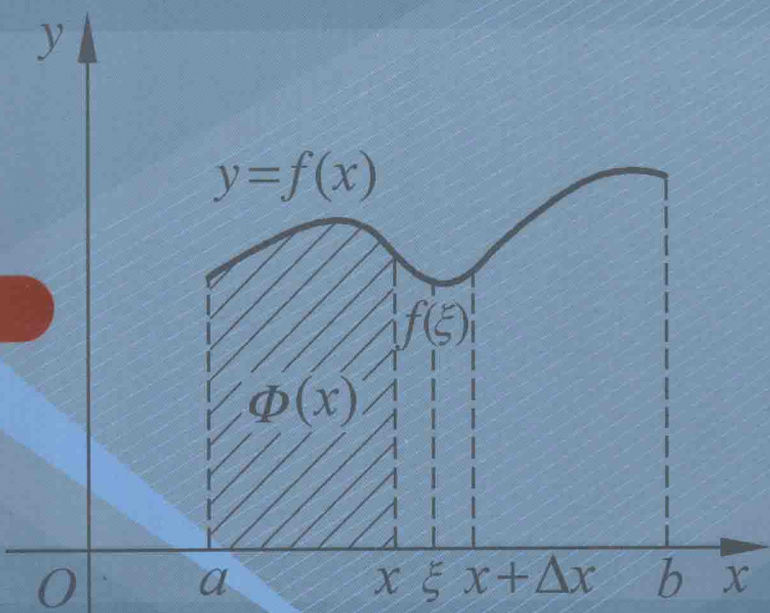
- 知识要点
- 答疑解惑
- 经典例题
- 习题全解

高等数学

同步学习指导（下册）

河北科技大学理学院数学系 编



清华大学出版社

高等数学

同步学习指导（下册）

河北科技大学理学院数学系 编

阜阳师范学院图书馆
藏书

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书与河北科技大学理学院数学系编写的《高等数学（下册）》（高等教育出版社，2012）配套使用，依照原教材的章、节顺序编排. 每章分为基本要求、答疑解惑、经典例题解析、习题全解四个部分，章末包含总复习和综合练习，书末附有本校三套期末试卷和三套数学竞赛试卷.

本书适用于应用型本科高等院校，也可供独立学院、成教学院理工科各专业学生参考.

版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习指导. 下册/河北科技大学理学院数学系编. --北京：清华大学出版社，2014
ISBN 978-7-302-34980-8

I. ①高…　II. ①河…　III. ①高等数学–高等学校–教学参考资料　IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 316713 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：15.75　　**字　　数**：383 千字
版　　次：2014 年 2 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 2 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：28.00 元

产品编号：057490-01

前　言

本书是与河北科技大学理学院数学系编写的《高等数学（上、下册）》（高等教育出版社，2012）相配套的学习指导教材，按照教育部颁发的本科非数学专业《高等数学课程教学基本要求》编写而成，遵循了主教材“以应用为目的，以够用为尺度”的原则，目的是帮助学生解决在学习高等数学课程时遇到的内容多、速度快、题量大、概念抽象、方法庞杂、学习效率低等问题.

全书分为上、下两册，上册内容包括一元函数微积分学和常微分方程，下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学和级数. 为了学生使用方便，本书按照主教材的章节顺序编写，与教学进度保持同步.

每章内容结构安排如下：

基本要求　包括知识要点及需要掌握的程度.

答疑解惑　针对学生容易产生的疑惑给出详细解答，以澄清概念，理清思路.

经典例题解析　选择一些典型例题，通过分析给出详细解答过程. 通常在每组例题之后以“注”的形式概括了有关的知识点，帮助学生总结提炼数学方法.

习题全解　对主教材中每节的所有习题给出了详细解答，为学生检验学习效果提供参考.

总复习　每章后设有总复习，包括本章重点及难点解析和方法总结. 同时提供综合练习题，检验学生综合运用知识的能力.

每册书末附有三套往届期末考试试卷及参考答案，便于学生检测整体学习效果. 上册书末附有常用公式和曲线；下册书末附有常用空间曲面，还附有三套河北科技大学数学竞赛试卷及参考答案，供有兴趣的同学参考.

参加本书编写工作的有纪玉德（第 1 章），王菊芳（第 2 章），李海萍（第 3 章），禹长龙（第 4 章），张金星（第 5 章），王琦（第 6 章），孙宗剑（第 7 章），董丽霞（第 8 章），左春艳（第 9 章），李占稳（第 10 章），杨英（第 11 章）. 刘秀君和李秀敏编写了第 1～11 章的总复习. 期末考试试卷和数学竞赛试卷由刘秀君提供. 上册由刘秀君审校、定稿，下册由李秀敏审校、定稿.

由于编者水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013 年 10 月

目　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第 7 章　向量代数与空间解析几何

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　基本要求

1. 理解向量的概念.
2. 掌握向量的线性运算.
3. 理解向量的几何表示.

7.1.2　答疑解惑

1. 向量与标量在表示方法上有什么区别?

解答　在手写体中，向量的上方有箭头，而标量没有；在印刷体中，若用单个字母表示向量，则用粗体字母表示该向量，或者不用粗体但是字母上方加箭头，若用两个字母表示向量，则上方加箭头，而标量不用粗体，也不加箭头. 例如 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}$, $\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 等都可表示向量.

2. 向量的起点都在坐标原点吗?

解答　本书讨论的向量都是自由向量，它的起点不是固定的，不一定在坐标原点，可以根据需要移动.

3. 当 A, B 为不同点时，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 相等吗?

解答　不相等，因为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的大小相等，但方向相反，所以它们不相等. 本书讨论的是自由向量，即只考虑向量的大小和方向，而不考虑向量的起点，因此，我们把大小相等、方向相同的向量叫做相等的向量. 在这里由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 平行移动后，它们的方向总是不同的，所以它们不相等.

4. 向量在轴上的投影是不是向量?

解答　向量在轴上的投影是一个数量，它可正可负，而不是一个向量.

7.1.3　经典例题解析

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+1\right)\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}-\frac{5}{2}\boldsymbol{b}$.

例 2　设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都为非零向量，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角平分线为 l，求与 l 平行的向量.

解　设 $\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0$ 分别表示向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的单位向量，则 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$. 因为以 $\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0$ 为邻边

的平行四边形为菱形，所以这个平行四边形的对角线平分顶角，又 $\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，于是与 l 平行的向量为 $\lambda\dfrac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，其中 λ 为实数.

注　以上求解过程中应用了向量的加法运算和菱形的对角线平分对角的性质.

例 3　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.

分析　根据平行四边形的对角线互相平分的性质和向量运算的三角形法则进行计算.

解　如图 7-1 所示，因为平行四边形的对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA}$，

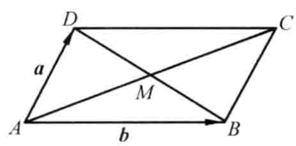


图　7-1

于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因为 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，

$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

例 4　在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，证明四边形 $ABCD$ 为梯形.

分析　利用向量关系证明四边形 $ABCD$ 中的一组对边互相平行，则可知四边形 $ABCD$ 为梯形.

证明　因为四边形 $ABCD$ 中，

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC},$$

所以向量 $\overrightarrow{AD}\,/\!/\,\overrightarrow{BC}$，即四边形 $ABCD$ 中的一组对边 AD 和 BC 互相平行，于是四边形 $ABCD$ 为梯形.

例 5　设一直线上三点 A，B，P 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ (其中 λ 是实数且 $\lambda\neq-1$)，O 是空间任意一点，求证：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}.$$

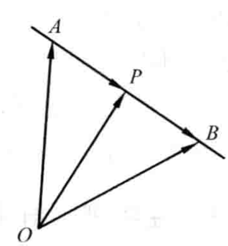


图　7-2

证明　如图 7-2 所示，因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$，所以 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$，也就是 $(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，从而 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

7.1.4　习题全解

1. 设 A,B,C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

解　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 4，它与轴 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 60°，求 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_u\, \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos 60^\circ = 4\times\frac{1}{2} = 2$.

4. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

解 如图 7-1 所示，四边形 $ABCD$ 中，令点 M 为对角线 AC 与 BD 的交点，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 中的一组对边 AB 和 DC 互相平行且相等，于是四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

7.2 空间直角坐标系与向量的坐标

7.2.1 基本要求

1. 掌握空间直角坐标系和空间点的直角坐标的概念.
2. 掌握空间两点间的距离公式.
3. 掌握向量的坐标表示法.
4. 掌握向量的模、单位向量及方向余弦的坐标表达式.

7.2.2 答疑解惑

1. 空间直角坐标系中的三个坐标轴的顺序是任意的吗？

解答 空间直角坐标系中的三个坐标轴的顺序是遵循右手规则的，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时，竖起大拇指的指向就是 z 轴的正向.画的时候，一般 z 轴向上，y 轴向右，x 轴向左下方.

2. 引入向量的坐标对向量的运算有什么作用？

解答 引入向量的坐标以后，就可将向量的运算转化为代数运算，计算起来比较方便.

3. 向量的坐标是如何建立的？

解答 在空间直角坐标系中，向量的坐标就是该向量在三个坐标轴上的投影组成的有序数组. 例如，设 $\overrightarrow{MN}$ 为空间直角坐标系中的一个向量，点 M 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，点 N 的坐标为 (x_2,y_2,z_2)，显然，向量 $\overrightarrow{MN}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1，于是向量 $\overrightarrow{MN}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$[†].

7.2.3 经典例题解析

例 1 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由 M_1 和 M_2 两点的坐标可知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$，于是 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$，与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量为 $\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}$，方向余弦

[†] 本书沿用主教材中的花括号形式表示向量，而用圆括号形式表示点的坐标.

$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$，方向角 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$.

例 2　已知 A,B,C 三个点的坐标如下：

（1）在平面直角坐标系下，$A(0,1),B(2,-2),C(-2,4)$；

（2）在空间直角坐标系下，$A(0,1,0),B(-1,0,-2),C(-2,3,4)$.

判别 A,B,C 三点是否共线？

解　（1）因为向量 $\overrightarrow{AB}=\{2,-3\},\overrightarrow{AC}=\{-2,3\}$，所以 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$，即向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 平行，又这两个向量有共同的起点，于是 A,B,C 三点共线；

（2）因为向量 $\overrightarrow{AB}=\{-1,-1,-2\},\overrightarrow{AC}=\{-2,2,4\}$，不存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 不平行，于是 A,B,C 三点不共线.

例 3　在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，画出点 $A(0,0,1)$，$B(2,1,0)$，$C(1,2,3)$.

解　根据点 A 的坐标可知，A 点在 z 轴上，B 点在 xOy 坐标面上. 画点 C 时，先在 x 轴的正方向上取 1 个单位的点，y 轴的正方向上取 2 个单位的点，过这两点在 xOy 坐标面上分别作 y 轴与 x 轴的平行线，交于点 M，过 M 作 z 轴的平行线 MN，在直线 MN 上，点 M 的上方取 3 个单位便得到点 C，如图 7-3 所示.

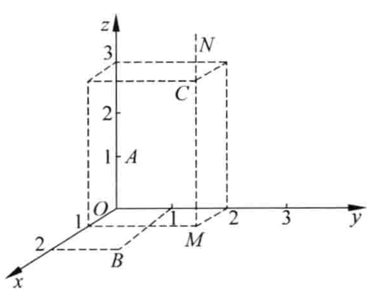


图　7-3

例 4　求点 $A(3,2,1)$ 关于各坐标面对称的点的坐标.

解　点 $A(3,2,1)$ 关于 xOy 坐标面对称的点的坐标为 $A_1(3,2,-1)$，关于 yOz 坐标面对称的点的坐标为 $A_2(-3,2,1)$，关于 zOx 坐标面对称的点的坐标为 $A_3(3,-2,1)$.

例 5　求点 $A(4,-2,3)$ 到 xOy 坐标面及 y 轴的距离.

解　点 A 到 xOy 坐标面的距离即为点 A 的竖坐标的绝对值，即点 A 到 xOy 坐标面的距离为 3；过点 A 作垂直于 xOy 坐标面的直线 AB，垂足为点 B，过点 B 再作垂直于 y 轴的直线 BC，垂足为点 C，于是直线 AC 垂直于 y 轴，即线段 AC 的长度为点 A 到 y 轴的距离，而在直角三角形 ABC 中，$|AC|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，于是点 A 到 y 轴的距离为 5.

例 6　在 z 轴上求与点 $A(3,\ 5,\ -2)$ 和 $B(-4,\ 1,\ 5)$ 等距离的点 M.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上，所以可设 M 点的坐标为 $(0,0,z)$，又因为 $|MA|=|MB|$，所以 $\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2+(5-z)^2}$，解得 $z=\frac{2}{7}$，即所求的点为 $M\left(0,0,\frac{2}{7}\right)$.

7.2.4　习题全解

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：

$A(2,-3,1)$，$B(7,-1,-2)$，$C(-2,-3,\ -1)$，$D(-1,2,-3)$.

解 $A(2,-3,1)$ 在第Ⅳ卦限，$B(7,-1,-2)$ 在第Ⅷ卦限，$C(-2,-3,-1)$ 在第Ⅶ卦限，$D(-1,2,-3)$ 在第Ⅵ卦限.

2. 指出下列各点所在的坐标面或坐标轴：$A(-1,2,0)$，$B(0,-2,3)$，$C(1,0,0)$，$D(0,-1,0)$.

解 $A(-1,2,0)$ 在 xOy 坐标面上，$B(0,-2,3)$ 在 yOz 坐标面上，$C(1,0,0)$ 在 x 轴上，$D(0,-1,0)$ 在 y 轴上.

3. 求点 $(-2,3,-5)$ 分别关于下列条件的对称点的坐标：

（1）xOy 坐标面；（2）y 轴；（3）坐标原点.

解 （1）点 $(-2,3,-5)$ 关于 xOy 坐标面对称点的坐标为 $(-2,3,5)$；（2）点 $(-2,3,-5)$ 关于 y 轴对称点的坐标为 $(2,3,5)$；（3）点 $(-2,3,-5)$ 关于坐标原点对称点的坐标为 $(2,-3,5)$.

4. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$，z 轴及 zOx 坐标面的距离.

解 点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$；点 $A(4,-3,5)$ 到 z 轴的距离为 $\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$；点 $A(4,-3,5)$ 到 zOx 坐标面的距离为 3.

5. 在 yOz 坐标面上，求与 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点等距离的点.

解 因为所求点在 yOz 坐标面上，所以可设它的坐标为 $M(0,y,z)$. 又因为该点到 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点的距离相等，所以 $|AM|=|CM|$，$|BM|=|CM|$，即

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2},$$

$$\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2},$$

由以上两等式解得 $y=1, z=-2$，于是所求点的坐标为 $(0,1,-2)$.

6. 已知 $A(1,0,2)$，$B(4,5,10)$，$C(0,3,1)$，$D(2,-1,6)$ 和 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求：（1）向量 $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}$ 在三个坐标轴上的投影及分向量；（2）$\boldsymbol{a}$ 的模；（3）$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦；（4）与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量.

解 （1）由已知，得 $\overrightarrow{AB}=\{3,5,8\},\overrightarrow{CD}=\{2,-4,5\}$,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}=4\{3,5,8\}+3\{2,-4,5\}-\{5,1,-4\}=\{13,7,51\},$$

可得向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $a_x=13, a_y=7, a_z=51$；向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分向量分别为 $a_x\boldsymbol{i}=13\boldsymbol{i}$，$a_y\boldsymbol{j}=7\boldsymbol{j}$，$a_z\boldsymbol{k}=51\boldsymbol{k}$.

（2）向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{13^2+7^2+51^2}=\sqrt{2819}$；

（3）向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}a_x=\frac{13}{\sqrt{2819}}, \cos\beta=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}a_y=\frac{7}{\sqrt{2819}}, \cos\gamma=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}a_z=\frac{51}{\sqrt{2819}}.$$

（4）与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量为 $\boldsymbol{a}^0=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2819}}\{13,7,51\}$.

7. 设向量的方向余弦分别满足（1）$\cos\alpha=0$；（2）$\cos\beta=1$；（3）$\cos\beta=\cos\gamma=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解 （1）由 $\cos\alpha=0$ 可知，该向量与 x 轴夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，即垂直于 x 轴，并且平行于 yOz 坐标面；

（2）由 $\cos\beta=1$ 可知，该向量与 y 轴夹角为 0，于是该向量的指向与 y 轴正向一致，并且垂直于 xOz 坐标面；

（3）由 $\cos\beta=\cos\gamma=0$ 可知，该向量与 y 轴和 z 轴夹角均为 $\frac{\pi}{2}$，于是该向量平行于 x 轴，并且垂直于 yOz 坐标面.

8. 已知 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$，线段 AB 交 xOy 坐标面于点 P，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，求 λ 的值.

解　由于点 P 在 xOy 坐标面上，可设点 P 的坐标为 $(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=\{x-2,y+1,-7\}$，$\overrightarrow{PB}=\{4-x,5-y,-2\}$，又因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，即 $\frac{x-2}{4-x}=\frac{y+1}{5-y}=\frac{-7}{-2}=\lambda$，于是 $\lambda=\frac{7}{2}$.

9. 一个向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，且其在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求这个向量的起点 A 的坐标.

解　设此向量的起点 A 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $\mathrm{Prj}_x\overrightarrow{AB}=2-x=4$，$\mathrm{Prj}_y\overrightarrow{AB}=-1-y=-4$，$\mathrm{Prj}_z\overrightarrow{AB}=7-z=7$，由这三个等式解得 $x=-2$，$y=3$，$z=0$，所以 A 点的坐标为 $(-2,3,0)$.

10. 从点 $A(2,4,7)$ 沿 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 方向取 $|\overrightarrow{AB}|=34$，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\{x-2,y-4,z-7\}$，又 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{8,9,-12\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 和向量 $\boldsymbol{s}$ 互相平行，可得 $\frac{x-2}{8}=\frac{y-4}{9}=\frac{z-7}{-12}$，令 $\frac{x-2}{8}=\frac{y-4}{9}=\frac{z-7}{-12}=k$，则

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(8k)^2+(9k)^2+(12k)^2}=34,$$

解得 $k=2$，于是 $x=8k+2=18$，$y=9k+4=22$，$z=-12k+7=-17$，所以 B 点的坐标为 $(18,22,-17)$.

7.3　向量的数量积　向量积

7.3.1　基本要求

1. 熟练掌握用坐标表达式进行向量的数量积与向量积的运算.
2. 掌握两个向量夹角的求法.
3. 熟练掌握两个向量互相垂直和平行的条件.

7.3.2　答疑解惑

1. 给出向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如何求以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积？

解答　以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，这也是向量积的模的几何意义；同时可知，以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积为 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

2. 向量的数量积是两个向量的模相乘再乘以这两个向量夹角的余弦，向量的向量积是两个向量的模相乘再乘以这两个向量夹角的正弦，这两种说法正确吗？

解答 第一种说法是正确的；第二种说法是不正确的，因为向量的向量积的结果是一个向量，这个向量的模是两个向量的模相乘再乘以这两个向量夹角的正弦，方向与这两个向量都垂直.

3. 在空间直角坐标系中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量，它们的坐标表示式分别为 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$，为什么 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$？

解答 两种乘法的意义不一样. 因为 $|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\sin 0=0$，所以 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$，同理 $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$；而 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\cos 0=|\boldsymbol{i}|^2=1$，同理 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

4. 向量的乘法有几种？

解答 向量的乘法主要有如下四种：

（1）向量与数的乘法；

（2）向量与向量的数量积，两个向量的数量积是一个数，满足交换律和结合律；

（3）向量与向量的向量积，两个向量的向量积仍然是一个向量，满足结合律但不满足交换律；

（4）三个向量的混合积，先作两个向量的向量积，把得到的向量与第三个向量再作数量积，这样得到的数量叫做三个向量的混合积.

注意，向量没有除法运算！

5.（1）若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

（2）若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

（3）若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

解答 （1）不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由已知条件 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，这里的向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定是零向量.

例如，当 $\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}$, $\boldsymbol{b}=\{0,1,0\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{0,0,1\}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，但是 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$；

（2）不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由已知条件 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{a}/\!/(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，这里的向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定是零向量.

例如，当 $\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}$, $\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{2,1,0\}$ 时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\{0,0,1\}$, 但是 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$；

（3）可以推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 又因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，这样，$\boldsymbol{a}$ 既垂直于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$ 又平行于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，只有 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 成立.

由（1）和（2）可知，向量的数量积和向量积运算不同于数的运算，不满足消去律.

7.3.3 经典例题解析

例 1 下列各命题是否正确？

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

（2）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

解 （1）不正确，因为向量积不满足交换律，正确的是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，这是因为按右

手规则从$\boldsymbol{a}$转向$\boldsymbol{b}$定出的方向恰好与按右手规则从$\boldsymbol{b}$转向$\boldsymbol{a}$定出的方向相反；

（2）不正确，因为数量积、向量积都没有零因子律，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$不能推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或者$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$不能推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或者$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例如，令$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{0,1,0\}$，此时$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，但是$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$；

又令$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,0,0\}$，此时$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，但是$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

例 2　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为单位向量，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$首尾相接构成一个边长为 1 的正三角形，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，同理可得$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

例 3　已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{c}|=7$，并且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，计算$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$的值.

解　因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，又因为$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=|-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，所以向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$同向，向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{c}$反向，向量$\boldsymbol{b}$与向量$\boldsymbol{c}$反向，于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2\times5\cos0+5\times7\cos\pi+7\times2\cos\pi=10-35-14=-39,$$

并且$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin0=0$，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\pi=0$，$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\pi=0$，因此$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 4　已知$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=4$，求$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

解　由已知可得$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=4$，将上述两式平方后相加得$(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2=25$，所以$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=5$.

例 5　已知向量$\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{0,1,-2\}$，$\boldsymbol{c}=\{2,-2,1\}$，求一单位向量$\boldsymbol{n}^0$，使得$\boldsymbol{n}^0$垂直于$\boldsymbol{c}$，并且向量$\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共面.

解　设向量$\boldsymbol{n}^0=\{x,y,z\}$，因为$\boldsymbol{n}^0$是单位向量，所以$x^2+y^2+z^2=1$. 又因为向量$\boldsymbol{n}^0$垂直于$\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{n}^0\cdot\boldsymbol{c}=0$，即$2x-2y+z=0$，又因为向量$\boldsymbol{n}^0,\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$共面，所以向量$\boldsymbol{n}^0$垂直于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{n}^0\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$，又$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\0&1&-2\end{vmatrix}=\{0,2,1\}$，于是$\{x,y,z\}\cdot\{0,2,1\}=2y+z=0$.

联立方程组$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\2x-2y+z=0,\\2y+z=0,\end{cases}$解得$x=\dfrac{2}{3},y=\dfrac{1}{3},z=-\dfrac{2}{3}$或$x=-\dfrac{2}{3},y=-\dfrac{1}{3},z=\dfrac{2}{3}$，于是所求单位向量$\boldsymbol{n}^0=\pm\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right\}$.

例 6　已知向量$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{a}=\{1,5,-2\}$共线，且满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，求向量$\boldsymbol{b}$的坐标.

解　设向量$\boldsymbol{b}$的坐标为$\{x,y,z\}$，由$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，得$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-2}$，令$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{-2}=k$，得$x=k$，$y=5k,z=-2k$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com