

丛书主编：陈兰荪

张春蕊 郑宝东 著

12

生物数学
丛书

生命科学中的动力学模型



科学出版社

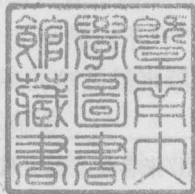
Q1-0
20/3/11

阅 览

生物数学丛书 12

生命科学中的动力学模型

张春蕊 郑宝东 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

生物动力系统是生命科学与动力系统结合交叉的学科。本书主要介绍生命科学理论研究中的动力学模型方法。重点介绍近年来分支理论在生物数学模型中的应用。主要内容包括:生命能量系统模型、离散血红细胞生存模型、基因表达模型、昼夜节律模型、对称生物模型、集合种群模型及神经网络模型的研究方法及由此得到的模型的动力学特性。在研究各类生命科学问题的数学模型的同时,本书还介绍了诸如扩展的 Jury 判据、耦合时滞系统的等变分支、全局 Hopf 分支等相关理论。本书旨在引导读者在短时间内尽快进入本领域的前沿,将为生命动力系统的研究提供有价值的参考。

本书可供从事微分方程、动力系统及生物数学研究的科研工作者及研究生和高级本科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

生命科学中的动力学模型/张春蕊,郑宝东著. —北京:科学出版社,2013
(生物数学丛书;12)

ISBN 978-7-03-038565-9

I. ①生… II. ①张… ②郑… III. ①生命科学-动力学模型

IV. ①Q1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 214654 号

责任编辑:陈玉琢/责任校对:朱光兰
责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 9 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2013 年 9 月第一次印刷 印张:12 3/4

字数:234 000

定价:68.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《生物数学丛书》序

传统的概念：数学、物理、化学、生物学，人们都认定是独立的学科，然而在 20 世纪后半叶开始，这些学科间的相互渗透、许多边缘性学科的产生，各学科之间的分界已渐渐变得模糊了，学科的交叉更有利于各学科的发展，正是在这个时候数学与计算机科学逐渐地形成生物现象建模，模式识别，特别是在分析人类基因组项目等这类拥有大量数据的研究中，数学与计算机科学成为必不可少的工具。到今天，生命科学领域中的每一项重要进展，几乎都离不开严密的数学方法和计算机的利用，数学对生命科学的渗透使生物系统的刻画越来越精细，生物系统的数学建模正在演变成生物实验中必不可少的组成部分。

生物数学是生命科学与数学之间的边缘学科，早在 1974 年就被联合国科教文组织的学科分类目录中作为与“生物化学”、“生物物理”等并列的一级学科。“生物数学”是应用数学理论与计算机技术研究生命科学中数量性质、空间结构形式，分析复杂的生物系统的内在特性，揭示在大量生物实验数据中所隐含的生物信息。在众多的生命科学领域，从“系统生态学”、“种群生物学”、“分子生物学”到“人类基因组与蛋白质组即系统生物学”的研究中，生物数学正在发挥巨大的作用，2004 年 *Science* 杂志在线出了一期特辑，刊登了题为“科学下一个浪潮——生物数学”的特辑，其中英国皇家学会院士 Lan Stewart 教授预测，21 世纪最令人兴奋、最有进展的科学领域之一必将是“生物数学”。

回顾“生物数学”我们知道已有近百年的历史：从 1798 年 Malthus 人口增长模型，1908 年遗传学的 Hardy-Weinberg “平衡原理”；1925 年 Volterra 捕食模型，1927 年 Kermack-Mckendrick 传染病模型到今天令人瞩目的“生物信息论”，“生物数学”经历了百年迅速地发展，特别是 20 世纪后半叶，从那时期连续出版的杂志和书籍就足以反映出这个兴旺景象；1973 年左右，国际上许多著名的生物数学杂志相继创刊，其中包括 *Math Biosci*, *J. Math Biol* 和 *Bull Math Biol*；1974 年左右，由 Springer-Verlag 出版社开始出版两套生物数学丛书：*Lecture Notes in Biomathematics* (二十多年共出书 100 册) 和 *Biomathematics* (共出书 20 册)；新加坡世界科学出版社正在出版“*Book Series in Mathematical Biology and Medicine*”丛书。

“丛书”的出版，既反映了当时“生物数学”发展的兴旺，又促进了“生物数学”的发展，加强了同行间的交流，加强了数学家与生物学家的交流，加强了生物数学学科内部不同分支间的交流，方便了对年轻工作者的培养。

从 20 世纪 80 年代初开始，国内对“生物数学”发生兴趣的人越来越多，他（她）

们有来自数学、生物学、医学、农学等多方面的科研工作者和高校教师，并且从这时开始，关于“生物数学”的硕士生、博士生不断培养出来，从事这方面研究、学习的人数之多已居世界之首。为了加强交流，为了提高我国生物数学的研究水平，我们十分需要有计划、有目的地出版一套“生物数学丛书”，其内容应该包括专著、教材、科普以及译丛，例如：① 生物数学、生物统计教材；② 数学在生物学中的应用方法；③ 生物建模；④ 生物数学的研究生教材；⑤ 生态学中数学模型的研究与使用等。

中国数学会生物数学学会与科学出版社经过很长时间的商讨，促成了“生物数学丛书”的问世，同时也希望得到各界的支持，出好这套丛书，为发展“生物数学”研究，为培养人才作出贡献。

陈兰荪

2008年2月

前 言

生命现象数量化是利用数学工具研究生物学的前提. 人们在研究生命科学问题时, 期望建立描述这些生命现象的数学模型, 并根据大量的实验和统计资料作出某些假设, 选取有关变量, 确定有关参数, 给出生命科学问题的数学方程.

动力系统理论用于研究生命科学问题已经被人们广泛采用. 随着人们对生命现象研究的深入, 人们借助于非线性动力学理论的新成果, 将定性分析和数值模拟方法相结合, 可以对生命科学问题的动力学性质进行全面研究, 去揭示生命现象的变化规律, 从而可以达到对生命科学问题的解释、预测, 进而达到控制的目的. 分支是动力系统理论的重要组成部分, 研究的对象是结构不稳定的系统. 所谓分支现象是指依赖于参数的系统, 当参数变动并经过某些临界值时, 系统的某些属性, 如平衡状态、周期现象、稳定性等发生的突然变化. 分支现象广泛存在于生命科学问题中.

本书在动力系统分支理论的框架下, 介绍生命科学中的相关模型的局部及全局稳定、周期等动力学性质, 本书的第 2 章介绍时滞、连续、离散、耦合对称、中立型等诸方面的动力系统分支理论. 本书其他章节所述内容涉及生态、种群、生命能量、基因表达及人工神经网络等相关生命科学问题的数学模型的性质.

本书的大部分研究内容取材于两位作者及其课题组成员发表在国内外相关学术期刊上的论文.

本书中所列的许多研究结果得益于国家自然科学基金 (项目编号: 10771045, 10871056) 的资助, 在此表示感谢.

本书适合于从事应用数学、生物数学及相关领域的研究人员参考.

限于编者水平有限, 书中难免有不妥和疏漏之处, 恳请同行和读者批评指正.

作 者

2013 年春于哈尔滨

目 录

《生物数学丛书》序

前言

第 1 章 基本理论简介	1
1.1 构建模型的原则	1
1.2 时滞微分方程相关概念	3
1.3 含参数动力系统分支的基本概念	6
1.3.1 连续时间系统单参数分支	6
1.3.2 离散时间系统单参数分支	8
1.4 时滞微分方程 Hopf 分支理论	9
1.5 中心流形定理	13
1.6 离散动力系统的 Hopf 分支理论	14
1.7 离散动力系统 Hopf 分支存在的必要条件 —— 扩展 Jury 判据	16
1.8 时滞微分方程对称性局部 Hopf 分支定理	18
第 2 章 时滞连续与离散系统 Hopf 分支的分析方法	21
2.1 三元时滞连续神经网络模型	21
2.2 三元离散神经网络模型的稳定性与分支	24
2.2.1 具有全连接的时滞神经网络模型的分析	25
2.3 三元中立型神经网络模型	34
第 3 章 时滞生命能量系统模型	51
3.1 二维时滞生命能量系统模型的稳定性分析	52
3.2 二维离散生命能量系统	62
3.3 三维时滞食物链型生命能量系统的动力学性质	66
3.4 三维离散生命能量系统模型的稳定性分析	70
3.4.1 三阶离散系统稳定的充要条件	70
3.4.2 并行传输方式	73
3.4.3 串行传输方式	74
第 4 章 离散血红细胞生存模型的稳定性与分支性	78
4.1 离散血红细胞模型的建立	78
4.2 离散血红细胞模型的动力学性质	81
第 5 章 n 维时滞神经网络稳定性与数值分析	86
5.1 Pitchfork 分支的存在性	87

5.2 Hopf 分支的存在性	90
5.3 模型的多重稳定性	94
5.4 时滞 Hopfield 神经网络 Hopf 分支的数值逼近	95
5.5 神经网络模型 Hopf 分支周期解的方向与稳定性	100
5.6 Hopf 分支数值逼近的分支方向与稳定性	108
5.7 具有延迟的简单 BAM 神经网络模型周期解的全局存在性	116
5.7.1 局部稳定性结果	117
5.7.2 周期解的全局存在性	120
第 6 章 基因表达模型稳定性分析	130
6.1 mRNA 与 miRNA 的基因表达模型	130
6.2 P53-Mdm2 基因反馈模型	138
第 7 章 昼夜节律模型	141
7.1 昼夜节律模型简介	141
7.2 时滞昼夜节律模型周期性的存在性	144
第 8 章 对称生物模型	147
8.1 耦合生物振子研究的群论方法简介	147
8.2 时滞对称 BAM 神经网络模型的多重 Hopf 分支	149
8.2.1 具有时滞的 D_3 等变 BAM 神经网络系统	150
8.2.2 多重分支周期解的存在性	151
8.2.3 计算机模拟	155
8.3 具有时滞的简单神经振荡器耦合系统	156
8.3.1 块循环矩阵的相关结论	157
8.3.2 线性稳定分析	158
8.3.3 多重 Hopf 分支	161
8.4 具 Z_2 对称性的两食饵、单捕食者模型	166
8.4.1 Z_2 对称二次多项式系统	167
8.4.2 Ford 分支分析	169
8.4.3 Hopf 分支分析	173
8.5 环状耦合的 Volterra 模型	176
8.5.1 多重周期解的分支性	177
第 9 章 集合种群模型	180
9.1 N 斑块集合种群模型	180
9.1.1 没有外来入侵者的模型	180
9.1.2 具有入侵者的斑块模型	181
9.2 具有相同斑块环境的两斑块模型	181
参考文献	186
索引	190

第1章 基本理论简介

1.1 构建模型的原则

生命现象数量化的方法,就是以数量关系描述生命现象.生物内在的或外表的,个体的或群体的,器官的或细胞的,直到分子水平的各种表现性状,依据性状本身的生物学意义,都可以用适当的量化形式予以描述.数量化是利用数学工具研究生物学的前提.

人们在研究种群生态学、种群遗传学、神经生物学、流行病学、免疫学、生理学以及环境污染等问题时,建立了描述这些生命现象的数学模型,根据大量的实验和统计资料作出某些假设,选取有关变量,确定有关参数,建立数学方程,通过数学理论和方法来研究这些方程,去揭示生命现象的变化规律,从而可以达到对生命科学问题的解释、预测,进而达到控制的目的.自然界的实际生命问题与理论之间总是存在着一定的差异,而数学模型在生命科学问题中起到了对问题初步解释和提供理论预测相关信息的作用.数学模型是能够表现和描述真实世界某些现象、特征和状况的数学系统.数学模型能定量地描述生命物质运动的过程,一个复杂的生物学问题借助数学模型能转变成一个数学问题,通过对数学模型的逻辑推理、求解和运算,获得客观事物的有关结论,因此,生命现象可以用模型化的方式来描述,以期达到对其更好的理解的目的.例如,描述生物种群增长的 Logistic 方程,就能够比较正确的表示种群增长的规律;通过对描述捕食与被捕食两个种群相克关系的 Lotka-Volterra 方程的研究,从理论上可以说明,农药的滥用,在毒杀害虫的同时也杀死了害虫的天敌,从而常常导致害虫更猖獗地发生.数学的介入把生命科学的研究从定性的、描述性的水平提高到定量的、精确的、探索规律的高水平.数学模型在农业、林业、医学、环境科学、社会科学和人口控制等方面的应用,已经成为人类从事生命科学问题研究的重要手段.

数学模型具有以下优点:①具有形式化、数量化的优点.数学模型大都是能促进问题处理的数学表达式,它揭示问题的主要矛盾和各因素间的定量关系,较少地遗漏隐含的条件;有大量的数学定理和方法可供计算、推理和变形,特别是便于利用计算机进行仿真与论证.②具有对实际问题描述、解释与判断的优点.③具有预见性的优点.人们在解决实际问题时,通常按照如下步骤建立数学模型:

(1) 数学化 —— 对实际问题作数量分析,给出自变量,因变量和参数,按照事

物的规律写出数学表达式;

- (2) 建模 —— 运用数学理论和方法, 探求数学模型;
- (3) 反馈 —— 返回到实践中检验、修正模型.

动力系统理论用于研究生命科学问题已经被人们广泛采用. 随着人们对生命现象研究的深入, 诞生了生命系统动力学这一门新兴学科, 生命现象的数学模型是该学科研究的基础. 借助于非线性动力学理论的新成果, 将定性分析和数值模拟方法相结合, 可以对模型的动力学性质进行全面研究.

在生命系统和生理过程中, 有节律的振动比比皆是. 例如, 在睡眠、运动、呼吸、循环、咀嚼和消化过程中随处可见有节奏的振动现象. 目前, 人们非常希望了解生命系统是如何产生这些振动又是如何控制这些振动的. 许多学者基于神经机制或者肌肉机制提出了诸多刻画这类现象的动力学模型; 并借助于理论分析和科学实验研究了若干复杂程度不同、网络结构各异的生命系统的振荡行为. 本书中我们着重介绍生命科学中的动力学模型及研究方法.

下面以森林生态学中红松林数量模型为例, 介绍数学模型的构建及发展过程.

森林生态系统是一种既有环境又有生物混合的复杂整体. 考虑环境中的 t 时刻红松林的种子、鼠类和幼苗这三个变量的数量: $x(t), y(t), z(t)$. 假定:

(1) 不考虑其他干扰因素时红松种子增长率按理想的自养发育过程不断增加, 受鼠类的影响而不断减少;

(2) 鼠增长率随种子数量的增加而增加, 而随本身数量的增加而减少;

(3) 幼苗增长率随鼠的作用而增加, 但随自身的增加而减少.

基于以上假设下, 李俊清于 1988 年给出了如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 - b_1 y + a_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x - b_2 y, \\ \frac{dz}{dt} = b_3 y - c z. \end{cases}$$

宋国华、李秀琴等先后于 1994 年和 2003 年在该模型的基础上, 再次对红松林生态系统的动力学行为进行分析. 他们采用了更合理的方法对模型进行必要的改进:

(1) 松籽 x 是按级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 方式增长的自然种群, 并舍去了 x^3 之后的项;

(2) 幼苗的增长也相应地因松籽的改变方式而相应改变为非线性的.

这样, 就有了一个全新的三维非线性数学模型:

$$\begin{cases} x' = 1 + a_1x + x^2 - b_1y, \\ y' = a_2x - y, \\ z' = x + a_3x^2 + b_2y - z. \end{cases}$$

这里 $x(t), y(t), z(t)$ 仍分别代表松籽、鼠类 (主要指松鼠, 也考虑花鼠、林姬鼠等) 和幼苗的数量, 且所有的 $a_i, b_j (i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$ 均为正常数.

考虑到鼠类的孕育期, 本课题组在 2005 年对以上模型进行了改进, 修正后的模型如下:

$$\begin{cases} x' = 1 + a_1x + x^2 - b_1y, \\ y' = a_2x(t - \tau) - y, \\ z' = x + a_3x^2 + b_2y - z. \end{cases}$$

其中 τ 即鼠类的平均孕育周期, $a_2x(t - \tau)$ 表示在 t 时刻鼠类的增长率与 $t - \tau$ 时刻松籽的数量有关, 其他系数的意义不变.

从以上分析可以看到, 描述生命科学问题的数学模型的发展也是具有时代性的, 随着数学学科的发展, 人们建立模型的手段及分析模型性态的数学工具不断完善, 因此, 对生命科学问题的刻画也越来越符合实际.

1.2 时滞微分方程相关概念

在研究自然与社会现象时, 一般地, 不可避免地要有时间滞后现象, 亦即事物的发展趋势不仅依赖于当前的状态, 而且也依赖于过去的历史. 生命现象的复杂性反映了生命系统是一个多层次、非线性、高度有序、开放的具有耗散特征、远离平衡态的复杂系统. 对生物系统复杂的生化过程的研究有必要考虑时间延迟的影响.

进入 20 世纪后, 许多科学领域中提出了越来越多的时滞微分方程问题, 例如, 自动控制理论、物理学、生物学、医学、商业、经济学、化工、机械、电子工程问题以及数学自身的几个分支: 数理统计、数论、博弈论、信息论等. 但是到 20 世纪 40 年代为止, 着重讨论的还只是线性常系数微分方程, 并且主要是设法具体求解这些方程. 所用的方法无非是 Laplace 变换, 类似于差分方程的分类法, 以及各种展开和近似计算方法. 同时, 对稳定性的讨论, 也只限于判断特征拟多项式根的分布问题. 此后的十年间, 研究工作也只限于初步建立基本理论和系统地推广常微分方程的种种结果, 特别是 Ляпунов 第二方法. 因此由于研究方法和理论的局限性, 整个应用范围还是相当狭小, 不足以满足解决应用领域出现的大部分问题的要求.

直到 20 世纪 70 年代, 从 Wight 研究具有时滞的生态模型的稳定性开始, 关于时滞微分方程 (delay differential equations, DDE) 理论的研究才相继全面展开, 并逐渐完善. 一些问题中, 时滞的影响是不可忽视的, 不论人们是否喜欢, 时滞是自然

界中客观的、无所不在的现象,无视时滞就等于无视现实.例如,我们日常生活中遇到的视觉和听觉的时滞现象、动物血液再生原理等,均属于时延的范畴.森林再生也是一个典型的例子.在某些系统中,引入时延,系统的特性会发生质的变化,表现出更丰富的动力学行为;在控制系统中,反馈信号中加入时延,构成时延反馈控制系统,可以获得稳定的系统,或可以把系统相轨道引向目标系统所确定的相轨道,以达到控制的目的.

下面简要介绍时滞微分方程的相关概念,读者亦可参阅文献 [1]~[4].

假设 $r \geq 0$ 是已知实数, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^n$ 是实 n 维线性向量空间,并且有范数 $\|\cdot\|$. 考虑从区间 $[a, b]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的一切连续映射所构成的空间 $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, 并在其中定义模为 $\|\varphi\|_{[a, b]} = \sup_{a \leq \theta \leq b} |\varphi(\theta)|$, $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, 那么 $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach(巴拿赫)空间. 特别地,记 $C := C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, 当 $\varphi \in C$ 时,其模 $\|\varphi\|_{[-r, 0]}$ 简记为 $\|\varphi\|$.

若 $\sigma \in \mathbb{R}$ (σ 表示初始时刻), $A \geq 0$ 且 $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, 则对任意 $t \in [\sigma, \sigma + A)$, 定义 $x_t \in C$ 为 $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

若 $D \subseteq \mathbb{R} \times C$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是给定的泛函,“ $\cdot$ ”表示右导数,则关系式

$$\dot{x} = f(t, x_t) \quad (1.2.1)$$

是集合 D 上的滞后型泛函微分方程,或称为时滞微分方程.

下面三种方程都是时滞微分方程.

(1) 常微分方程

$$x'(t) = F(x(t)).$$

(2) 微分差分方程

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_p(t))), \quad 0 \leq \tau_j(t) \leq r, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

(3) 积分微分方程

$$x'(t) = \int_{-r}^0 g(t, \theta, x(t + \theta)) d\theta.$$

例 时滞 Logistic 模型

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) \left[1 - \frac{x(t - \tau)}{k} \right],$$

τ 是与 t 无关的正常数. 在生态学上解释为:

(1) $x(t)$ 为 t 时刻种群数量, τ 为母体的怀孕期. 该模型的意义是 t 时刻种群的平均增长率不是与 t 时刻种群规模有关,而是依赖于 $t - \tau$ 时刻种群规模. 因为 t 时刻种群增加的个体与在 $t - \tau$ 时刻就已经存在于母体中了.

(2) $x(t)$ 为 t 时刻种群成虫数量, τ 为幼虫成熟期. 假定幼虫在成长中无死亡, 则 t 时刻成虫数量取决于 $t - \tau$ 时刻出生的幼虫.

显然, 与常微分方程相比, 时滞微分方程的初值函数并不是简单的初值, 因而, 时滞微分方程在诸如解的稳定性等方面与常微分方程是有许多不同之处的. 例如, 自治的一阶时滞微分方程可以有周期或混沌解, 而这些现象只能发生在高阶的常微分方程中.

定义 1.2.1 若存在 $\sigma \in \mathbb{R}, A > 0$ 和 $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ 使得: 当 $t \in [\sigma, \sigma + A]$ 时, $(t, x_t) \in D$ 且满足方程 (1.2.1), 则称函数 $x(t)$ 是方程 (1.2.1) 在 $[\sigma - r, \sigma + A]$ 上的一个解.

定义 1.2.2 对于给定的 $\sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in C$, 若存在 $A > 0$, 使得 $x(t)$ 是方程 (1.2.1) 在 $[\sigma - r, \sigma + A]$ 上的一个解且满足 $x_0 = \phi$, 则称 $x(t)$ 是方程 (1.2.1) 在 σ 处具有初值 ϕ 的一个解, 或简称为方程 (1.2.1) 过点 (σ, ϕ) 的一个解, 且记之为 $x(\sigma, \phi, f)(t)$.

因此, 方程 (1.2.1) 的初值问题可以写成

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x_t), \\ x_\sigma = \phi. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

引理 1.2.1 若 $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$, 则 x_t 是关于 t 在 $[\sigma, \sigma + \alpha]$ 上的连续函数.

证明 因 $x(t)$ 在 $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ 上连续, 从而在其上一致连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $\delta > 0$, 使当任意 $t, \tau \in [\sigma - r, \sigma + \alpha]$, 只要 $|t - \tau| < \delta$ 就有

$$|x(t) - x(\tau)| < \varepsilon,$$

于是, 对任意 $t, \tau \in [\sigma, \sigma + \alpha]$, 只要 $|t - \tau| < \delta$, 就有 $|x(t + \theta) - x(\tau + \theta)| < \varepsilon$ 对一切 $\theta \in [-r, 0]$ 成立. 所以,

$$\|x_t - x_\tau\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |x(t + \theta) - x(\tau + \theta)| < \varepsilon,$$

故 x_t 关于 t 在 $[\sigma, \sigma + \alpha]$ 上连续, 引理得证.

应用引理 1.2.1 可得到下面定理.

定理 1.2.2 若给定 $\sigma \in \mathbb{R}, \varphi \in C$, $f(t, \varphi)$ 在 D 上连续, 那么初值问题 (1.2.2) 等价于求解泛函积分方程

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds, & t \geq \sigma, \\ x_\sigma = \phi. \end{cases}$$

1.3 含参数动力系统分支的基本概念

人们在研究微分方程时, 不仅关心某个解的定性问题, 而且关心在小扰动下微分方程解的拓扑性质是否发生变化, 即微分方程的结构稳定性问题. 当结构稳定性遭到破坏时, 会出现分支现象和混沌现象, 这是微分方程分支理论研究的主要问题. 分支是动力系统理论的重要组成部分, 研究的对象是结构不稳定的系统. 动力系统的分支行为往往是由系统的奇异性引起的. 其形态也是多种多样的, 迄今为止, 已有多部著作论述分支理论^[2,6,8-10].

所谓分支现象是指依赖于参数的系统, 当参数变动并经过某些临界值时, 系统的某些属性, 如平衡状态、周期现象、稳定性等发生的突然变化. 分支现象广泛存在于自然界中, 对它的研究有重要的理论意义和实际意义, 因而备受人们的关注. 本章介绍连续与离散系统单参数分支的相关结论, 详细论证可参见文献 [2]~[6].

设向量场 $f: U \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ 给出的连续动力系统为

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mu \in J \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (1.3.1)$$

其中 U, J 是开集, x 是状态变量, μ 是分支参数.

设离散动力系统 $\{g^k\}_{k \in \mathbb{Z}}, g: U \times J \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto g(x, \mu)$ 为

$$x \mapsto g(x, \mu), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \mu \in J \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (1.3.2)$$

当参数 μ 连续地变动且通过 $\mu_0 \in J$ 时, 如果系统 (1.3.1) 或系统 (1.3.2) 失去结构稳定性, 即系统的定性性态 (即拓扑结构) 发生突然变化, 则称该系统在 μ_0 处出现分支, μ_0 称为分支值. 全体分支值组成的集合称为该系统在参数空间中的分支集.

一般地说, 完整的分支分析需要了解动力系统的全局拓扑结构. 这是十分复杂, 甚至是难以做到的. 实际应用中, 有时只需考虑在某个平衡点 (不动点) 附近动力系统拓扑结构的变化, 即只研究在它们的邻域内局部向量场 (或微分同胚) 的分支. 这类分支问题称为局部分支. 如果分支分析涉及向量场的大范围拓扑结构, 则称为全局分支.

下面考虑依赖于一个参数的分支问题.

1.3.1 连续时间系统单参数分支

设有连续-时间系统

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^1,$$

其中 f 关于 x 和 μ 都光滑. 设 $x = x_0$ 是这个系统当 $\mu = \mu_0$ 时的一个双曲平衡点. 一般只有两个方法使双曲性条件遭到破坏. 其一是一个单特征值趋于零, 这时有 $\lambda_1 = 0$, 其二是一对单复特征值到达虚轴, 这时有 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$.

折分支

定义 1.3.1 与特征值 $\lambda_1 = 0$ 相对应的分支称为折分支.

折分支有许多其他名字, 包括切分支、极限点分支、鞍-结分支以及转向点分支等.

注 对一切 $n \geq 1$, 折分支都是有可能发生的.

假设光滑函数 f 的系统 $x' = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, 在 $\mu = 0$ 有平衡点 $x = 0$ 满足 $f_x(0, 0) = 0$. 将 $f(x, \mu)$ 在 $x = 0$ 关于 x 进行 Taylor 展开:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

且满足两个条件: $f_0(0) = f(0, 0) = 0$ (平衡点条件) 和 $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$ (折分支条件), 则有如下规范型性质.

定理 1.3.1 (折分支的拓扑规范形) 任何一个在 $\alpha = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 且满足 $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ 在原点附近的一般单参数纯量系统 $x' = f(x, \alpha)$, 局部拓扑等价于下面的规范形之一:

$$\eta' = \beta \pm \eta^2.$$

Hopf 分支

定义 1.3.2 与特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega_0 > 0$ 相对应的分支称为 Hopf (或 Antronov-Hopf) 分支.

考虑系统

$$x' = f(x, \mu), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^1,$$

其中函数 f 光滑, 在 $\alpha = 0$, 有平衡点 $x = 0$, 在此平衡点有特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\omega_0 > 0$. 设 $\lambda = 0$ 不是 Jacobi 矩阵的特征值, 由隐函数定理, 对充分小的 $|\mu|$, 在原点的某邻域内, 此系统有唯一平衡点 $x_0(\mu)$. 可将此平衡点移动到原点. 不失一般地, 对充分小 $|\mu|$, 设 $x = 0$ 是系统的平衡点, 因此该系统可写为

$$x' = A(\mu)x + F(x, \mu),$$

其中 F 是光滑向量函数, 它的分量 F_1, F_2 关于 x 的 Taylor 展开至少从二次项开始, 即 $F = O(\|x\|^2)$, 以 μ 的光滑函数为其元素的 Jacobi 矩阵 $A(\mu)$ 可写为

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a(\mu) & b(\mu) \\ c(\mu) & d(\mu) \end{pmatrix}.$$

定理 1.3.2 (Hopf 分支拓扑规范形) 任何一个单参数一般二维系统 $x' = f(x, \mu)$ 在 $\mu = 0$ 有平衡点 $x = 0$, 具特征值 $\lambda_{1,2}(0) = \pm i\omega$, $\omega_0 > 0$, 它在原点附近局部拓扑等价于下列规范形之一:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

注 $n \geq 2$ 时, 常微分方程的 Hopf 分支可能发生.

1.3.2 离散时间系统单参数分支

考虑依赖于参数的离散时间动力系统

$$x \rightarrow f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^1,$$

这里映射 f 关于 x 和 μ 都光滑. 设 $x = x_0$ 是这个系统在 $\mu = \mu_0$ 时的双曲不动点. 显然, 在一般情况下, 只有三种方法才能破坏双曲性条件: 对某个参数值, 要么单个正特征值趋于单位圆, 有 $\lambda_1 = 1$, 要么单个负特征值趋于单位圆, 这时有 $\lambda_2 = -1$, 还有就是一对共轭复特征值在单位圆上, 这时有 $\lambda_{3,4} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$.

折分支

定义 1.3.3 对应于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的分支称为离散系统的折分支.

离散系统的折分支也称为极限点分支、鞍-结点分支, 以及转向点分支.

考虑下面的依赖于一个参数的一维动力系统

$$x \rightarrow \alpha + x + x^2 \equiv f_\mu(x, \mu) \equiv f_\mu(x),$$

映射 f_μ 对充分小 $|\mu|$ 在原点邻域内可逆. 该系统在 $\mu = 0$ 有具特征值 $\lambda = f_x(0, 0) = 1$ 的非双曲不动点 $x_0 = 0$.

定理 1.3.3(折分支的拓扑规范形) 任何一个一般的单参数纯量系统

$$x \rightarrow f(x, \mu),$$

假设它在 $\mu = 0$ 有不动点 $x_0 = 0$ 满足 $\lambda = f_x(0, 0) = 1$, 则它在原点附近局部拓扑等价于下面的规范形之一

$$\eta \rightarrow \beta + \eta \pm \eta^2.$$

翻转分支

定义 1.3.4 对应于特征值 $\lambda_2 = -1$ 的分支称为翻转 (或倍周期) 分支.

考虑依赖于一个参数的一维动力系统

$$x \rightarrow -(1 + \mu)x + x^3 \equiv f(x, \mu) \equiv f_\mu(x).$$

映射 f_μ 对于 $|\mu|$ 在原点邻域内可逆. 该系统对所有 μ 有不动点 $x_0 = 0$, 乘子 $\lambda = -(1 + \mu)$.

定理 1.3.4(翻转分支的拓扑规范形) 任何一个一般的单参数纯量系统

$$x \rightarrow f(x, \mu),$$

假设它在 $\mu = 0$ 有不动点 $x_0 = 0$, $\lambda = f_x(0, 0) = -1$, 则该系统在原点附近拓扑等价于下面规范形:

$$\eta \rightarrow -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3.$$

离散 Hopf 分支

定义 1.3.5 对应于 $\lambda_{3,4} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ 的分支称为离散 Hopf(或 Neimark-Sacker) 分支.

考虑系统

$$x \rightarrow f(x, \mu), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^1,$$

函数 f 光滑, 在 $\mu = 0$ 有不动点且具单特征值 $\lambda_{3,4} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$.

定理 1.3.5 假设二维离散-时间系统

$$x \rightarrow f(x, \mu), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}^1,$$

f 光滑, 对所有充分小 $|\mu|$, 它有平衡点 $x = 0$ 具有乘子 $\lambda_{3,4}(\alpha) = r(\mu)e^{\pm i\varphi(\mu)}$, 其中 $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$. 设下面的条件满足

$$(C.1) \quad r'(0) \neq 0;$$

$$(C.2) \quad e^{ik\theta_0} \neq 1, \text{ 对 } k = 1, 2, 3, 4,$$

则存在光滑可逆的坐标与参数变换将上述系统变成

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\sin \theta(\beta) \\ \sin \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\sin \theta(\beta) \\ \sin \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & d(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4).$$

1.4 时滞微分方程 Hopf 分支理论

一个系统产生 Hopf 分支是指当系统的参数经过某些特定值时系统的奇点的稳定性发生变化, 并在奇点附近产生周期解的现象. 时滞微分方程的 Hopf 分支现象和常微分方程的 Hopf 分支现象有很大差异. 早在 20 世纪 50 年代初期就有数学家注意到时滞微分方程的分支现象. 例如, Wright 就研究了单种群增长模型——时滞 Logistic 方程的解的稳定性与时滞 τ 变化的情况. 从 20 世纪 70 年代开始, 泛函微分方程的分支理论得到了数学家们的普遍关注, 这方面的研究尤其活跃.

对于时滞的时滞微分方程, 其 Hopf 分支的一种解法是建立在抽象的常微分方程的中心流形理论之上. 因为自治的时滞微分方程可以写成抽象的常微分方程, 如果该方程在常值解处的线性化方程的特征方程在特定参数 $\lambda = \lambda_0$ 处有一对单纯虚根, 其他特征根与其非共振, 并且简单纯虚根满足横解条件, 那么, 存在二维中心