偏微分方程

偏微分方程

E.T. copson 著

俞崇庆 马雅彬 译

内蒙古民族师范学院数学系

一九八二年三月

前　言

本书是为纪念我的岳父——一位前任教授、皇家学会会员埃德蒙·惠特克爵士而写成的，以感谢他整整卅年中对我多方面的热心帮助和鼓励。今天是他的诞辰百年纪念日。

在我1922年作为一名青年讲师来到爱丁堡时，我就惊异地发现这里的课程与牛津大学的课程是何等不同，它包括象勒贝格积分、矩阵论、数值分析、黎曼几何，还有我一点也不知道的课题，特别是惠特克给大学生和研究生讲的偏微分方程使我深受感动，他讲的与当时标准的英格兰课本大大不同。本书虽不是以惠特克的讲稿为基础的；但没有他的鼓励是决不会写成的。

我经常讲授偏微分方程课程，并总为我的学生没有书可参考而惋惜。朋友们对我说，补救的办法是我自己写一本；而本书介绍的某些理论用的是古典分析的方法。

本书的原始出处没有几本。在多年讲授这门课后，现在我不能指出本书的材料都来自何处。在214页上将有我曾读过并受益的书目，其中有的比本书更深入。

E·T·C

1973年10月24日　于圣·安德鲁斯

本书是根据剑桥大学出版社(Cambridge university press)出版的E.T.copson教授著“偏微分方程”(partial differential equations)1975年第一版译出的。

本书可供学习“偏微分方程”的读者参考。

——译者

目 录

前言 …………(0)
1. 一阶偏微分方程 …………(1)
2. 二阶方程的分类 …………(19)
3. 边值问题与初值问题 …………(36)
4. 双曲型方程 …………(44)
5. 黎曼方程 …………(61)
6. 波动方程 …………(71)
7. M.里兹方法 …………(84)
8. 平面上的位势理论 …………(102)
9. 次调和函数和狄里克莱问题 …………(134)
10. 平面上的椭圆型方程 …………(143)
11. 空间中的椭圆型方程 …………(159)
12. 热方程 …………(183)
附 录 …………(210)

1

一阶偏微分方程

1.1 拉格朗日方程

一阶拉格朗日偏微分方程为

$$Pp+Qq=R\ ,\qquad (1)$$

其中 $p=\frac{\partial u}{\partial x}$，$q=\frac{\partial u}{\partial y}$ 以 P，Q，R 是 x，y 和 u 的函数；由于导数是线性的，通常称之为拟线性方程。若 P，Q，和 R 不含有 u，则称拉格朗日方程为线性的；若仅仅是 R 含有 u，则称之为半线性的。

所谓方程 (1) 的解，系指满足该偏微分方程的函数 $u(x,y)$；但我们通常遇见由关系式 $f(x,y,u)=0$ 所定义的隐式解。如果我们把 (x,y,u) 看作卡的迪直角坐标，则 $f(x,y,u)=0$ 是曲面方程；如果 $f=0$ 提供 (1) 的解，则称该曲面为积分曲面。基本问题是：如果在空间中给出一个正则弧[†] Γ，那么是否有一唯一的积分曲面通过 Γ？或在 xy 平面上给出一个正则弧 γ，有否在 γ 上取已知值的方程 (1) 的解 $u(x,y)$？

设 Γ 的参数方程为

$$x=x_0(t),\quad y=y_0(t),\quad u=u_0(t).$$

在任何曲面上，$du=p\,dx+q\,dy$。所以，如果有一通过 Γ 的积分曲面，则在积分曲面上的 p 和 q，在 Γ 的参数 t 的点的值 $p_0(t)$，$q_0(t)$ 满足

$$\dot{u}_0=p_0\dot{x}_0+q_0\dot{y}_0\ ,\qquad (2)$$

其中点表示对 t 的微分。如果我们用 P_0，Q_0，R_0 表示 P，Q，R 在参数 t 的 Γ 的点上的值，则有

$$P_0p_0+Q_0q_0=R_0\ .\qquad (3)$$

所以，如果 $\dot{x}_0Q_0-\dot{y}_0P_0$ 不为零，那么就可确定 p_0 和 q_0。

我们約定用 r，s，t 表示二阶导数 u_{xx}，u_{xy}，u_{yy}；事实上，我们已用 t 表示 Γ 的参数，这将不致引起任何混淆。如果我们对 x 微分 (1)，得

$$Pr+Qs=F(x,y,u,p,q),$$

因此，在参数 t 的 Γ 的点处

$$P_0r_0+Q_0s_0=F_0\ .$$

由于 $dp=r\,dx+s\,dy$，有 $\dot{x}_0r_0+\dot{y}_0s_0=\dot{p}_0$。

如果 $\dot{x}_0Q_0-\dot{y}_0P_0$ 不为零，则 p_0 和 q_0 在 Γ 上被确定了，因而 r_0 和 s_0 也就被确定了。其

† 术语正则弧见附录中的注3

似地，我们能求出u在Γ上的所有偏导数。于是，我们得到形如泰勒级数的形式解 $u=u_0+\{p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0)\}$

$$+\frac{1}{2}\{r_0(x-x_0)^2+2s_0(x-x_0)(y-y_0)+t_0(y-y_0)^2\}+\cdots.$$

在一定的条件下，能够证明这级数在Γ上的点(x_0, y_0, u_0)的邻域内收敛，只要$\dot{x}_0Q_0-\dot{y}_0P_0$不为零。

现在省略有意义的下标零。在Γ的任一点上，积分曲面满足

$$Pp+Qq=R,\quad p\dot{x}+q\dot{y}=\dot{u}.$$

因此 $$(Q\dot{x}-P\dot{y})q=R\dot{x}-P\dot{u},$$

对p也有类似的方程。如果$Q\dot{x}-P\dot{y}$在Γ的每一点为零，则该方程是不成立的，除非满足迁移方程

$$P\dot{u}=R\dot{x}\quad(\text{或等价地})\ Q\dot{u}=R\dot{y}.$$

所以，如果在Γ上$Q\dot{x}-P\dot{y}=0$，则除非u满足迁移方程不然就没有通过Γ的积分曲面，并且由于q能任意选定就有无穷多张积分曲面。

具有这种性质的弧Γ称为<u>特征线</u>。通过空间的每一点有一条特征线而P, Q, R在这点不全为零，这个特征线满足

$$\frac{\dot{x}}{P}=\frac{\dot{y}}{Q}=\frac{\dot{u}}{R}.$$

特征线是两张积分曲面的交线。由此看来，如果 u_1、$u_2=u_2(x,y)$是两张相交的积分曲面，那么

$$p_1dx+q_1dy-du=0,\quad p_2dx+q_2dy-du=0,$$

用明显的记法，有 $$\frac{dx}{q_1-q_2}=\frac{dy}{p_2-p_1}=\frac{du}{p_2q_1-p_1q_2}$$

然而 $$Pp_1+Qq_1=R,\quad Pp_2+Qq_2=R,$$

因此 $$\frac{P}{q_1-q_2}=\frac{Q}{p_2-p_1}=\frac{R}{p_2q_1-p_1q_2}.$$

所以，在两张积分曲面的交线上，有

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R}.$$

变换参数后，特征线的微分方程能写为 $\dot{x}=P,\ \dot{y}=Q,\ \dot{u}=R$。这些方程的解含有三个积分常数，其中的两个常数是特征线交于平面$u=0$的点的坐标，而第三个常数能被从用$t+C$代替t使微分方程不变的那种意义上说t所固定。那么，特征线形成一个双参数族。如果C是一个非特征弧，则能证明与C相交的单参数特征线族形成通过C的唯一的积分曲面。此外，如果双参数的特征线族是由

$$\phi(x, y, u)=a, \quad \psi(x, y, u)=b$$

给出的，那么通过建立 a 和 b 之间的关系即 $b=F(a)$ 就能构成单参数族。这个单参数族形成积分曲面

$$\psi(x, y, u)=F\{\phi(x, y, u)\}.$$

特征线 Γ 在平面 $u=0$ 上的投影 γ 称为特征基线。如果 P 和 Q 不含有 u，那么，特征基线满足 $\dot{x}=P$, $\dot{y}=Q$。为了使解在 γ 上取已知值，数据必须满足方程 $P\dot{u}=R\dot{x}$。

1.2 两个例子

我们知道，如果 u 是 x 和 y 的 n 次齐次函数，

那么

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu.$$

现在我们证明其逆，拉格朗日辅助方程为

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{nu}.$$

由此上方程我们得到 $\frac{y}{x}=a$, $\frac{u}{x^n}=b$。

因此，通解为 $\frac{u}{x^n}=f\left(\frac{y}{x}\right)$。

作为第二个例子，让我们求

$$(y-u)p+(u-x)q=x-y.$$

通过曲线 $u=0$, $xy=1$ 的积分曲面。

特征线由

$$\dot{x}=y-u, \quad \dot{y}=u-x, \quad \dot{u}=x-y.$$

给出，由此得

$$\dot{x}+\dot{y}+\dot{u}=0, \quad x\dot{x}+y\dot{y}+u\dot{u}=0.$$

因此，特征线是一些圆

$$x+y+u=a, \quad x^2+y^2+u^2=b.$$

我们必须选择通过 $u=0$, $xy=1$ 的单参数族。当 $u=0$, $xy=1$ 时，有

$$a^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=b+2.$$

所以，所要求的积分曲面为

$$(x+y+u)^2=x^2+y^2+u^2+2$$

或 $$u=\frac{1-xy}{x+y}.$$

1.3 一般的一阶方程

现在，我们要讨论一般的一阶方程

$$F(x, y, u, p, q)=0 \qquad (1)$$

的同样的问题，即通过一已知的正则曲线

$$x=x_0(t), \quad y=y_0(t), \quad u=u_0(t)$$

是否存在一积分曲面？方法是企图构造在Γ的一个任意点的邻域内收敛的满足(1)的泰勒级数。这意味着要计算u在该点的所有的偏导数。

u的一阶偏导数满足条件 $du=p\,dx+q\,dy$，它们在参数t的Γ的点上的值 p_0 和 q_0 由

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0, \quad \dot{x}_0 p_0+\dot{y}_0 q_0=\dot{u}_0$$

给出。我们假定能求出满足这些方程的实数对 (p_0, q_0)；如果不能求出，那么就没有实的积分曲面。

其次，用 X, Y, U, P, Q 表示F关于 x, y, u, p, q 的偏导数，那么如果我们对x微分(1)，注意变量 u, p, q 现在是x和y的函数，我们得

$$Pr+Qs+X+Up=0.$$

按假设，现在p在Γ上是已知的。利用条件

$$dp=r\,dx+s\,dy,$$

二阶导数r和s在Γ上的值便满足

$$P_0 r_0+Q_0 s_0+X_0+U_0 p_0=0, \quad \dot{x}_0 r_0+\dot{y}_0 s_0=\dot{p}_0.$$

因此 $$(Q_0\dot{x}_0-P_0\dot{y}_0)s_0=-(X_0+U_0 p_0)\dot{x}_0-P_0\dot{p}_0, \qquad (2)$$

类似地 $$(Q_0\dot{x}_0-P_0\dot{y}_0)s_0=(Y_0+U_0 q_0)\dot{y}_0+Q_0\dot{q}_0. \qquad (3)$$

由于 $$X\,dx+Y\,dy+U\,du+P\,dp+Q\,dq=0$$

其中 $$du=p\,dx+q\,dy,$$

(2)和(3)事实上是同样的方程。

如果 $Q_0\dot{x}_0-P_0\dot{y}_0$ 不是零，那么在Γ上可确定二阶导数值 r_0, s_0, t_0，类似地可确定高阶导数。这样，我们又得到一个二重泰勒级数的形式解，在一定的条件下，能够证明该级数在所选择的Γ的点的某邻域内是收敛的，只要 $Q_0\dot{x}_0-P_0\dot{y}_0$ 不为零。

现在简略下标零。在Γ的一点处，积分曲面满足

$$F(x, y, u, p, q)=0, \quad \dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y},$$

和 $$Pr+Qs=-X-pU, \quad Ps+Qt=-Y-qU$$

其中 $$r\dot{x}+s\dot{y}=\dot{p}, \quad s\dot{x}+t\dot{y}=\dot{q}.$$

因此 $(Q\dot{x}-P\dot{y})s=-(X+pU)\dot{x}-P\dot{p}$.

和 $(Q\dot{x}-P\dot{y})s=(Y+qU)\dot{y}+Q\dot{q}$.

如果 $Q\dot{x}-P\dot{y}$ 在C的每个点变成零，那么就没有通过C的积分曲面，除非后两个方程右边的式子变为零。这意味着，除非在C上适当选取 u,p,q，否则就没有积分曲面。这样，我们现在没有弧，而有带：一种由弧C形成且与由p和q确定的曲面元素有联系的窄条带子。这样一个带子称为**特征带**。该弧延伸为带可称之为一种特征。

特征带的微分方程为

$$\frac{\dot{x}}{P}=\frac{\dot{y}}{Q}=\frac{\dot{u}}{pP+qQ}=-\frac{\dot{p}}{X+pU}=-\frac{\dot{q}}{Y+qU}$$

且 $F(x,y,u,p,q)=0$

不看作微分方程，而看作五个变量的方程。用改变参数t的方法，我们能把这些方程写成

$$\dot{x}=P,\ \dot{y}=Q,\ \dot{u}=pP+qQ,\ \dot{p}=-X-pU,\ \dot{q}=-Y-qU,$$

这里 $F(x,y,u,p,q)=0$。

特征带形成三参数族。有五个积分常数，其中一个被恒等式 $F=0$ 所确定，第二个被t的起点的选择所确定。

通过非特征弧C的唯一的积分曲面由单参数族的特征带所形成。第一步是用与C的每个点有关的其法线是以 $p:q:-1$ 为方向的曲面元素来构造初始积分带。如果C的参数为

$$x=x_0(s),\quad y=y_0(s),\quad u=u_0(s),$$

其中s不必是弧长，那么我们选择

$$p=p_0(s),\quad q=q_0(s)$$

以使 $$\frac{du_0}{ds}=p_0\frac{dx_0}{ds}+q_0\frac{dy_0}{ds}$$

和 $F(x_0,y_0,u_0,p_0,q_0)=0$。

通过初始带的每个曲面元素有唯一的特征带。如此形成的单参数族的特征带就产生了所要求的积分曲面，正如下节例子所要说明的。这种方法通常称为拉格朗日—查皮特方法。要注意的是，尽管拟线性方程 $Pp+Qq=R$ 确实具有特征带，但在解这样一个方程时并不利用这些特征带。这是由于拉格朗日方程和一般方程 $F=0$ 之间在几何上有着重要的差别。

如果 (x_0,y_0,u_0) 是在积分曲面 $F=0$ 上的一个点，在该点的法线的方向比 $p_0:q_0:-1$

满足 $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0$。因此，通过该点的所有可能的积分曲面的法线生成一个锥面 N，其方程为

$$F\left(x_0, y_0, u_0, -\frac{x-x_0}{u-u_0}, -\frac{y-y_0}{u-u_0}\right)=0 .$$

通过点 (x_0, y_0, u_0) 的所有可能的积分曲面在该点的切平面的包络是另一锥面 T，其方程由从方程

$$u-u_0=p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0),$$

$$(x-x_0)Q_0-(y-y_0)P_0=0,$$

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)=0$$

中消去 p_0 和 q_0 的方法可以得到，其中 P_0 和 Q_0 表示 $\frac{\partial F}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial q}$ 在点 $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$ 的值。

通过锥面 T 的母线是一特定的积分曲面在点 (x_0, y_0, u_0) 的切平面，其法线在锥面 N 上。

就拉格朗日的方程而论，锥面 N 退化成平面

$$P_0(x-x_0)+Q_0(y-y_0)+R_0(u-u_0)=0;$$

锥面 T 成为直线

$$\frac{x-x_0}{P_0}=\frac{y-y_0}{Q_0}=\frac{u-u_0}{R_0} .$$

1.4 拉格朗日——查皮特方法的例子

我们用特征线方法求出 $pq=xy$ 通过曲线 $u=x$，$y=0$ 的积分曲面。特征带由关系式 $pq=xy$ 和微分方程

$$\dot{x}=q,\quad \dot{y}=p,\quad \dot{u}=2pq,\quad \dot{p}=y,\quad \dot{q}=x$$

给出，结果是

$$x=Ae^{t}+Be^{-t},\quad y=Ce^{t}+De^{-t},\quad u=ACe^{2t}-BDe^{-2t}+E,$$

$$p=Ce^{t}-De^{-t},\quad q=Ae^{t}-Be^{-t},$$

其中积分常数被 $AD+BC=0$

所联系。在初始曲线上 $x=s$，$y=0$，$u=s$。

在初始积分带上，方程

$$du=pdx+qdy,\quad pq=xy$$

给出 $p=1$，$q=0$。让 t 从初始曲线标起，那么，当 $t=0$ 时，有

$$A+B=s,\quad C+D=0,\quad AC-BD+E=s,$$

$$C-D=1,\quad A-B=0 .$$

其中 $AD+BC=0$。

这些给出 $A=B=\frac{1}{2}s$, $C=-D=\frac{1}{2}$, $E=\frac{1}{2}s$.

即然初始带是积分带，那么条件 $AD+BC=0$ 是自动满足的。因此，通过初始积分带的特征线是

$$x=s\cosh t,\quad y=\sinh t,\quad u=s\cosh^2 t,$$

$$p=\cosh t,\quad q=s\sinh t\ 。$$

从前三个方程消去 s 和 t，得

$$u^2=x^2(1+y^2),$$

这就是所要求的积分曲面的方程。

1.5 初值问题十

在这一节里，我们证明方程

$$p=f(x,y,u,q) \qquad (1)$$

在一定条件下有满足初始条件

$$u(x_0,y)=\phi(y),\quad q(x_0,y)=\phi'(y), \qquad (2)$$

的唯一的解析解，其中 $\phi(y)$ 是解析的。我们得到的结果是局部性的；我们用强函数方法证明有一个解 $u=u(x,y)$

在初始线 $x=x_0$ 的任一点 (x_0,y_0) 的邻域内是正则的。为方便起见，将 u_0 写成 $\phi(y_0)$，q_0 写成 $\phi'(y_0)$，而且我们假定 $f(x,y,u,q)$ 是四个自变量的解析函数，在 (x_0,y_0,u_0,q_0) 的邻域内正则。

这个问题能转化为含有具有三个因变数 u,p,q 的三个拟线性方程的问题。如果有一个解析解，则 $\partial q/\partial x=\partial p/\partial y$。从方程(1)，我们有

$$\frac{\partial p}{\partial x}=f_x+f_u p+f_q\frac{\partial q}{\partial x}\ 。$$

因此，在初始条件 $u(x_0,y)=\phi(y)$，$p(x_0,y)=f(x_0,y,\phi(y),\phi'(y))$，$q(x_0,y)=\phi'(y)$ 下 u,p,q 满足方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=p,\\
&\frac{\partial p}{\partial x}=f_x+f_u p+f_q\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}\ 。
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

这个三个方程的方程组在初始条件(2)下的方程(1)是等价的。由(2)的第一个和最后一个方

十　见附录的注1和2

程得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(q-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

因此 $$q-\frac{\partial u}{\partial y}=\omega_1(y).$$

根据初始条件，$\omega_1(y)$ 恒等于零，使得 $q=\partial u/\partial y$。当 u 解析时，由于

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y},$$

(3) 的第二个方程给出

$$\frac{\partial p}{\partial x}=f_x+f_u p+f_q\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

因此 $$p=f(x,y,u,q)+\omega_2(y).$$

再由初始条件，$\omega_2(y)$ 恒等于零，得 $p=f(x,y,u,q)$。

(3) 的第二个方程的系数含有自变量 x 和 y。在当 $x=x_0$ 的初始条件

$$\xi=0,\quad \eta=y-y_0$$

下，引入由 $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}$，$\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$ 所确定的两个附加的因变量 ξ 和 η，我们能去掉这个限制。由于 η 不依赖于 x，对所有的 x，$\eta=y-y_0$，故 $\partial\xi/\partial x=1$，使 $\xi=x-x_0$。如果在 $f(x,y,u,p,q)$ 中让 $x=x_0+\xi$，$y=y_0+\eta$，我们就得到在 $(0,0,u_0,p_0,q_0)$ 的邻域内正则的一个五个变量的解析函数 $g(\xi,\eta,u,p,q)$。现在，我们得到一个五个方程的方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial p}{\partial x}=\{g_\xi+g_u p\}\frac{\partial\eta}{\partial y}+g_q\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y},\quad \frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=0,$$

它带有当 $x=x_0$ 的初始条件

$$u=\phi(y),\quad p=f(x_0,y,\phi(y),\phi'(y)),\quad q=\phi'(y),$$

$$\xi=0,\qquad \eta=y-y_0.$$

这个方程组形如

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial y}\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

它具有当 $x=x_0$ 时的初始条件

$$u_i=\phi_i(y)\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

系数 g_{ij} 只是因变量的解析函数，在

$$(\phi_1(y_0), \phi_2(y_0), \cdots, \phi_n(y_0))$$

的邻域内正则，且数据 $\phi_i(y)$ 在 y_0 的邻域内正则。这里 $n=5$；以后我们将需要 $n=8$。证明的方法不依赖于变量的个数。最容易的情形是 $n=2$。在卡瑞特和希尔伯特的著作中论述了一般情形。于是，我们考虑两个方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=A\frac{\partial u}{\partial y}+B\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=C\frac{\partial u}{\partial y}+D\frac{\partial v}{\partial y}$$

的最简单情形，其初始条件是当 $x=x_0$ 时 $u=\phi(y)$，$v=\psi(y)$，

其中 ϕ 和 ψ 是在 y_0 的邻域内正则的解析函数。为使写法简化，移动原点使 x_0 和 y_0 为零。系数 A，B，C，D 是 u 和 v 的解析函数，在 (u_0, v_0) 的邻域内正则，其中 $u_0=\phi(0)$，$v_0=\psi(0)$。在 uv 平面上再移动原点，可取 u_0 和 v_0 为零。

由于 ϕ，ψ 和系数是解析的，我们能求出常数 M 和 R，使 $\phi(y)$ 和 $\psi(y)$ 在 $|y|<R$ 内被 $\dfrac{My}{1-\frac{y}{R}}$ 所控制，而 A，B，C，D 在 $|u+v|<R$ 内被 $M/\{1-(u+v)/R\}$ 所控制。若取 M 充分大，R 足够小，我们能用同样的常数 M 和 R。其次，改变标尺，可取 $R=1$，使写法简化。

初值问题以二重幂级数

$$u=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{u_{mn}}{m!n!}x^m y^n,$$

$$v=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{v_{mn}}{m!n!}x^m y^n,$$

为其形式解，能够通过计算系数

$$u_{mn}=\left(\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}\right)_0,\quad v_{mn}=\left(\frac{\partial^{m+n}v}{\partial x^m\partial y^n}\right)_0$$

求出，其中下标零表示导数在原点已求出。

既然 ϕ 和 ψ 是解析的，所以它们有收敛展开式

$$\phi(y)=\sum_0^{\infty}\frac{\phi_n}{n!}y^n,\quad \psi(y)=\sum_0^{\infty}\frac{\psi_n}{n!}y^n,$$

其中 $\phi_0=\psi_0=0$。因此 $u_{0n}=\phi_n$，$v_{0n}=\psi_n$。

由微分方程，我们得

$$u_{10}=A(0,0)\phi_1+B(0,0)\psi_1,\quad v_{10}=C(0,0)\phi_1+D(0,0)\psi_1.$$

其次

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=A\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+V\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+A_u\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+(A_v+B_u)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+B_v\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,$$

依据

$$u_{11} = A(0,0)\phi_2 + B(0,0)\psi_2 + A_u(0,0)\phi_1^2$$

$$+\{A_v(0,0) + B_u(0,0)\}\phi_1\psi_1 + B_v(0,0)\psi_1^2 .$$

类似地，我们能逐次計标出系数 u_{1n} 和 v_{1n}。其次，效应到 $\partial^2 u/\partial^2 x$，$\partial^3 u/\partial^2 x\partial y$，…，我们能計标出 u_{20}，u_{21} …，用类似的方法，对 u 和 v 的形式级数式中的系数 u_{mn} 和 v_{mn} 全能被确定。

如果我们将 A．B．C．D，中和中的为它们的强函数所代替，那么，我们将得到方程组

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M}{1-U-V}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{M}{1-U-V}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

其条件是当 $x=0$，$|y|<1$ 时，$U=V=My/(1-y)$，当 $y=0$ 时因为中和中速成零出现因式 y。我们要证明这个初值问题在原点附近有正则的唯一解，且函数 U 和 V 将是 u 和 v 的强函数。

由于 $\frac{\partial}{\partial x}(U-V)=0$，

$U-V$ 仅是 y 的函数，且根据初始条件恒等于零。所以，$U=V$ 和

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2M}{1-2U}\,\frac{2U}{\partial y}。$$

既然 U 和 $2Mx+(1-2U)y$ 的雅可比行列式恒等于零，那么，该方程的通解为

$$2Mx+(1-2U)y = F(U).$$

再根据初始条件，$F(U)=U(1-2U)/(M+U)$。因此所要求的解满足二次方程

$$2Mx(M+U)+(1-2U)(M+U)y = U(1-2U)。$$

这个方程有两个解，一个在原点取值0，另一个取值 $\frac{1}{2}$。需要的是前者，显然能把它写出，并且它明显地是一个解析函数，在原点的邻域内正则。

如果我们写下 U 在原点附近的展开式

$$U=\sum_0^{\infty} \frac{U_{mn}}{m!\,n!}x^m y^n,$$

恰如初始问题那样，系数能逐次标出。让 $x=0$，得 $U_{00}=0$，$\frac{U_{0n}}{n!}=M$。

由微分方程有 $U_{10}=2M^2$，

其次 $$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} = \frac{2M}{1-2U}\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{4M}{(1-2U)^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

得 $U_{11}=4M^2+4M^3$。

关于y重复微分，我们能计算出所有的系数U_n；每一个都是正数。此外

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^2} = \frac{2M}{1-2U}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{4M}{(1-2U)^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}$$

使得 $$U_{20} = 2MU_{11} + 4MU_{10}U_{01} = 4M^3 + 8M^4.$$

关于y重复微分，我们能计算出所有的系数U_{2n}，每一个又是正数。类似地，所有系数U_{mn}都能求出，并且每一个都是正数。

最后，根据这个迭代过程，我们看出

$$|u_{mn}| < U_{mn},\quad |v_{mn}| < U_{mn}$$

使得u和v的形式级数全部被U所控制。所以，我们开始提出的初值问题有唯一的在点(x_0, y_0)附近正则的解。

这一节所证明的结果没有概括那种一眼就可看出的情形。我们不需要假设数据是解析的，例如，如果我们假设$\phi(y)$是处处可微的，那么方程$xp-yq+u=0$在初始条件

$$u(x_0, y) = \phi(y),\quad q(x_0, y) = \phi'(y)$$

下有解

$$u = \frac{x_0}{x}\phi\left(\frac{xy}{x_0}\right),$$

这个解在任一点(x_0, y_0)的邻域内是可微的，但未必是正则的，其中$x_0 \neq 0$。

1.6 一阶半线性方程组

一阶半线性方程组形式为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}u_x + a_{12}v_x + b_{11}u_y + b_{12}v_y = h_1 \\ a_{21}u_x + a_{22}v_x + b_{21}u_y + b_{22}v_y = h_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

其中系数a_{ij}，b_{ij}仅依赖于x和y，但h_1和h_2还能包含u和v。系数a_{ij}，b_{ij}是解析函数，在某一域（开连通集）D内正则，而当(x, y)属于D且对某常数K，$|u|<K$，$|v|<K$时h_1与h_2是正则的。问题是要了解是否存在唯一的，在正则弧γ的邻域内正则的解析解，它在γ上取已知值。求解的第一步是用泰勒级数证明u和v的所有阶偏导数在γ的任何点都是确定的。

假定$x=x_0(t)$，$y=y_0(t)$是γ的参数方程；在γ上我们给出$u=u_0(t)$，$v=v_0(t)$。因需要这四个函数的所有阶导数，故我们假定它们是t的解析函数，在任何给出的t值附近都是正则的。

简略一下标号，在γ上我们有

$$\dot{u} = u_x\dot{x} + u_y\dot{y},\quad \dot{v} = v_x\dot{x} + v_y\dot{y},$$

其中点表示关于t的导数。那么，由(1)我们有

$$\left.\begin{aligned}&(b_{11}\dot x - a_{11}\dot y)u_y + (b_{12}\dot x - a_{12}\dot y)v_y = h_1\dot x - a_{11}\dot u - a_{12}\dot v,\\&(b_{21}\dot x - a_{21}\dot y)u_y + (b_{22}\dot x - a_{22}\dot y)v_y = h_2\dot x - a_{21}\dot u - a_{22}\dot v.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

通常，这些方程确定u和v在γ的任一点处的一阶导数。

六个二阶导数满足四个相似的方程，即

$$\left.\begin{aligned}&a_{11}u_{xx} + a_{12}v_{xx} + b_{11}u_{xy} + b_{12}v_{xy} = k_1,\\&a_{21}u_{xx} + a_{22}v_{xx} + b_{21}u_{xy} + b_{22}v_{xy} = k_2,\\&a_{11}u_{xy} + a_{12}v_{xy} + b_{11}u_{yy} + b_{12}v_{yy} = k_3,\\&a_{21}u_{xy} + a_{22}v_{xy} + b_{21}u_{yy} + b_{22}v_{yy} = k_4,\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

其中k_1，k_2，k_3，k_4不仅含有x，y，u，v，而且含有现在假定在γ上是已知的一阶导数。由于假定$\ddot x$，$\ddot y$，$\ddot u$，$\ddot v$是存在的，我们在γ上有另两个方程

$$\ddot u = u_{xx}\dot x^2 + 2u_{xy}\dot x\dot y + u_{yy}\dot y^2 + u_x\ddot x + u_y\ddot y,$$

$$\ddot v = v_{xx}\dot x^2 + 2v_{xy}\dot x\dot y + v_{yy}\dot y^2 + v_x\ddot x + v_y\ddot y.$$

这六个方程通常确定在γ上的六个二阶导数。类似的方法可确定所有的阶的偏导数。我们仅用方程(3)的前两个方程和关系式

$$\dot u_x = u_{xx}\dot x + u_{xy}\dot y,\quad \dot v_x = v_{xx}\dot x + v_{xy}\dot y$$

就能简化计算。那么我们得到类似(2)的一对方程，即

$$\left.\begin{aligned}&(b_{11}\dot x - a_{11}\dot y)u_{xy} + (b_{12}\dot x - a_{12}\dot y)v_{xy} = k_1\dot x - a_{11}\dot u_x - a_{12}\dot v_x,\\&(b_{21}\dot x - a_{21}\dot y)u_{xy} + (b_{22}\dot x - a_{22}\dot y)v_{xy} = k_2\dot x - a_{21}\dot u_x - a_{22}\dot v_x.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

此外，这些方程通常确定γ上的u_{xy}和v_{xy}，因而也确定那些其它的二阶导数。

如果行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}\dot x - a_{11}\dot y & b_{12}\dot x - a_{12}\dot y \\ b_{21}\dot x - a_{21}\dot y & b_{22}\dot x - a_{22}\dot y \end{vmatrix}$$

不为零，方程(2)就唯一地确定u_y和v_y。如果这行列式是零，则这些方程通常是不相容的。如果Δ是零，但行列式

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11}\dot x - a_{11}\dot y & h_1\dot x - a_{11}\dot u - a_{12}\dot v \\ b_{21}\dot x - a_{21}\dot y & h_2\dot x - a_{21}\dot u - a_{22}\dot v \end{vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{21}\dot x - a_{21}\dot y & h_1\dot x - a_{11}\dot u - a_{12}\dot v \\ b_{22}\dot x - a_{22}\dot y & h_2\dot x - a_{21}\dot u - a_{22}\dot v \end{vmatrix}$$

都为零，方程(2)是相同的，我们能指定如u_y，就可计算v_y，但这些方程不能唯一地确定u_y和v_y。

方程$\Delta = 0$是$\dot x : \dot y$的二次方程。在任一点(x, y)，它确定两个方向，称之为特征方向。如果在(x, y)的特征方向是实的且不同，方程组称之为双曲型的。如果二次方程有等根，方程组称为抛物型的。但如果$\Delta = 0$在(x, y)的根是复的，方程组称之为椭圆型的。