面形状如图 1-2 所示，图中 D、d 分别为轴的外径和内径，轴的长度不得小于 3m，轴的材料为 45 钢，密度 $\rho=7.8\times10^{-6}\text{kg/mm}^3$，弹性模量 $E=2\times10^5\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=60\text{MPa}$，轴所受扭矩 $M=1.5\times10^6\text{N}\cdot\text{mm}$。

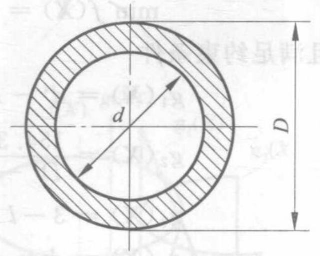

图 1-2 空心转动轴的截面形状

解：空心转动轴的质量 W 的计算式为

$$W=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)l\rho$$

将 ρ 的值代入上式并整理得

$$W=6.12\times10^{-6}\times(D^2-d^2)l$$

所涉及的空心转动轴应满足以下条件：

(1) 扭转强度

(2) 空心转动轴的切应力不得超过许用值，即

$$\tau\leqslant[\tau]$$

空心转动轴的扭转切应力

$$\tau = \frac{16MD}{\pi(D^2 - d^2)}$$

将已知数据代入上式并整理得

$$d^2 - D^2 + 1.27 \times 10^5 D \leqslant 0$$

(3) 扭转稳定性

扭转切应力不得超过扭转稳定的临界切应力 τ'，即

$$\tau \leqslant \tau'$$

空心转动轴的扭转稳定的临界切应力为

$$\tau' = 0.7E\left(\frac{D-d}{2D}\right)^{3/2}$$

将已知数据代入上式并整理得

$$\frac{154.34D}{D^4 - d^4} - \left(\frac{D-d}{D}\right)^{3/2} \leqslant 0$$

(4) 结构尺寸

(5) 空心转动轴的长度不得小于给定值，即

$$l \geqslant l_{\min}$$

式中，$l_{\min}$ 为题目给定的最小长度，为 3m，故

$$3 - l \leqslant 0$$
$$d \geqslant 0$$
$$D - d > 0$$

设

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ d \\ l \end{bmatrix}$$

则数学模型为：

极小化目标函数

$$\min f(\boldsymbol{X}) = 6.12(D-d)l \times 10^{-6} = 6.12(x_1^2 - x_2^2)x_3 \times 10^{-6}$$

且满足约束条件

$$g_1(\boldsymbol{X}) = d^4 - D^4 + 1.27D \times 10^5 = x_2^4 - x_1^4 + 1.27 \times 10^5 \leqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{X}) = \frac{154.34D}{D^4 - d^4} - \left(\frac{D-d}{D}\right)^{3/2} = \frac{154.34x_1}{x_1^4 - x_2^4} - \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1}\right)^{3/2} \leqslant 0$$

$$g_3(\boldsymbol{X}) = 3 - l = 3 - x_3 \leqslant 0$$

$$g_4(\boldsymbol{X}) = d = x_2 \geqslant 0$$

$$g_5(\boldsymbol{X}) = D - d = x_1 - x_2 > 0$$

【例 1-4】 已知某约束优化问题的数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2$$

$$D: g_1(\boldsymbol{X}) = x_1 \geqslant 0, \quad g_2(\boldsymbol{X}) = x_2 \geqslant 0, \quad g_3(\boldsymbol{X}) = 6 - x_1 \geqslant 0$$

$$g_4(\boldsymbol{X}) = 4 - x_2 \geqslant 0, \quad g_5(\boldsymbol{X}) = x_2 + 1 \geqslant 0, \quad g_6(\boldsymbol{X}) = x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0$$

(1) 按比例画出各约束曲线及 $f(\boldsymbol{X})$ 的等值线、可行域，并指出消极约束。

(2) 图中指出无约束最优点和约束最优点。

(3) 若增加 $h(\boldsymbol{X})=x_2-3=0$ 这一等式约束,求最优点。

解:(1) 各约束曲线及 $f(\boldsymbol{X})$ 的等值线如图 1-3 所示。消极约束为 $g_5(\boldsymbol{X})$。

(2) 无约束最优点和约束最优点均为 $\boldsymbol{X}^*=[3,0]^{\mathrm{T}}$(见图 1-3)。

(3) 若增加 $h(\boldsymbol{X})=x_2-3=0$ 这一等式约束时,$x_2=3$,结合目标函数 $f(\boldsymbol{X})=(x_1-3)^2+x_2^2$,可知,当 $x_1=3$ 时取得最小值 9,代入约束条件可知$[3,3]^{\mathrm{T}}$ 在可行域内,故此时的最优点为$[3,3]^{\mathrm{T}}$。

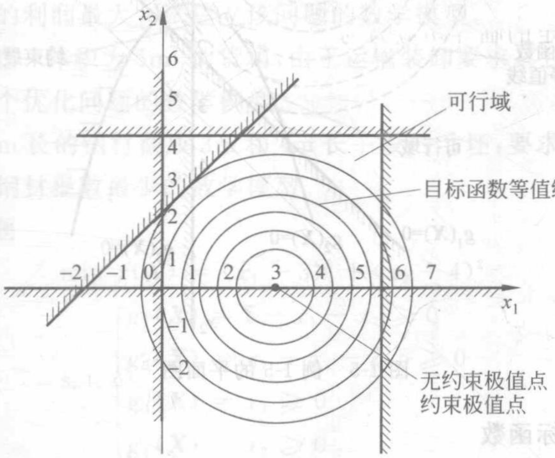

图 1-3 例 1-4 问题的平面图

【例 1-5】 已知目标函数

$$f(\boldsymbol{X})=(x_1-2)^2+x_2^2$$

满足以下约束条件

$$g_1(\boldsymbol{X})=x_1-x_2+2\geqslant 0$$
$$g_2(\boldsymbol{X})=-x_1^2+x_2-1\geqslant 0$$
$$g_3(\boldsymbol{X})=x_1\geqslant 0$$
$$g_4(\boldsymbol{X})=x_2\geqslant 0$$

试画出该数学模型的可行域和目标函数等值线,并在图中指出无约束极值点及约束极值点的位置。

解:在三维空间里,目标函数 $f(\boldsymbol{X})=(x_1-2)^2+x_2^2$ 的几何图形是一个旋转抛物面,如图 1-4 所示。

设

$f(\boldsymbol{X})=(x_1-2)^2+x_2^2=C_i$, $i=1,2,3,\cdots$

且 C_i 为常数,令 $C_1=1/4$,$C_2=1$,$C_3=2$,$C_4=4\cdots$,即可得一系列平面曲线(圆),它们在 x_1x_2 平面的投影为一系列的同心圆,圆心$[2,0]$即为无约束极值点。约束极值点为约束边界与某一条目标函数等值线的切点,如图 1-5 所示。

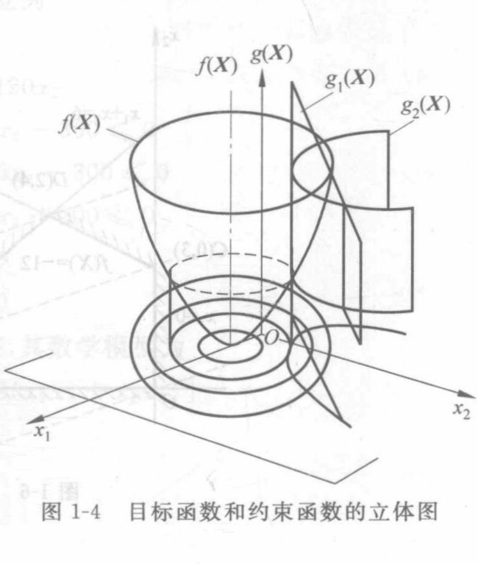

图 1-4 目标函数和约束函数的立体图

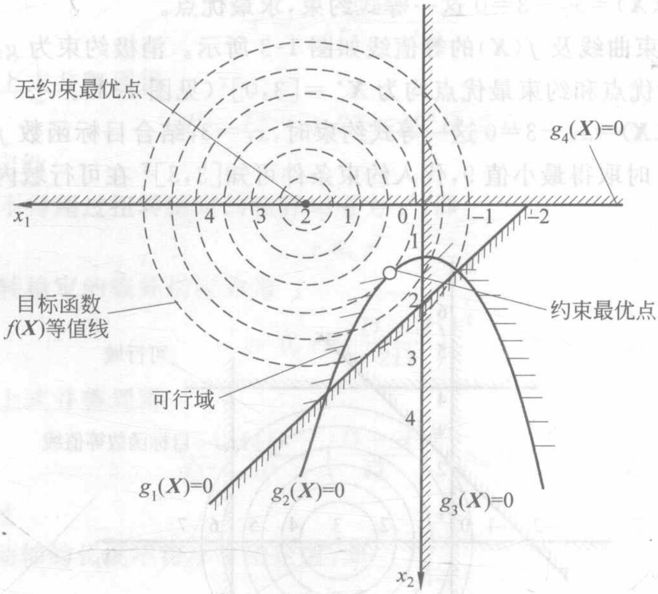

图 1-5　例 1-5 的平面图

【例 1-6】　已知目标函数

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -x_1 - 4x_2$$

且满足不等式约束条件

$$g_1(\boldsymbol{X}) = x_1 + x_2 - 6 \leqslant 0$$
$$g_2(\boldsymbol{X}) = -x_1 + 2x_2 - 6 \leqslant 0$$
$$g_3(\boldsymbol{X}) = -x_1 \leqslant 0$$
$$g_4(\boldsymbol{X}) = -x_2 \leqslant 0$$

用图解法求其最优点 $\boldsymbol{X}^*$ 和最优值 $f(\boldsymbol{X}^*)$。

解：作出目标函数等值线，并给定目标函数一系列数值。

作出最优点 $\boldsymbol{X}^* = [2,4]^{\mathrm{T}}$，作出最优值 $f(\boldsymbol{X}^*) = -18$，如图 1-6 所示。

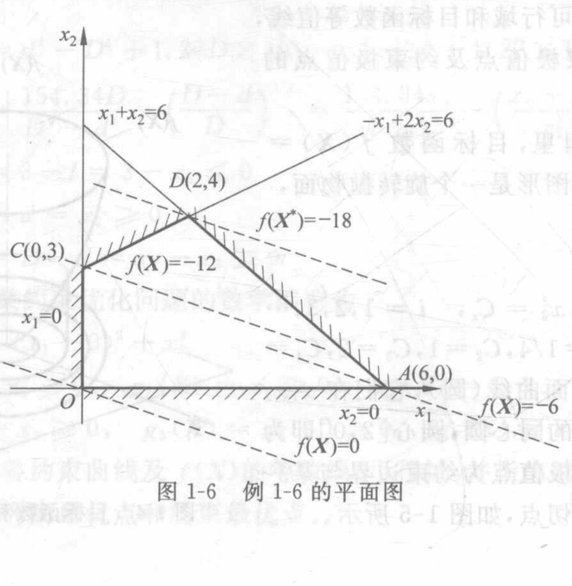

图 1-6　例 1-6 的平面图

1.4 习题

1. 某车间生产甲、乙两种产品。生产甲种产品每件需使用 9kg 材料、3 个工时、4kW·h 电能，可获利润 60 元，生产乙种产品每件需使用 4kg 材料，10 个工时、5kW·h 电能，可获利润 120 元，若使每天能供应 360kg 材料、300 个工时、200kW·h 电能，确定两种产品每天的产量，使每天可能获得的利润最大。试建立该问题的数学模型。

2. 要用薄钢板制造一体积为 5m^3 的货箱，由于运输装卸要求其长度不小于 4m，要求钢板用料最省，试写出这个优化问题的数学模型。

3. 将一批每根 10m 长的钢材截成 3m 和 4m 长一段的毛坯，要求这两种尺寸的毛坯不少于 100 段，试建立用钢材根数最少的数学模型。

4. 将如下优化问题

$$\min f(\boldsymbol{X}) = (x_1-3)^2+(x_2-4)^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_1(\boldsymbol{X}) = 5-x_1-x_2 \geqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = x_1-x_2-2.5 \geqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{X}) = x_1 \geqslant 0 \\ g_4(\boldsymbol{X}) = x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(1) 试按一定的比例画出等目标函数值分别等于 1、4、9、16 时的四条等值线，并在图中画出可行域。

(2) 从图中确定无约束最优解 $\boldsymbol{X}_1$ 和约束最优解 $\boldsymbol{X}_2$。

(3) 该问题属于线性规划问题还是非线性规划问题？

(4) 若在该问题中再加上等式约束 $h(\boldsymbol{X})=x_1-x_2=0$ 后，试确定该问题有无最优解。

1.5 习题参考答案

1. 解：该生产计划问题的优化数学模型可建立为

$$\boldsymbol{X} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\min f(\boldsymbol{X}) = -60x_1-120x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} g_1(\boldsymbol{X}) = 9x_1+4x_2-360 \leqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = 3x_1+10x_2-300 \leqslant 0 \\ g_3(\boldsymbol{X}) = 4x_1+5x_2-200 \leqslant 0 \\ g_4(\boldsymbol{X}) = -x_1 \leqslant 0 \\ g_5(\boldsymbol{X}) = -x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

2. 解：设 x_1、x_2 和 x_3 分别为箱体的长、宽、高，其数学模型为

$$\min f(\boldsymbol{X}) = \min[x_1x_2+2(x_2x_3+x_1x_3)]$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 4.0-x_1 \leqslant 0 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$