百科小叢書

從代數到微積

鄭太朴編譯

王雲五主編

商務印書館發行

百科小叢書

從代數到微積

鄭太朴編譯

王雲五主編

商務印書館發行

中華民國十七年四月初版
中華民國二十二年三月國難後第一版
中華民國二十四年七月國難後第三版

百科小叢書 從代數到微積一冊 (52254·1)

每冊定價大洋叁角伍分
外埠酌加運費匯費

編譯者 鄭太朴
主編者 王雲五
發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

四二二三九上 周

(本書校對者胡達聽)

識　語

這本"從代數到微積",原係德人休士德 (August Schuster) 所著,爲通信的體裁. 後面那樣的分章及節,并每節開首先標以題目,是譯纂者所改成:蓋德文與中文語氣多有不同,原書通信體裁若照譯成中文,未必能使讀者感興味,而系統之不明白,則卻易感覺到;故不如改爲章節之較爲醒目. 又因爲求其適合中國社會上一般讀者故,於取材,敍述法及措詞等方面,極加斟酌,各處均有刪節及增改,通俗書不比名著及高深的科學書,不得擅自纂改;故苟求淸楚易懂,卽無妨斟酌增删. 因之,此書不曰"譯"而曰"譯纂"者,用意在是,并非敢大膽妄爲,自作聰明.

如書題所標,這是一本盡人可解的數學書;祇要有高等小學卒業的數學程度,便可由此直窺高等數學之門徑. 緣此,這書雖不足以語大雅,然亦有他的價値在!

譯纂者誌於德國苟庭根城西之冷蘭村

目　次

從代數到微積

1. 本書之內容 “算學”二字,乃是一總名,其中所包殊爲宏富. 尋常將算學列爲二部分, 卽所謂“高等算學”與“初等算學”是. 但在某種意義上說來,“高等”與“初等”之間殊難定其界限, 故此種分別頗有可以疑問處. 不過爲便利計, 則亦不妨照尋常的習慣如是別之而已. 本書中所欲述者, 大多限於初等的方面; 但在後面, 則亦稍微提及些高等範圍以內者.

爲省事計, 假定讀者已習過些算術, 故於此方面不再提及.

2. 方程 在算術裏面, 我們所用以計算的數目, 都用數目字表出之, 如 3, 25, 156 等等. 但光用數目字爲計算之具, 有時每覺得有不便, 且極有限制, 算學之爲用不能廣了, 於是我們兼用字以代數目 (以下我們均用羅馬字 $a, b, c \cdots x, y, z$ 等等爲代), 如前面說過的幾個, 我們可隨便用 a 以代 3, 用 b 以代 25, 用 c 以代 156 等等. 本來用字母代數目, 是可以完全隨便的, 不過向來沿用慣將字母

開首的數個如 a, b, c 等代已知的數目．而其末後的數個如 x, y, z 等則代未知的，我們所欲求的數目；今仍之．代數學所從事者，是在用字母代替數目，然後將已知數與未知數的關係開出；列成所謂"方程"，以求其"解"，即從已知數與未知數的關係上，推得未知數．簡單說來，代數學是"方程"學．

用一個"等號"(=)，將相等之數目連起來，此即是所謂方程；例如三加四等於七，我們把他寫出來作 $3+4=7$，此式即謂之"方程"．又如 $x+y=a$, $x-3y=a-b$ 等等都是方程(按"方程"二字是中國向來所用慣的，故仍採用，其實在西文均作"等，"本無待解釋而自明者)．現在我們即舉一二個例於下，以明方程是什麼一回事，怎麼樣得到，有何用處．

例一．今有兄弟二人於此，兄年三十五歲，弟年二十五；問當幾年前，兄的年齡適等於弟的二倍？又問當幾年前兄的年齡等於弟的三倍？

這題目之第一問，比較的還容易算，我們只要如此一想，便不難得解了：即，兄的年齡較弟的既長十歲，其差數為十，如是當弟十歲時，又加上十年的差，則此時兄的年

齡適等於弟的二倍了;所以我們很容易回答說:在十五年前,兄的年齡,適等於弟的二倍.

但是第二問幾年前等於弟的三倍,可就不若是之易答,至少非細細思量一下不可.現在請看我們若何求助於代數學上最簡單之方程.這裏,弟的年齡 25 與兄的 35 均是已知數,而我們所欲求的幾年前之年數則爲未知數.我們現在用字母 x 代此未知數,將他與已知數的關係列爲方程,然後由此推得此未知數 x 應該是什麼數目,而看他能否解答我們的問題.但我們如何寫出其關係,而得一方程呢?請看下面便知道了.

弟的年齡現在既是 25,則當 x 年以前,其年齡自然要小於現在 x 年,寫出來,此時的年齡是 $25-x$;而兄的年齡此時則爲 $35-x$(用話說,弟的年齡此時爲 25 減 x;兄的則 25 減 x).這裏,$25-x$ 與 $35-x$ 都是一個數目,因之我們亦可用括號把他括上,寫作 $(25-x)$ 與 $(35-x)$.我們所欲求者是幾年前兄的年齡適等於弟之三倍,換句話說,在這 x 年以前,兄之年齡是等於弟之三倍.但適才我們已得到二個數目,兄之年齡當 x 年以前是 $(35-x)$,弟之年齡則爲 $(25-x)$,如是我們自然得此方程:

$$35-x=3\times(25-x),$$

於此，等號之左爲兄 x 年以前之年齡，等號之右則爲弟，此時之年齡用 3 乘，即表明三倍．方程既得，現在只有若何解此方程以求得 x 當爲何數目的問題了．但這裏卻先有一些計算上的理，不能不先弄明白，即方程右面之 $3\times(25-x)$（用三乘括號內之數），應如何算法呢？照所寫的樣式看去，自然不難明白，其意義是 25 減去 x 後之餘數，用 3 去乘．不過這裏 x 乃是一個未知數，我們尚未知其值是多少，怎樣能從 25 減去，而以 3 乘其餘呢？

要明白這用 3 乘括號內數的道理，我們可暫時假定，x 是個已知數，譬如是 10．於此，計算的方法自然是先將 10 從 25 減去，得餘數 15，然後再用 3 去乘，得 45；用算式寫出來是：$3\times(25-10)=45$．但是事實上我們還有一個其他的辦法，所得的結果與此完全相同：即我們不必先減後乘，先自 25 上減去 10 然後以 3 乘其餘數；我們亦可先乘後減，即我們可先用 3 遍乘括號內之兩數，然後將此二個得數相減以得其餘數，其結果與先減而後乘其餘數者無異．如前例我們先自 25 上減去 10，然後以 3 乘，所得結果爲 45；我們若先用 3 乘 25，得 75，又用 3 乘 10，得 30，

然後以75與30相減,結果亦是45,與前者無異. 這樣,我們便知用一數去乘括號內之數時,其法可用此數遍乘括號內之諸數,然後仍照其號將此諸得數相加或相減之;此法對於括號內有未知數時,亦能無困難使用了.

我們既明白此種道理,則前面所得的方程之右面 $3\times(25-x)$, 卽不難計算了,我們於是可把他寫作 $3\times25-(3\times x)$. 但這裏尙有一些須一說,卽一個乘號 $\times$ 在數目字與數目字之間,如 3×25, 是不可少的,要沒有他,則3乘25(3×25) 變成 325, 爲三百二十五了.若在數目字與字母之間,如 $3\times x$, 或在字母與字母之間,如 $a\times x$ 或 $a\times b$, 則便可不必要,直寫作 $3x$, 或 ax, ab 卽可了,蓋這裏不會有錯誤發生,并且3乘 x, 其意義原卽是3倍 x, 故中間的乘號成爲多事無用,省去爲便. 如是,這右面的可寫作 $3\times25-3x$, 而我們前面所得的方程作下式了:

$$35-x=3\times25-3x.$$

現在我們試求解此方程,以得 x 之値. 我們第一步自然先須將未知數與已知數各分在一面,如是將未知數一齊歸在左面,已知數一齊歸在右面,方可得解. 這又什麼辦呢? 在此我們可設想我們的方程猶如一天秤,兩面等重

的；若單獨於一面加了些東西，其他一面不照此亦加，則其均重卽失，一面較重，一面較輕，不能相等了；但若兩面加了同重的物，則均重仍保持着，全不受影響. 與此同樣的道理，我們的方程兩面是等的，只要我們於等號之兩面同樣的加上或減去某數，則其相等自然不致受影響：二個相等的數，各加上或減去某數，仍是相等，這是自明之理. 根據這道理，我們可先於方程之兩面各加上 $3x$，則此方程卽成爲

$$35-x+3x=3\times25-3x+3x.$$

又因加減先後之次序，與結果之得數無關；而方程右面之 3×25，亦可把他乘出作75寫上；於是此方程又可如是寫：$35+3x-x=75+3x-3x$. 這裏，等號之右面是於 75 上加 $3x$ 又減 $3x$，加的和減的恰相消，只存 75 在那裏了；其左面是於 35 上加 $3x$ 又減去一個 x，如是尙存 $2x$ 加於 35 上，因之左面爲 $35+2x$. 這樣，此方程經歸併後，卽變爲下式了：

$$35+2x=75.$$

我們仍如前法，於此方程之兩面再各減去 35，卽得此式：

$$2x=40.$$

旣得了此式，我們的問題解決了；蓋我們所求的未知數 x，卽幾年前之年數，現在已得其數目：此式明明的說 $2x$ 等於 40，則 x 等於 40 之半，卽是 20. 這就是說，我們所求的年數是 20 年.

現在且看這所求得的數目是否已解答了我們的問題呢？細細一想，實在一些也不差，因爲二十年前兄的年齡十五，而弟的則爲五歲，算來此時兄的年齡恰長於弟的三倍.

我們爲了要使讀者能更淸楚些更明白些起見，再舉一個例於下.

例二. 有線一條，長 21 寸. 現在我們要將此線分成兩段，使此段等於彼段四分之三，問這兩段各長若干？

這裏，我們所欲分成的兩段，是一較長，一較短；但照題目上說，是欲使短者等於長者的四分之三，因此我們可如是算法：我們設長者一段爲 $4x$ 寸，則短者等於其四分之三，自然是 $3x$ 寸了. 因爲原線長 21 寸，所以這所分成的兩段合起來，仍是 21 寸，於是我們得此方程：

$$4x+3x=21.$$

這裏，等號之右面是原線之寸數，其左面爲所分成的兩段，

長者 $4x$ 寸,短者 $3x$ 寸,用加號表示其合起來之意. 這方程一面是未知數,一面是已知數,所以極容易求其解:我們照此式將其左面之兩個未知數相加,即得$7x$,如是此方程爲 $7x=21$,即是說七個 x 等於21. $7x$ 旣等於 21, x 自然等於3. 我們前面原設長者等於$4x$寸,短者等於$3x$寸;今旣求得 x 之值爲 3,則即是長者等於 12 寸,短者等於 9寸. 如是短者恰等於長者四分之三,而此二段合起來亦仍是原線 21 寸,實在一些不差.

上面所舉這二個例,自然是最簡單的,即不求助於代數單憑頭腦亦能想得出來,但是讀者看了此,則所謂方程之意義,已可得個概念了.

3. 方程內之項 凡方程內用加號或減號連起來之各個數目,不論爲已知者或未知者,均謂之"項". 如前節內 $35+2x=75$ 一方程,其中 35, $2x$, 75 三個數目均稱爲項,因而此方程之左面爲二項,其右面則祗有一項,項有相似的與不相似的之分,如 $2x$ 與 $4x$ 這兩個項是相似的,$2x$ 與 35 或 $2y$ 這三個項是不相似的. 方程內相似的諸項,可照他們的號或加或減的歸併起來成爲一項,如前節第二例內 $4x+3x=21$ 一方程,其左面 $4x$ 與$3x$兩個項是相似的,

因之我們可照其間之加號併爲一項作 $7x$. 其不相似的項自然不能歸併. 項前之加號或減號, 表明此項須加於其號或減去之者, 我們即視爲此項之號, 如在開首, 前面無號者, 亦視作有加號; 如是前所舉之式 $35+2x=75$, 其中 $2x$ 一項有加號在前, 35 與 75 兩項均在開首, 其前無號, 但我們亦視之作有加號在前. 又如 $a-b=c$, 此方程內之左面第一項 a 爲有加號在前者, 第二項 b 則有減號在前; 其右面一項 c 亦爲有加號在前者. 加號我們亦稱爲正號, 減號亦稱爲負號; 因之每個項均可別爲正的或負的 (按數目有正負之分, 這是很易明白的; 舉個例以說, 爲寒暑表零度之上有一, 二, 三, 四……等度數, 零度之下亦有一, 二, 三, 四……等度數, 如是零度以上者謂之正數, 零度以下者謂之負數. 譬如零度以上十度, 我們可稱之爲正十度, 零度以下十度, 則可稱爲負十度. 我們亦可拿 0 爲出發點, 向前增加得 1, 2, 3…… 爲正數, 向後再減少, 則所得爲負的數 $-1, -2, -3, \ldots\ldots$ 了).

前節內曾說過, 方程猶如一天秤, 等號之兩面是等重的. 我們若欲於一面加上或減去某數, 則其他一面亦必同樣的加上或減去此數, 方能仍保持其均勢; 例如

$$35=75-3x \tag{1}$$

一方程，我們若欲於此方程之右面加上$3x$，則左面自必亦同樣的加上此數而後可． 於是左面成為$35+3x$，而右面則因75上加$3x$又減$3x$恰相消故，祇存75；方程(1)遂成此式：

$$35+3x=75 \tag{2}$$

我們若再欲於左面減去35，則右面自然亦須同樣的減此數． 左面原為$3x$加35，今減去了35，則祇存$3x$了，右面則成為$75-35$；因而方程(2)成為：

$$3x=75-35 \tag{3}$$

從這種極淺顯的道理上，我們得到一個代數上極重要的辦法，即所謂"項之遷移"是． 代數裏面凡方程內等號兩面之諸項，均可隨便遷移，自右面遷至左面，或自左面遷至右面，祇要改變此所遷的項前之號便得． 如前面之方程(1)，其等號右面之第二項$-3x$若把他遷至等號左面，只須改其前之負號為正號，於是我們便得方程(2)． 此方程(2)等號左面之第一項35，若將他改變正號作負號而遷至右面，即得方程(3)． 觀此，可知我們將一個項改了號，自等號之一面遷至他面時，其結果與我們用了思想設法

兩面同加或同減某數再計算後所得者相同；但此種方法，何等的直捷，何等的便利，我們欲將未知數盡遷於一面，已知數盡遷於他面，使各各分開時，只要將所欲遷的項改了號便可自由遷過去了．譬如前節內第一例所得方程：

$$35-x=75-3x$$

我們祇要將其等號右面之 $-3x$ 改號遷至左面，將左面之 35 改號遷至右面，便得

$$3x-x=75-35,\text{ 或 }2x=40.$$

我們既得了此種遷項的辦法，以後解方程時便卽用此，自然又可省便多了．

4. 二項式之乘法　在第二節內，我們已經知道 $3\times(25-x)$，可寫作 $3\times25-3x$．此種道理，自然不論所乘者是何數目均可通用的．我們現在用 a 代 3，用 b 代 25，并用 c 代 x，則 $a(b-c)$ 亦可寫作 $ab-ac$ 卽

$$a(b-c)=ab-ac \qquad (1)$$

廣之，自然

$$a(b+c)=ab+ac \qquad (2)$$

我們若再廣此理，於方程(2)中將 a 易成爲二項，如 $b-c$，則方程(2)卽變爲

$$(b-c)(b+c)=b(b-c)+c(b-c).$$