全国十二大考研辅导机构指定用书

李永乐·王式安考研数学系列

★ 样卷篇 囊括历年考题精华

★ 模拟篇 查漏补缺最后冲刺

2012考研 李永乐

数学最后冲刺 5+3

数学一

主编 李永乐 王式安

"100题"与"400题"之经典在延续……

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

李永乐数学最后冲刺

5+3 数学一

主 编 李永乐 王式安

编 委：北京理工大学 王式安
北 京 大 学 刘西垣
北 京 大 学 李正元
清 华 大 学 李永乐
西安交通大学 武忠祥
(按姓氏笔画排序)

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

李永乐数学最后冲刺5+3.数学一/李永乐主编.—西安：西安交通大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-5605-4023-8

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第166940号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识，凡有防伪标识的为正版图书，敬请读者识别。

李永乐数学最后冲刺5+3(数学一)

主　　编：李永乐　王式安
责任编辑：郭鹏飞
装帧设计：金榜图文设计室
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路10号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/8
印　　张：10.25
字　　数：186千字
版　　次：2011年11月第1版
印　　次：2011年11月第1次印刷
书　　号：978-7-5605-4023-8/O·375
定　　价：15.00元

前　言

本套试卷是一种新的尝试，是为参加全国硕士研究生入学统一数学考试的考生，在最后冲刺阶段设计的复习用书。针对考生在强化阶段出现的问题，从考研数学的热考内容和重点题型中多角度设计题目。它是“数学全程预测 100 题”和“数学全真模拟经典 400 题”的延续，希望能在最后冲刺阶段增强考生在应试中的变通能力，从而取得理想的成绩。

本套试卷特点为首次采用了 5＋3 的形式，即 5 套样卷加 3 套模拟。

5 套样卷是从 1991 年～2011 年的真题中精心挑选与总结所组成，这 5 套样卷中的试题涵盖了这 20 多年来的重点考查内容和易考题型，这样更加利于考生温故知新，从而更好地把握考试的方向。

3 套模拟集多年真题中的热考题型和重点考查知识点于一身，试图从模拟命题教师的角度来编写，旨在考前的摸底与练兵。

同学们在使用《数学最后冲刺 5＋3》的时候，每一套试卷都一定要按照正式考研时的程序答题，独立思考、认真书写，不能在答题的过程中对照解析，并且不要估分，但要查漏补缺、总结和提炼，这样方能达到事半功倍的效果！

编者

2011 年 11 月

目　录

样卷篇

第一套 …………………………………………………………………… (1)

第二套 …………………………………………………………………… (5)

第三套 …………………………………………………………………… (9)

第四套 …………………………………………………………………… (13)

第五套 …………………………………………………………………… (17)

模拟篇

第一套 …………………………………………………………………… (21)

第二套 …………………………………………………………………… (25)

第三套 …………………………………………………………………… (29)

参考答案 ………………………………………………………………… (33)

注意：
因以下项目填写不清
而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试
地点________
______考场_____号
归属
区县________
（领准考证的区县）

（密封线内不要答题）

样卷篇

第一套

得分	评卷人

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

(A) 间断点.　　(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$.　　(D) 可导的点，且 $f'(0)\neq0$

(3) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数. "$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 是单调函数

(4) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2,\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.

(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(6) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解必是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(7) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

(8) 设随机变量 $X\sim t(n)\,(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$ 则

(A) $Y\sim\chi^2(n)$.　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$.

(C) $Y\sim F(n,1)$.　　(D) $Y\sim F(1,n)$.

得分	评卷人

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ ________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为________.

(11) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)\Big|_{(1,-2,2)}=$ ________.

(12) 设曲面 $\sum$ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\,dy\,dz+x\,dz\,dx+x^2\,dx\,dy=$ ________.

(13) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm T}$. 若 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 a,b 应满足的条件是____.

(14) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 数学期望 $E(X^2)=$ ________.

得分	评卷人

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

(16)（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)（本题满分 10 分）

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

(18)（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(Ⅰ) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(Ⅱ) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置.

证明:(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$.

(Ⅱ)当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

(Ⅱ)求 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})$.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，求：

(Ⅰ) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(Ⅱ) $F(-\frac{1}{2},4)$.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$. 记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(Ⅰ) 求 Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(Ⅱ) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{cov}(Y_1,Y_n)$；

(Ⅲ) 若 $C(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 C.

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负

准考证号

姓名

考试地点________

________考场______号

归属区县________

（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

第二套

得分	评卷人

一、选择题：1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有

(A) $b=4d$.　　(B) $b=-4d$.

P2179 (C) $a=4c$.　　(D) $a=-4c$.

(2) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.

(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

(3) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，

② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

(A) ② ⇒ ③ ⇒ ①　　(B) ③ ⇒ ② ⇒ ①

(C) ③ ⇒ ④ ⇒ ①　　(D) ③ ⇒ ① ⇒ ④

(4) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为

(A) $\boldsymbol{E}$.　　(B) $-\boldsymbol{E}$.　　(C) $\boldsymbol{A}$.　　(D) $-\boldsymbol{A}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组（Ⅰ）：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和（Ⅱ）：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必有

(A)（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）的解也是（Ⅱ）的解.

(B)（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解.

(C)（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解，（Ⅱ）的解也不是（Ⅰ）的解.

(D)（Ⅰ）的解是（Ⅱ）的解，但（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解.

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\dfrac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

得分	评卷人

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 对数螺线 $\rho=e^\theta$ 在点 $(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程为________.

先去x

(10) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin^2(x-t)\,dt=$________.

一个函数
二个自变量

(11) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F'_2\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(12) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|\ (x\in[-1,1])$，起点是 $(-1,0)$，终点为 $(1,0)$，则曲线积分 $\displaystyle\int_L xy\,dx+x^2\,dy=$________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$. 若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$________.

(14) 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ 概率 \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 与 Y^2 的协方差 $\operatorname{cov}(X^2, Y^2) =$ ________.

得分	评卷人

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x - x = 0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数．

(17)（本题满分 10 分）

已知曲线 C：$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点．

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 11 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1.$$

(Ⅰ)证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$;

(Ⅱ)求 $y(x)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维列向量,b 为常数,记分块矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}|\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ)计算并化简 $\boldsymbol{PQ}$;

(Ⅱ)证明矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

(21)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量,并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值的特征向量;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(22)(本题满分 11 分)

假设随机变量 u 在区间$[-2,2]$上服从均匀分布,随机变量

$$X=\begin{cases}-1,若 u\leqslant -1,\\ 1,若 u>-1.\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1,若 u\leqslant 1,\\ 1,若 u>1.\end{cases}$$

试求:(Ⅰ)X 和 Y 的联合概率分布;

(Ⅱ)$D(X+Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$

其中未知参数 $\beta>1$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

求:(Ⅰ)β 的矩估计量;

(Ⅱ)β 的最大似然估计量.

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点________________
________考场______号
归属区县________________
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

第三套

得分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

(1) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$. (B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$. (D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(2) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0,f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f(0)>1,f''(0)>0$. (B) $f(0)>1,f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1,f''(0)>0$. (D) $f(0)<1,f''(0)<0$.

(4) 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 举例

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散.

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是4维列向量，且4阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，

若查行列式性质

$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则4阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$

(A) $m+n$. (B) $-(m+n)$.

(C) $n-m$. (D) $m-n$.

(6) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 和对角矩阵相似，则 $a=$

(A)0 (B)1 (C)6 (D)2

(7) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(8) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知．现从中随机抽取16个零件，测得样本均值 $\overline{X}=20(\mathrm{cm})$，样本标准差 $S=1(\mathrm{cm})$，则 μ 的置信度为0.90的置信区间是

(A) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$.

(B) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\dfrac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$.

(D) $\left(20-\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\dfrac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$.

（其中 $t_\alpha(n)$ 是指 $t(n)$ 分布上 α 分位数）

得分	评卷人

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．把答案填在题中的横线上．

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

(10) $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$________.

(11) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$________.

(12) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

(13) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 t 的取值为____.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ________.

得分	评卷人

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)（本题满分 9 分）

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

(17)（本题满分 11 分）

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(Ⅰ) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(Ⅱ) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

密 封 线 内 不 要 答 题

密 封 线 内 不 要 答 题

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且 $f(1,y)=0$,$f(x,1)=0$,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$,证明 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(21)(本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示,其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(Ⅰ) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 DT.

注意：
因以下项目填写不清而影响成绩责任自负
准考证号

姓名

考试地点______考场______号

归属区县______
（领准考证的区县）

（密 封 线 内 不 要 答 题）

第四套

得分	评卷人

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

(1) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

(2) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，则 I,J,K 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

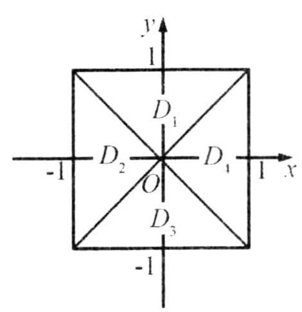
(3) 如图，正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k}y\cos x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$

(A) I_1.

(B) I_2.

(C) I_3.

(D) I_4.



(4) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3$，$f'_y(0,0)=1$. 则

(A) $\mathrm{d}z\Big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,1,1\}$.

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量 $\{1,0,3\}$.

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量 $\{3,0,1\}$.

(5) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个不同的特征值是 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

（其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0$，$i=1,2,3$）交于一点的充分必要条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

(7) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.

(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$.

(8) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.

(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

得分	评卷人

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2)\,du \end{cases}$,则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ ________.

(10) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$z = f(x,xy)$,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ________.

(11) 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

(12) 设曲面$\sum: |x|+|y|+|z|=1$,则$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS =$ ________.

(13) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体$B(n,p)$的简单随机样本,$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$ ________.

得分	评卷人

三、解答题:15～23小题,共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分9分)

设函数 $f(x)$ 连续,且 $f(0)\neq 0$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

(16)(本题满分9分)

求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(17)(本题满分11分)

设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1,区间$[0,x]$上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1-S_2$ 恒为1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

密 封 线 内 不 要 答 题