高等几何题解

目　　录

第　一　章

仿射几何的基本概念

1.1　举一个例表明两回透视仿射之积仍为透视仿射；举一个例表明两回透视仿射之积不是透视仿射。

求透视仿射之积仍为透视仿射的充要条件。

解　1.若$a_1 /\!/ a_2 /\!/ a_3$，以T_1表示a_1到a_2的透视仿射，方向以f_1表示；以T_2表示a_2到a_3的透视仿射，方向以f_2表示，且$f_1 \nparallel f_2$。

（图·1）。

$\because T_1(A_1)=A_2$，

$T_1(B_1)=B_2$；

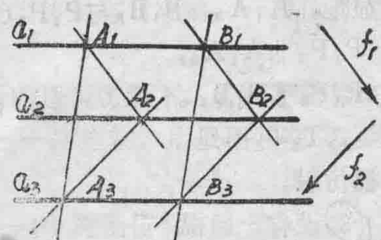
$T_2(A_2)=A_3$，

$T_2(B_2)=B_3$。

且$A_1B_1 \underline{\underline{/\!/}} A_2B_2 \underline{\underline{/\!/}} A_3B_3$

$\therefore\ A_1A_3 /\!/ B_1B_3$，

即T_2T_1是透视仿射。



图·1·

另外，若a_1，a_2，a_3共点O（图·2）。

$\because\ T_1(A_1)=A_2$，　　$T_1(B_1)=B_2$；

$T_2(A_2)=A_3$，　　$T_2(B_2)=B_3$。

由于点O是自对应点，透视仿射保留简比不变，

即　$(OA_1B_1)=(OA_2B_2)=(OA_3B_3)$，

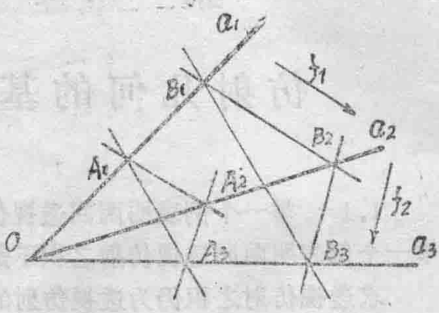
$$\therefore \quad \frac{OB_1}{A_1B_1}=\frac{OB_2}{A_2B_2}=\frac{OB_3}{A_3B_3},$$

$\therefore A_1A_3 /\!/ B_1B_3$。

又$\because T_2T_1(A_1)=A_3$，

$T_2T_1(B_1)=B_3$，

$\therefore T_2T_1$是透视仿射。



图·2·

2. 设$a_1\times a_3=P_1$，

$T_1(P_1)=P_2$，

$T_1(A_1)=A_2$，

$T_1(B_1)=B_2$；

$T_2(P_2)=P_3$，

$T_2(A_2)=A_3$，

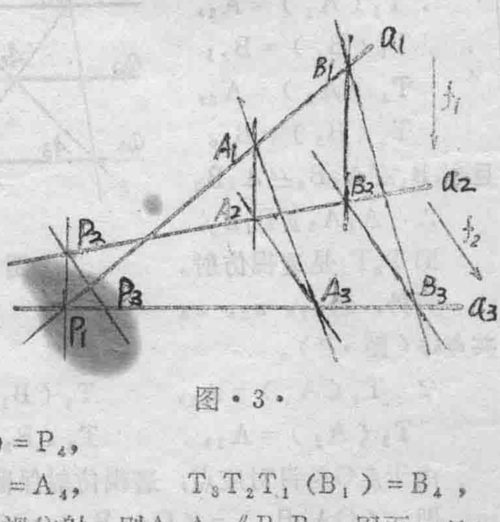
$T_2(B_2)=B_3$（图·3）。

明显地，A_1A_3，B_1B_3与P_1P_3（即a_3）分别交于点A_3，B_3，

即 $P_1P_3 \nparallel A_1A_3$，

$P_1P_3 \nparallel B_1B_3$。

$\therefore T_2T_1$不是透视仿射。



图·3·

3. 设有一透视仿射链T_1，T_2，……，T_{n-1}（里这取$n=4$）。

（图·4）。

必要性

设$T_3T_2T_1(P_1)=P_4$，

$T_3T_2T_1(A_1)=A_4$，　　$T_3T_2T_1(B_1)=B_4$，

若$T_3T_2T_1$是透视仿射，则$A_1A_4 /\!/ B_1B_4$，因而$a_1\times a_4$

$=P_1$是自 对应点。

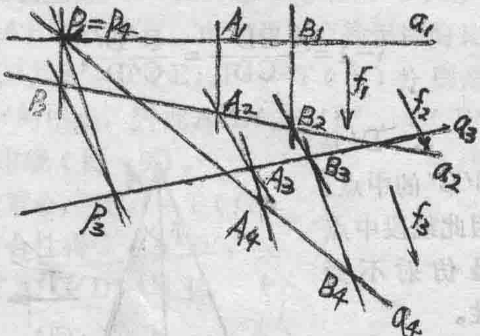
充分性 若$P_1 \equiv P_4 = a_1 \times a_4$ 是自对应点，因为

$(P_1A_1B_1) = (P_1A_4B_4)$，

所以

$A_1A_4 /\!/ B_1B_4$ 。

因此，透视仿射之积仍为透视仿射的充要条件是第一条直线a_1和最后一条直线 a_n 的交点是自对应点。



所有直线都平行.即交于∞点(特殊

1.2 两相交平面的透视仿射有对应轴，一般仿射在什么条件下有对应轴？

解1.因为在平面到平面的透视仿射下，若两平面相交，则交线g是自对应点的轨迹——对应轴，所以~~两相交平面的透视仿射~~有对应轴。

2.设从平面到平面的n－1个透视仿射T_1，$T_2\cdots$，T_{n-1}的乘积$T = T_{n-1}\cdots\cdots T_2 \cdot T_1$将平面$\alpha_1$上的点与平面$\alpha_n$上的点对应，若T有对应轴 $g = \alpha_1 \times \alpha_n$ 是自对应点的轨迹，即T 实质上是透视仿射。

1.3 证明线段的中点是仿射不变性，角的平分线不是仿射不变性。

证明 设T为仿射变换，根据平面仿射几何的基本定理，T 可使等腰△ABC（AB＝AC）与一般△A′B′C′相对应，设点D为线段 BC 的中点，则$AD \perp BC$，且$\beta = \gamma$， T (D) = D′ (图 · 5) 。

∵ T保留简比不变，即 (BCD) = (B′C′D′) ，

$$-1=\frac{BD}{CD}=\frac{B'D'}{C'D'},$$

∴ D′是B′C′的中点。因此线段中点是仿射不变性。

∵在等腰△ABC中，β = γ。设T (β) = β′，T (γ) = γ′，但一般△A′B′C′，过A′的中线A′D′并不平分∠A′，即β′与γ′一般不等。∴角平分线不是仿射不变性。

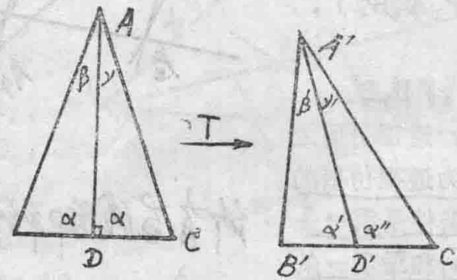


图 · 5 ·

在等腰△ABC中，设D是BC的中点，则 AD⊥BC，由于T (△ABC) = △A′B′C′(一般三角形)，D′仍为B′C′的中点。由于一般三角形中，中线 A′ D′ 并不垂直底边B′C′。得下题

1.4　两条直线垂直是不是仿射不变性？的回答。两直线垂直不是仿射不变性。

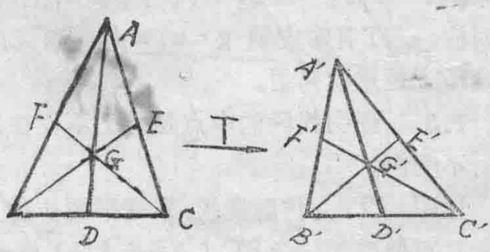


图 · 6 ·

1.5　证明三角形的中线和重心是仿射不变性。

证明　设仿射变换T将△ABC变为△A′B′C′，D，E，F分别是BC，CA，AB边的中点。由于仿射变换保留简比不变，所以D′=T(D)，E′=T(E)，F′=T(F)分别是B′C′，C′A′，A′B′的中点，因此A′D′，B′E′，C′F′是△A′B′C′的三条中线（图·6）。

设G是△ABC的重心，且G′=T(G)

∵G∈AD，由结合性得G′∈A′D′，又

∵(AGD)=(A′G′D′)　即

$$\frac{A'D'}{G'D'}=\frac{AD}{GD}=\frac{3}{1},$$ 同理可证：

$$\frac{B'E'}{G'E'}=\frac{C'F'}{G'F'}=\frac{3}{1}。$$

∴G′是△A′B′C′的重心。

1.6　证明梯形在仿射对应下仍为梯形。

证明　设在仿射对应下梯形ABCD（AB∥CD）与四边形A′B′C′D′相对应，由于仿射对应保持平行性不变，因此A′B′∥C′D′，所以A′B′C′D′为梯形。

1.7　证明两个全等矩形经过仿射变换为两个等积平行四边形。

证明　设T为仿射变换，$A_1B_1C_1D_1$与$A_2B_2C_2D_2$为两个全等矩形，其面积分别以S_1与S_2表示，则$S_1=S_2$。由于T保留平行性，所以

$T(A_1B_1C_1D_1)$=平行四边形$A'_1B'_1C'_1D'_1$，面积记为：S_1'；

$T(A_2B_2C_2D_2)$=平行四边形$A'_2B'_2C'_2D'_1$，面积记为：S'_2，且$S'_1=kS_1$，$S'_2=kS_2$。

$\because \dfrac{S'_1}{S'_2} = \dfrac{kS_1}{kS_2} = 1$，$\therefore S'_1 = S'_2$。

$\therefore A'_1B'_1C'_1D'_1$ 与 $A'_2B'_2C_2'D'_2$ 是等积的平行四边形。

1.8　经过A（-3，2）和B（6，1）两点的直线被直线$x+3y-6=0$截于P点，求简化（ABP）。

解　设P点的坐标为（x_0，y_0）

$$\because -(ABP) = \frac{AP}{PB} = \lambda\text{（分割比）。}$$

$$\therefore x_0 = \frac{-3+6\lambda}{1+\lambda},\qquad y_0 = \frac{2+\lambda}{1+\lambda},$$

$\because$P在直线 $x+3y-6=0$上，

$\therefore \dfrac{-3+6\lambda}{1+\lambda} + \dfrac{6+3\lambda}{1+\lambda} - 6 = 0$，化简得$\lambda=1$，即P是AB的中点，且（ABP）$=-1$。

1.9　证明直线$Ax+By+C=0$将两点P_1（x_1, y_1）和P_2（x_2, y_2）的联线段分成的比是$-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$。

证明　仿1.8 题证法。设分点为P（x_0，y_0），则分割比$\lambda = \dfrac{P_1P}{PP_2}$，

$\therefore x_0 = \dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y_0 = \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$。这里$\lambda \neq -1$，若$\lambda=-1$，即（$P_1P_2P$）$=1$这不可能。

$\because$P（x_0，y_0）在直线 $Ax+By+C=0$ 上，

$\therefore A\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} + B\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} + C = 0$，即

$Ax_1+By_1+C+\lambda(Ax_2+By_2+C)=0$

$$\therefore \lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}。$$

1.10　给定点A、B，作出点C使①$(ABC)=4$；②$(ABC)=-\frac{3}{4}$；③$(ABC)=-1$。

解　①$\because (ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{1}$，

$\therefore \frac{AC-BC}{BC} = \frac{3}{1}$，

即　$\frac{AB}{BC} = 3$。

$\therefore$C在AB延长线上，且$BC = \frac{1}{3}AB$。

②　$\because (ABC) = \frac{AC}{BC} = -\frac{3}{4}$，

$\therefore \frac{AC-BC}{BC} = -\frac{7}{4}$，即$\frac{AB}{BC} = -\frac{7}{4}$。

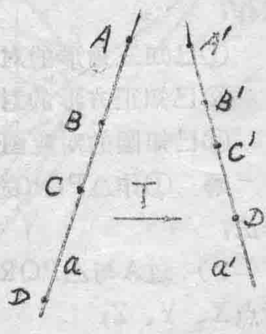
$\therefore$若将线段AB七等分，C在AB内部且距点A为三等分点处。

③$\because (ABC) = -1$，

$\therefore$ 点C为线段AB的中点。

1.11　证明一直线上二线段之比是仿射不变量。

证明　若直线a上两线段AB和CD经仿射变换T后与直线a'上的两段$A'B'$和$C'D'$对应（图·7）。



图·7·

$$\because \frac{AB}{CD} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CD} = \frac{A'B'}{B'C'} \cdot \frac{B'C'}{C'D'} =$$

$=\dfrac{A'B'}{C'D'}$·得证。

1.12 证明图形的对称中心是仿射不变性。图形的对称轴和对称平面是不是仿射不变性。

证明 设仿射变换T将中心对称图形F变为图形F′，点O是F的对称中心，A、B为图形F上关于点O对称的任意一对对称点。

设T（O）=O′，T（A）=A′，T（B）=B′。

∵T（F）=F′，由结合性，点A′，B′在图形F′上；由简比不变性，（ABO）=（A′B′O′）。所以F′是中心对称图形，因此图形的对称中心是仿射不变性。

如果点A、B关于直线l（平面π）对称，则线段AB⊥l（AB⊥π）。但仿射变换不保留角的度量，所以，当T（A）=A′，T（B）=B′，T（l）=l′（T(π)=π′）时，线段A′B′不一定垂直线l′（平面π′）。

1.13 给定透视仿射的对应轴g和一对对应点A、A′，求作：

①已知三角形的对应图形；

②已知正方形的对应图形；

③已知圆的对应图形（作足够多的点）。

解 ①作△PQR的对应图形（图·8）

作法：

1）过A与△PQR的三顶点P、Q、R的联线分别交g于点X、Y、Z；

2）联A′X，A′Y，A′Z；

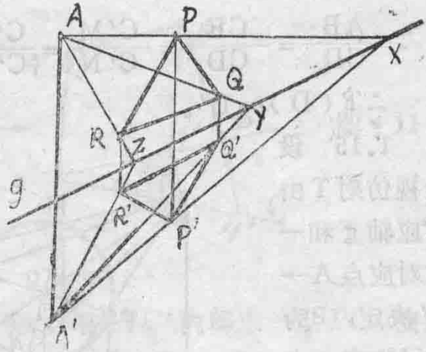
3）过P、Q、R，作直线与AA′平行分别交A′X，A′Y，A′Z于点P′、Q′、R′。则△P′Q′R′为△PQR的对应图

形。

② 求作正方形PQRS的对应图形，其对应图形是平行四边形P′Q′R′S′（图·9）。

③ 求作圆O的对应图形，其对应图形是椭圆。（图·10）。

②与③的作法与①的作法一样。

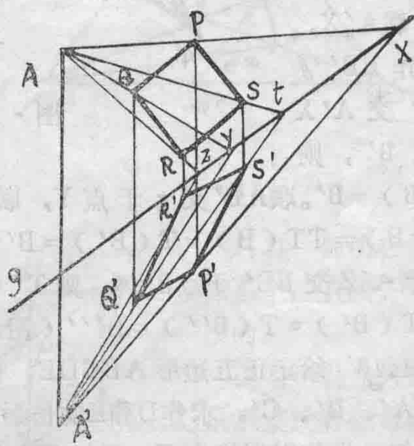


图·8·

1.14 给定一个梯形ABCD和△A′B′C′，设仿射T具有这样的性质：T（A）=A′，T（B）=B′，T（C）=C′，求作T（D）=D′。

解 设AB∥CD。由于平行性是仿射不变性，过B作BE∥AC交CD于E。

∴T（▱ABEC）=▱A′B′E′C′）。过C′任作一射线1，在1上取C′M=CE，MN=ED，联ME′，过N作ND′∥ME′交C′E′的延长线于D′，则D′为所求，



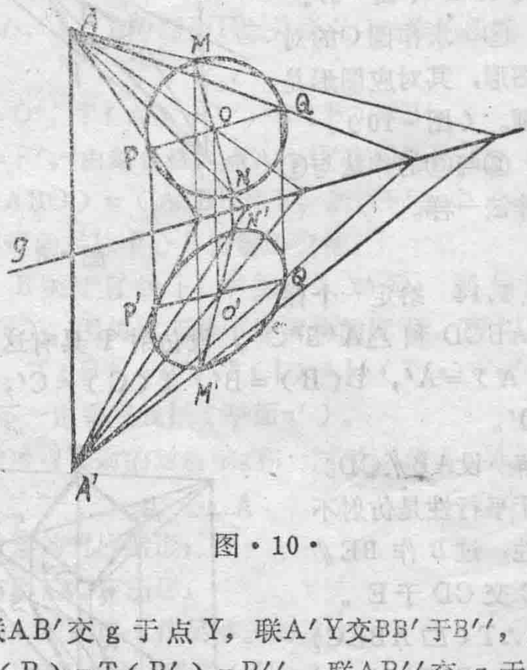
图·9·

即T（D）= D′（图·11）。

$\because \frac{AB}{CD}=\frac{CE}{CD}=\frac{C'M}{C'N}=\frac{C'E'}{C'D'}=\frac{A'B'}{C'D'}$，

∴T（D）= D′。

1.15 设透视仿射T由对应轴 g 和一对对应点 A→A′决定，B为一已知点，求作 T（B），T^2（B），T^3（B）。



图·10·

解：联AB交 g 于点X，联A′X，过B作 BB′∥AA′交 A′X于点 B′，则T（B）= B′。联AB′交 g 于点 Y，联A′Y交BB′于B″，则T^2（B）= TT（B）= T（B′）= B″。联AB″交 g 于点Z，联A′Z交 BB′ 于点B‴，则 T^3（B）= TTT（B）= = TT（B′）= T（B″）= B‴（图·12）。

1.16 给定正五边形 ABCDE，已知 A、B、C 的仿射像为A′、B′、C′，求作D和E的仿射像。

解 设仿射变换为 T，已知 T（A）= A′，T（B）= B′，T（C）= C′。在正五边形 ABCDE 中有 AC∥DE，

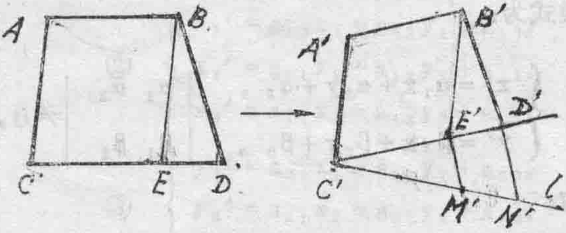


图 · 11 ·

$BD \parallel AE$。设 $AC \times BD = P$。在 $A'C'$ 内部求一点 P'，使满足（ACP）=（$A'C'P'$），则 $T(P) = P'$。在 $B'P'$ 的延长线上求一点 D' 使满足（BDP）=（$B'D'P'$），则 $T(D) = D'$。由于平行性不变，过点 D' 作 $D'E' \parallel C'A'$，过 A' 作 $A'E'' \parallel B'D'$ 使交 $D'E'$ 于点 E'，则 $T(E) = E'$。（图 · 13）

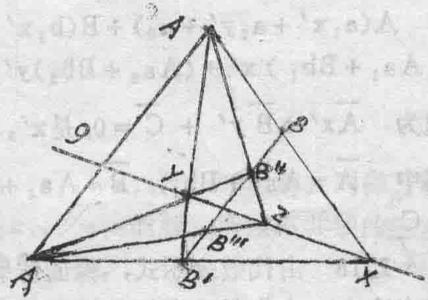


图 · 12 ·

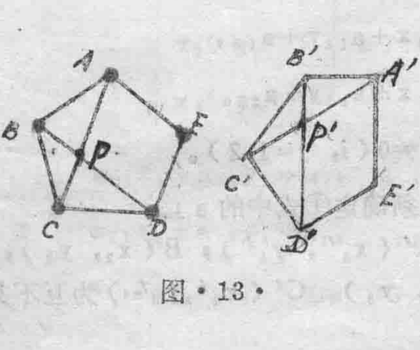


图 · 13 ·

1.17　证明在仿射坐标系下，直线方程是一次的。

证明　设在笛氏坐标系下直线方程为：

$$Ax + By + C = 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

(x, y)为笛氏坐标，(x', y')为仿射坐标。由笛氏到仿射的变换式为：

$$② \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_0, \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_0。 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

设其逆变换为：

$$③ \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_0, \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_0。 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

将③式代入①，得

$$A(a_1x' + a_2y' + a_0) + B(b_1x' + b_2y' + b_0) + C = 0,$$

$$(Aa_1 + Bb_1)x' + (Aa_2 + Bb_2)y' + Aa_0 + Bb_0 + C = 0,$$

记为 $\overline{A}x' + \overline{B}y' + \overline{C} = 0$，是$x'$，$y'$的一次式。

其中 $\overline{A} = Aa_1 + Bb_1$，$\overline{B} = Aa_2 + Bb_2$，$\overline{C} = Aa_0 + Bb_0 + C$。

1.18 由代数表示式，验证仿射几何基本定理：三对对应点决定一个仿射。

解 已知仿射变换式为

$$① \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}。 \end{cases}$$

$$D = |a_{ij}| \neq 0 \ (i, j = 1,2)。$$

要确定此仿射变换式，只须确定①式中的a_{ij}。

设$A(x_1, y_1)$，$A'(x_1', y_1')$；$B(x_2, y_2)$，$B'(x_2', y_2')$；$C(x_3, y_3)$，$C'(x_2', y_3')$为互不共

线的三对对应点，代入 ① 式得：

$$
② \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}, \\ x_2' = a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}, \\ x_3' = a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13}; \end{cases}
$$

$$
③ \begin{cases} y_1' = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}, \\ y_2' = a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}, \\ y_3' = a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23}。 \end{cases}
$$

$\because x_1'$、x_2'、x_3' 不全为 0，否则A′、B′、C′共线，同样 y_1'、y_2'、y_3'也不全为 0，又$\because$ A,B,C 三点不共线，

$$
\therefore \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,
$$

因此方程组②可决定 a_{11}、a_{12}、a_{13}唯一一组解。同样方程组③可决定唯一组 a_{21}、a_{22}、a_{23}的解。所以不共线的三对对应点唯一的决定一个仿射变换。

现证明变换式①的系数行列式不等于零。

$$
\because \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} & a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} & 1 \\ a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13} & {}_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} & 1 \\ a_{11}x_3 + a_{12}y_3 + a_{13} & a_{21}x_3 + a_{22}y_3 + a_{23} & 1 \end{vmatrix}
$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=D\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

由于A、B、C不共线；A′、B′、C′不共线，因此

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$\therefore\ D=|a_{ij}|\neq 0$.

1.19 从仿射变换式验证共线三点的简比是仿射不变量。

解 设上题表示的仿射变换式①使共线三点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$变为共线三点$A'(x'_1, y'_1)$，$B'(x'_2, y'_2)$，$C'(x'_3, y'_3)$。

$$设\lambda=(ABC)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}. \qquad ①$$

$$(A'B'C')=\frac{x'_3-x'_1}{x'_3-x'_2}$$

$$=\frac{(a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13})-(a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13})}{(a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13})-(a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13})}$$

$$=\frac{a_{11}(x_3-x_1)+a_{12}(y_3-y_1)}{a_{11}(x_3-x_2)+a_{12}(y_3-y_{21})}。 \qquad ②$$

由①式得：$x_3 - x_1 = \lambda(x_3 - x_2)$，$y_3 - y_1 = \lambda(y_3 - y_2)$，代入②式得：

$$(A'B'C') = \frac{\lambda a_{11}(x_3 - x_2) + \lambda a_{12}(y_3 - y_2)}{a_{11}(x_3 - x_2) + a_{12}(y_3 - y_2)}$$

$= \lambda = (ABC)$。

1.20 欧氏几何里的圆在仿射变换下变成什么图形？

解 不失一般性，设圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2 \ (r > 0)。$$

将仿射变换式

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}, \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}。 \end{cases} \quad |a_{ij}| \neq 0,$$

代入圆方程得：

$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})^2 + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})^2 = r^2$，

或 $(a_{11}^2 + a_{21}^2)x'^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})x'y' + (a_{12}^2 + a_{22}^2)y'^2 + 2(a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23})x' + 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23})y' + a_{13}^2 + a_{23}^2 - r^2 = 0$。

这方程是圆在仿射变换下的图形的方程。

$$I_1 = (a_{11}^2 + a_{21}^2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2) > 0;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 > 0;$$