FEIXIANXINGXITONG
LILUN JI YINGYONG

非线性系统
理论及应用

黄松清　编著

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

非线性系统理论及应用

黄松清　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

长期以来非线性理论的研究取得了大量的成果，但是这些研究成果似乎并没有在实际工程中取得应用。原因也许在于，从事研究的人对工程实际并不十分了解。本书不注重理论的过程推导，而在于分析理论的应用背景，以及在实际工程中的应用。

本书首先归纳总结了非线性领域取得的成果，并以通俗的语言介绍；接着从工程实际出发，研究实际工程对象稳定控制问题，尤其注重实际对象非线性特性的分析，针对实际对象的特征，介绍稳定性控制的设计方法，推导了多种基于李雅普诺夫稳定性辅助函数的构造方法，并通过实例介绍具体的应用过程及应用中的注意事项；从泛函中的范数入手，介绍了非线性系统的输入输出特性描述，尤其注重现代非线性理论中有关李雅普诺夫稳定性与波普夫绝对稳定性间的内在联系，介绍了詹姆斯的小增益定理及应用，电路系统的无源性与系统稳定性间的内在联系。同时介绍非线性系统的近似分析，即注重系统基波响应，推导出若干非线性系统的类似传递函数的响应函数。然后以实际应用为主，介绍了非线性控制设计的主要手段以及利用反馈控制来设计控制系统的方法。最后以具体过程实例分析非线性理论的应用。

本书适合电气工程、控制科学与工程及相关层面的研究生和工程技术人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

非线性系统理论及应用 / 黄松清编著. —成都：西南交通大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-5643-2425-4

Ⅰ.①非… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①非线性系统（自动化）Ⅳ.①TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 153060 号

非线性系统理论及应用

黄松清 编著

*

责任编辑 李芳芳
特邀编辑 李庞峰
封面设计 本格设计
西南交通大学出版社出版发行
四川省成都市金牛区交大路 146 号 邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564
http: //press.swjtu.edu.cn
成都蓉军广告印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 185 mm × 260 mm 印张: 33.5
字数: 836 千字
2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-2425-4
定价: 69.00 元

前　言

控制理论与控制工程的飞速发展，以及在系统的稳定性、鲁棒性辨识等方面的研究，形成了线性系统理论、非线性系统理论、最优控制、随机控制理论及自适应等几个既联系又有特点的分支，但这些研究结论很多是从数学的角度出发，非常晦涩难懂，影响了这些研究成果的推广应用。

对于非线性系统及非线性控制器的研究，作者从 1998 年开始到现在，一直在进行，没有放弃！尤其是针对运动控制系统的非线性动态反馈控制。目前，已经具有一个团队，延续及继承这方面的研究。在写作时，研究生汪洋、胡寅峰等参与了课题的研究；研究生徐瑶、徐丽丽、孙浩祺、刘汉阳等参与了书稿的编辑整理工作，在此表示感谢。

从课程结构讲，本书分为六章。

第 1 章从工程实际出发，研究实际工程对象稳定控制问题，尤其注重实际对象非线性特性的分析，针对实际对象的特征，介绍稳定性控制的设计方法，推导了十几种基于李雅普诺夫稳定性辅助函数的构造方法，并通过实例介绍具体的应用过程及应用中的注意事项。

第 2 章从泛函中的范数入手，介绍了非线性系统的输入输出特性描述，尤其注重现代非线性理论中有关李雅普诺夫稳定性与波普夫绝对稳定性间的内在联系，介绍了詹姆斯（Zames）的小增益定理及应用，电路系统的无源性与系统稳定性间的内在联系。

第 3 章介绍非线性系统的近似分析，即考虑系统的惯性，注重系统基波响应，推导出若干非线性系统的类似传递函数的响应函数。

第 4 章介绍了非线性控制设计的主要手段，即变结构控制，这是利用控制器的非线性来改善系统响应的方法，讨论了变结构控制滑模面的设计方法以及滑模面上系统的稳定性，同时针对运动控制系统中执行机构为直流电机、三相交流异步电机、三相同步电机分别介绍了滑模控制系统的设计方法。

第 5 章首先介绍了微分几何的基本知识，但没有做过多的理论推导，主要介绍基本原理及理论应用的前提条件，尤其通过三节的篇幅介绍了微分几何反馈控制在传动系统中的应用，即控制普通异步电机、控制多台异步电机的同步运行、在同步发电机中的应用。

第 6 章介绍了逆系统的基本原理、应用方法，通过三相交流异步电机这个特殊对象，介绍了逆系统理论的应用。

在成书的过程中，深深感觉到没有母校西南交通大学、南京工学院、东南大学的辛勤培

养，为我打下扎实的基础；没有多年下海对生产一线实况的了解，就不可能目标明确地写好这本书，发自内心地表示感谢！

感谢西南交通大学出版社对本书出版的大力帮助！从决定出版此书，出版社多次沟通，提出了很多有建设性的意见，在此表示感谢！

由于作者能力有限，疏漏之处在所难免，恳请读者及相关专家提出宝贵意见！来信请寄：sqhuang@ahut.edu.cn，不胜感激！

黄松清

2013 年 5 月于安徽工业大学电气信息学院

目　录

第 1 章　基于稳定性分析的非线性控制

在自然科学和工程技术中，很多现象不能采用线性模型描述，如摆的大幅度摆动，继电器、二极管的特性，自激振荡电路的机理等。从逻辑上说，非线性就是不满足线性叠加原理的性质。但人们真正关注的，是仅用线性理论所不能解释的那些现象，统称为非线性现象。

每一门学科有它自己的非线性问题，并形成各自的非线性学科分支。非线性科学不是各门非线性学科的简单综合，它研究出现在各种具体的非线性现象中的那些共性。这些共性有的已可以用适当的数学工具描述，表现为一些数学定律，但有的还难找到相应的数学描述，没有严格的数学理论。非线性科学着眼于定性的规律，主要用于自然科学和工程技术，对社会科学的应用一般还局限在类比和猜测，难以有实质性的定量结果。

非线性科学中较成熟的部分是非线性动力学，19 世纪末法国著名数学家 H.庞加莱（Jules-Henri Poinear）的两项工作——常微分方程的定性理论和天体运动中的定量计算使他成为非线性科学最早的代表人物。20 世纪前叶，无线电技术促使非线性振动理论的诞生，继承和发展了庞加莱的成果。20 世纪 60 年代后，大气科学和流体力学中利用计算机进行的数值研究，分析力学中数学理论的进展，以及统计物理中远离平衡态系统性态的研究等，促进了在横向联系上发现并研究各类不同系统由于非线性而导致的共性，即非线性科学。

一般认为非线性科学应包括以下 3 个主要部分：孤立波、混沌、分形。孤立波是在传播中形状不变的单波，有些孤立波在彼此碰撞后仍能保持原形，带有粒子的性质，称为孤立子，它们在不少自然现象和工程问题中遇到，如光导纤维通信技术的改进需要对光学孤立子性质有进一步的了解。混沌是一种由确定性规律支配却貌似无规的运动过程，近几十年通过数值实验、物理观测和数学分析得到确认并在自然和工程系统中找到许多有趣的例子。分形是一个几何概念，它由像云彩、海岸线、树枝、闪电等不规整但具有某种无穷嵌套自相似性的几何图形抽象概括得出。按照这种理论，例如可测出某一段海岸线可能是 1.32 维的分形。上述内容在一个具体的非线性课题里又往往是联系着的。例如，耗散系统的混沌过程往往可用相空间里的一个分形来描述。又如，近代前沿课题图形动力学中，某一系统的整体空间图形可能是分形，而局部的时间动态又要用混沌过程刻画。再如，在分岔理论中，要考虑系统怎样由于其参量改变而导致性态发生定性的变化，它除了引用传统的平衡、振动、稳定性等概念外，也考虑涉及混沌动态和分形图形的分岔问题。

现代科学技术的发展、各学科之间的交叉融合正在改变着传统学科之间的界限和研究

方法。由于基础学科和应用学科的发展，它们在经历了“线性化”一个富有成果的发展时期后，必然地要提出研究非线性问题。通过对各学科中非线性问题的深入研究和学科之间的交叉，逐步发现了存在于不同学科、具有共性的非线性现象，从而开始形成“非线性科学”这一新兴交叉学科，它所研究的是广泛存在于各学科中的非线性相互作用所提出的共性问题。

非线性科学于 20 世纪 60 年代兴起后得到了快速的发展。从 20 世纪 90 年代起，非线性科学进入学科内涵基本确定后的稳定发展时期，在对一些问题进行深入研究、将有关成果应用到其他学科的同时，也出现了非线性科学中新的研究方向。

我国非线性科学的研究尽管起步稍晚，但由于及时瞄准跟踪国际前沿，并注意自己的研究特色，经过国家攀登计划“八五”、“九五”和国家“973 计划”期间近十五年的研究，我国的非线性科学研究有了很大的发展，水平也有了很大的提高，在全国已经形成了一个比较稳定的非线性科学研究队伍。

许多控制系统都存在非线性，例如随动系统的齿轮传动具有齿隙和干摩擦等，许多执行机构都不可能无限地增加输出功率，这就存在饱和非线性。这些例子中的非线性是由于系统的不完善而产生的，这种不完善在实际是不可避免的。有些非线性是系统动态特性本身所固有的。又如高速运动的运动系统中的机械手各关节之间的哥氏力[科里奥利力（Coriolis Force）]的耦合，这种耦合就是非线性的；再如对于单机无重大系统，其输出有功功率 P_{em} 是发电机功角的正弦函数，即

$$P_{em}=mUI\cos\varphi=m\frac{E_0U}{X_t}\sin\delta$$

式中，δ 为功角；E_0 为电动势；U 为发电机的相电压；m 为电机相数；X_t 为电抗。

由此表达式可以看出，发电机的输出有功功率 P_{em} 是功角的正弦函数，属于超越函数，当然为非线性的。要研究发电机在电力系统中的作用，就必须考虑这种非线性因素。

当然，如果系统是线性系统，但是为了得到系统较为优良的控制特征，也可以人为地引入非线性控制器，如 Bang-Bang 控制器等。

一般讲，非线性是自然界普遍存在的一般动力学系统，线性系统只是其中的特殊例子。非线性千差万别，没有统一、普遍使用的处理方法。

相对于非线性系统，线性系统的处理则比较简单，因为线性系统一般可以用线性常微分方程描述，而求解线性常微分方程目前比较方便，人们的研究也较多，处理较成熟，所以基于线性系统的分析、综合理论取得了较大的成就（请参阅郑大钟的《线性系统理论》)。与此相比较，用来描述非线性系统的非线性微分方程（或偏微分方程）一般只有在个别情况下才有解析解，这也给非线性系统的研究带来重重困难。

非线性系统（Nonlinear System）和线性系统（Linear System）之间有以下典型特征：

① 对于线性系统，可以应用叠加原理。当电路中有几个源（可能是电压源或电流源）共同起作用时，可以使其中的一个源单独工作，其他源不工作（将不工作的电压源短路，保留其内阻；不工作的电流源开路，保留其内阻），求出这一个源工作时在某电阻上产生的电流；再让第二个源工作，求出这个源工作时产生的电流；依此类推，让每一个源工作一次，这些电流相加就是所有的源共同工作时的电流。由于线性系统可以采用叠加原理，故其分析大为

简单。另外，由于线性系统的性质使然，它在大信号、小信号的作用下的结果是一样的；对于非线性系统，由于不能使用叠加原理，使其分析大为复杂，大信号作用与小信号作用的结果可能大相径庭，完全不一样。

② 对于非线性系统，一般来说不能求得完整的解（Closed Form Solution，CFS），目前的数学工具远远不够。由此对于非线性系统的分析，往往只能局限在对非线性系统的运动做一些估计，即对系统的稳定性或动态做一些估计。

③ 稳定性。在线性控制系统中，针对传递函数描述的线性时不变控制系统，研究了线性控制系统的外部稳定性；在线性系统理论中，对于由状态空间描述的线性系统，研究过夏天的内部稳定性，通过引入系统的振子，研究了内部稳定的特征，稳定性是线性控制系统的基本要求。非线性控制系统的稳定性比较复杂，有时甚至不能判断，而且非线性控制系统的稳定性甚至与初始条件有关，在运动形式上，线性现象一般表现为时空中的平滑运动，并可用性能良好的函数关系表示，而非线性现象则表现为从规则运动向不规则运动的转化和跃变。对于非线性系统，往往要使用更多、更为具体的稳定性，应该说在非线性系统中，稳定性的定义更为严格，本书会研究非线性系统的李雅普诺夫意义下的稳定、渐近稳定、一致稳定、指数稳定、局部稳定、全局稳定、内部稳定、外部稳定、李雅普诺夫意义下不稳定等。

④ 初始条件。线性系统的系统运行及性能指标与初始条件的偏移无关，但是对于非线性控制系统，有时初始条件的微小变化，都有可能出现非常大的变化。美国麻省理工学院教授、混沌学开创人之一伊・恩・洛伦兹（E.N. Lorenz）在美国科学发展学会第 139 次会议上发表了论文《蝴蝶效应》，提出一个貌似荒谬的论断：在巴西一只蝴蝶拍打几下翅膀，可能两周后在美国会引起一场龙卷风，并由此提出了天气的不可准确预报性。

⑤ 与稳定性相对应的一个概念就是吸引性。吸引性是系统运行的一种特性，与稳定性接近但不等价。系统是具有吸引性的，可以是稳定的也可以是不稳定的。这概念在非线性系统稳定性的介绍中给出严格定义。

对于线性系统，其运动往往存在这么几种可能性；衰减的或发散的振荡，或不振荡运动，或临界的振荡等，这些现象都可以在二阶系统中得到模拟。而非线性系统的运动要复杂得多，可以是振荡或不振荡的过程，而这种振荡严格意义上不一定能用调和函数来表示；可以是稳定的或不稳定的，这种稳定可以是全局的，也可以是局部的；可以出现振荡的极限环，而且这种极限环可能出现多个；还有可能出现混沌（Chaos）现象，既非稳定的极限环，又非无限的发散，如此种种，说明非线性系统呈现的现象比线性系统要复杂得多。

在工程实际中，一般都存在各种非线性，其中有的非线性对系统的运行是不利的，应该设法克服其有害影响；而有的非线性是人为引入的，可以增加系统抗干扰的能力，在设计时应该加以考虑。近年来从事控制的工程师及研究人员对非线性的研究予以很大的关怀，而且近年对于非线性的研究也积累了许多应用成果。但是，由于非线性系统的复杂性及特殊性，这些研究成果远远不能满足实际需要，有待研究的问题还很多。近年来由于工程实际的需要以及大家对控制系统的性能要求越来越高，研究者对于非线性理论给予很大的关注，希望取得新的进展。

需要指出的是在自然界，非线性系统是普遍存在的，线性系统只是其特例，或者说是非线性系统某些性能的退化，但这绝对不能贬低线性系统理论的重要性。目前线性系统理论仍然是非线性系统理论研究的基础。许多非线性系统的极限或临界情况即线性系统，也

有许多非线性系统是由线性系统组合、引申或改造而来的。因此，研究非线性系统理应首先要对线性系统理论有较深入的了解。在实际工程中，许多非线性系统的分析方法要借助于线性系统理论的成果。

非线性系统的典型特征：

① 多平衡点；

② 极限环（Limit Cycles）；

③ 分岔（Bifurcation）；

④ 混沌（Chaos）；

⑤ 复杂的动力学特性。

一、非线性控制系统的定性分析

很多工程实际问题都具有非线性，为了简化分析而忽略了一些因素，从而使系统呈现为线性，实际上线性只是我们常见的非线性的一种特例，或者说是非线性系统的退化。

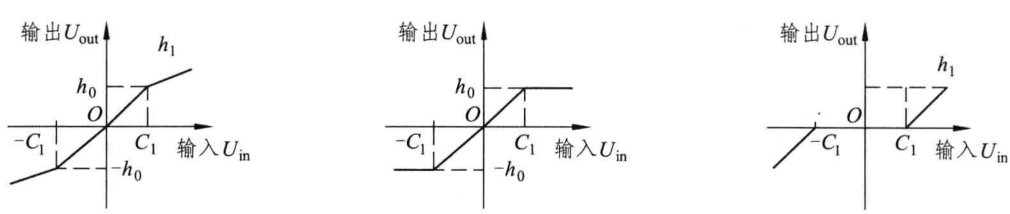
二、常见工程实际中的非线性

为了能够非线性，下面将工程上常用的非线性环节进行归类。对于电类系统，常见的非线性有：饱和非线性、分段线性非线性、失灵非线性、间隙非线性、继电非线性、死区非线性、滞环非线性、同时具有死区及滞环非线性的非线性。

1. 饱和非线性、分段线性非线性、失灵非线性特性

分段线性的非线性特性如图 1.1.1（a）所示。h_0表示第一线性曲线的斜率；h_1表示第二线性曲线的斜率；C_1表示两线性曲线发生变化的点。对于这样的特性，可以用下面的式子来表示：

$$\begin{cases} u_{\text{out}}(m) = h_0 u_{\text{in}}(m) & |u_{\text{in}}(m)| < C_1 \\ u_{\text{out}}(m) = h_0 C_1 + h_1[u_{\text{in}}(m) - C_1] & u_{\text{in}}(m) \geqslant C_1 \\ u_{\text{out}}(m) = -\{h_0 C_1 + h_1[u_{\text{in}}(m) - C_1]\} & u_{\text{in}}(m) < -C_1 \end{cases}$$



(a) 分段线性非线性　　(b)饱和非线性　　(c)失灵非线性

图 1.1.1 常见工程实际中的非线性

如果$h_1 = 0$，就是图 1.1.1（b）所示的饱和非线性；$h_0 = 0$就是图 1.1.1（c）所示的失灵非线性。分段线性非线性子程序可以按照图 1.1.2 所示的流程图编制。

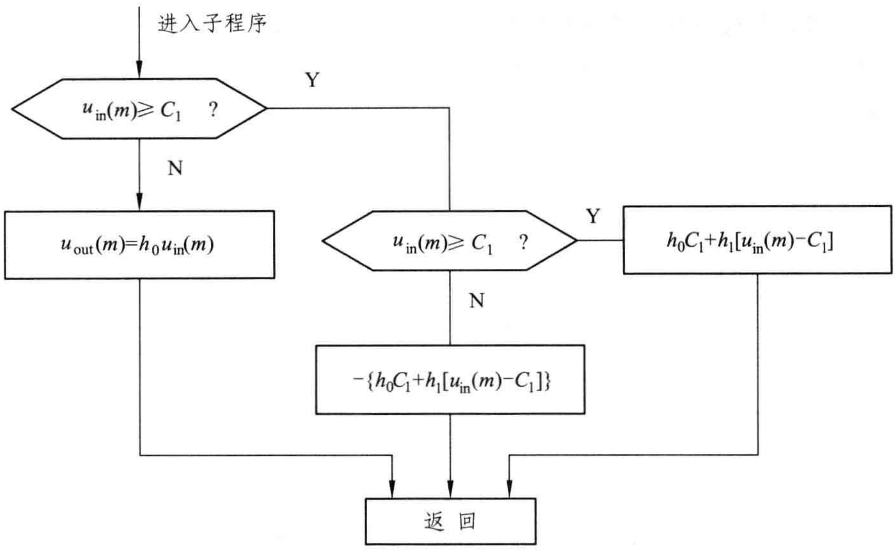


图 1.1.2　分段线性非线性子程序流程图

2. 间隙非线性特性

间隙非线性的输入输出特性如图 1.1.3 所示。设 $u_{in}^0(m)$ 为上一次的输入，$u_{out}^0(m)$ 为上一次的输出，则间隙非线性的特性可以表示为

$$\begin{cases} u_{out}(m)=u_{in}(m)-C_1 & u_{in}(m)>u_{in}^0 \quad \text{and} \quad u_{out}^0<u_{in}(m)-C_1 \\ u_{out}(m)=u_{in}(m)+C_1 & u_{in}(m)<u_{in}^0 \quad \text{and} \quad u_{out}^0>u_{in}(m)+C_1 \\ u_{out}(m)=u_{out}^0(m) & \text{other} \end{cases}$$

上面的第一种情况是工作在右边的特性，第二种情况是工作在左边的特性，第三种情况是工作在中间的过渡特性。

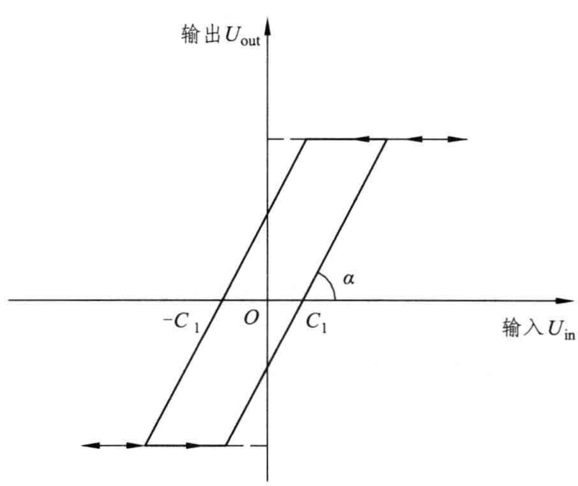


图 1.1.3　间隙非线性

3. 继电及具有死区的继电非线性特性

如图 1.1.4 所示，如果对于图（b）的特性中，$h_1 = 0$，就是图（a）的特性。因此，可以把图（a）看作是图（b）的特例，子程序仅仅需要按照图（b）的要求来考虑。

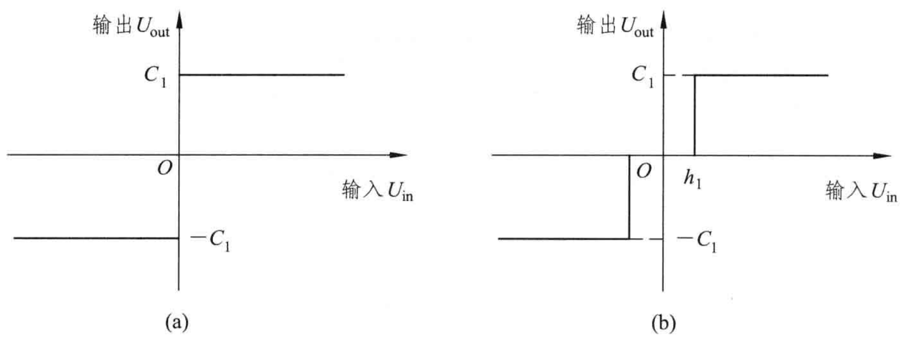


图 1.1.4　继电及具有死区的继电非线性特性

4. 具有滞环的继电非线性特性

如图 1.1.5 所示，具有滞环的继电非线性特性可以用下面的函数来表示：

$$\begin{cases} u_{out}(m) = 0 & u_{in}(m) > u_{in}^{0}(m) \quad \text{and} \quad u_{in}(m) \geqslant h_1 \\ u_{out}(m) = -C_1 & u_{in}(m) \leqslant -h_1 \\ u_{out}(m) = u_{out}^{0}(m) & \text{other} \end{cases}$$

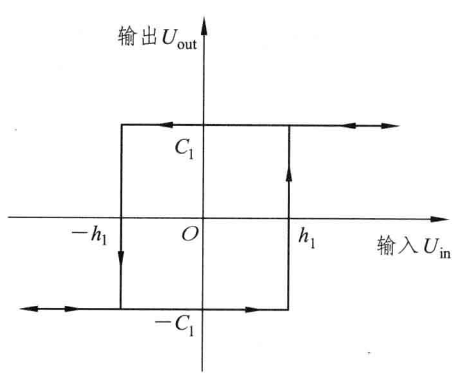


图 1.1.5　具有滞环的继电非线性特性

5. 具有死区及滞环非线性的继电非线性特性

电力电子在运动控制系统（电力传动系统）的应用过程中，往往都是采用六功率开关管的模式工作，如图 1.1.6 所示。

假如逆变器工作在纵向换流，即采用 180°导通型，这样为了能够避免同一桥臂上、下开关管的直通，就必须在两个管子间设置都不工作的区域，这就是死区（Deadtime）。

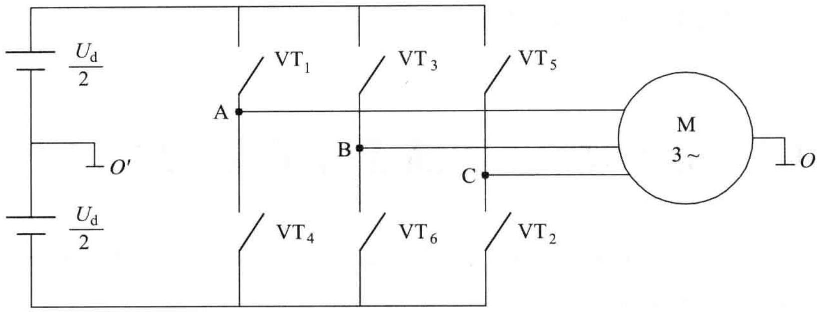


图 1.1.6　逆变器-三相交流异步电动机调速系统主电路原理图

那么死区的实质是什么？在导通的时间上，要求上、下桥臂的两个功率管不能有同时导通的时间，当然不能同时导通的时间长短与功率开关管的开关时间有关。

滞环的设置也是工程需要。如在电力系统继电保护中起执行作用的继电器，就必须具有这种特性。否则，继电器就会不停地跳动，无稳定点。现代交流调速系统中，具有电流滞环的电压型变频器控制的传动系统得到了广泛的应用。也就是讲，滞环控制系统具有非常好的工业应用背景。

具有死区与滞环非线性的继电非线性特性如图 1.1.7 所示。

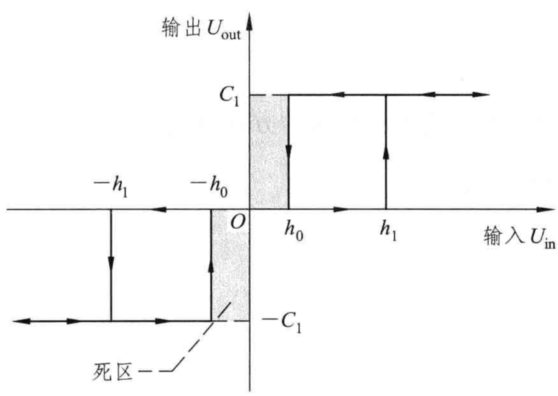


图 1.1.7　具有死区及滞环非线性的继电非线性特性

这种特性的描述比较复杂：

当 $\dot{u}_{in}(m) > 0$ 时，

$$u_{out}(m) = C_1\,[\,u_{in}(m) > h_1\,,\ \text{or}\ \ u_{in}(m) > h_0 \text{ 且 } u^0_{out}(m) = C_1\,]$$

$$u_{out}(m) = 0\,[\,-\ h_0 < u_{in}(m) < h_1\,,\ \text{or}\ \ -\ h_1 < u_{in}(m) < h_1 \text{ 且 } u^0_{out}(m) = 0\,]$$

$$u_{out}(m) = -C_1\,[\,u_{in}(m) < -\ h_0\,]$$

当 $\dot{u}_{in}(m) < 0$ 时，

$$u_{out}(m) = C_1\,[\,u_{in}(m) > -h_0\,]$$

$$u_{out}(m) = 0\,[\,-h_1 < u_{in}(m) < h_0\,,\ \text{or}\ \ -h_1 < u_{in}(m) < h_1 \text{ 且 } u^0_{out}(m) = 0\,]$$

$$u_{out}(m) = -C_1\,[\,u_{in}(m) < -h_1\,,\ \text{or}\ \ u_{in}(m) > -h_0 \text{ 且 } u^0_{out}(m) = -C_1\,]$$

可以根据上面的条件，用相应的编程语言写出子程序。

1.1 基于数学方程描述的非线性控制系统

对于自然界存在的非线性系统，常用的描述方法是微分方程（不是常微分方程）或非线性算子方程，这两种方法各有特点，下面分别加以介绍。

相当广泛存在的一类非线性系统可以用 n 阶常微分方程来描述，即

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}=h\left[t,y(t),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}},u(t)\right],\quad t\geqslant 0 \tag{1.1.1}$$

其中，$u(t)$ 为系统的输入量；$y(t)$ 为系统的输出变量。定义：

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \quad\vdots \\ x_n(t)=\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} \end{cases}$$

则式（1.1.1）可以改写为 n 个一阶方程组成的方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=x_2(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=x_3(t) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t}=x_n(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t}=h[t,x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),u(t)] \end{cases} \tag{1.1.2}$$

如果定义向量 $\boldsymbol{x}(\cdot)$ 为正实数域中的 n 维向量，即

$$\boldsymbol{x}(\cdot):\mathbf{R}_{(+)}\to\mathbf{R}^n$$

同时定义非线性映射（函数）f:

$$f:\ \mathbf{R}_{(+)}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$$

是时间（t）、n 维状态、激励函数 u（t）的函数，则可以得到

$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{f}(t,x,u)=[x_2,x_3,\cdots,x_n,h(t,x_1,x_2,\cdots,x_n,u)]^{\mathrm{T}}$$

由于第二维状态变量 $x_2(t)$ 包含了第一维信息，故在非线性映射 f 的变量中不包含第一维 $x_1(t)$ 的信息，但作为非线性映射的输出函数 h 要包含全部信息。

这样，方程（1.1.2）可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=f[t,x(t),u(t)]\,,\quad t\geqslant 0 \tag{1.1.3}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量；$x_1\sim x_n$ 为状态分量。

在上面的推导中都是假设输入激励函数 $u(t)$ 为单变量，如果系统的输入函数中存在多维，式（1.1.3）还是可以用的，只不过 $u(t)$ 为向量。

在本书中，用式（1.1.3）描述一般非线性系统。

针对式（1.1.3）表示的非线性控制系统，一般而言，希望对于任一输入激励函数 $u(t)$，存在下列条件：

① 式（1.1.3）至少存在一个解，即解决解的存在性；

② 式（1.1.3）只存在一个解，即解决解的唯一性；

③ 对于整个时间半轴，即 $t\in[0,\infty)$，式（1.1.3）只存在一个解；

④ 对于整个时间半轴，即 $t\in[0,\infty)$，式（1.1.3）只存在一个解，同时这个解与初值 $x(0)$ 存在连续变化的关系。

当然，这些要求是为了工程实际的需要而提出的，实际中遇到的非线性问题，可能是不能满足这些要求，要具体情况具体对待。在实际工作中只有映射 f 进行严格的限制才能满足上列假设条件。从下面的例题解析，可以看出此问题。

反例 1.1.1

对象描述：　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2x(t)}$，　$t\geqslant 0$

初始条件：　$x(0)=0$

对反例 1 的常微分方程进行求解，得到相同的两个解：

$$x(t)=t^{1/2}\ \text{和}\ x(t)=-t^{1/2}$$

这说明上面的强制条件①成立，但条件②不成立。即解的存在性没问题，但解的唯一性不存在。

反例 1.1.2

对象描述：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1+x^2(t)$，　$t\geqslant 0$

初始条件：$x(0)=0$

可以发现，反例 2 在区间 $[0,1)$ 上存在唯一解，即

$$x(t)=\tan(t)$$

但在区间 $[0,\infty)$ 不存在连续可微的解 $x(t)$。

此例说明上面的强制条件①、②成立，但条件③不成立。对于整个时间半轴，即 $t\in[0,\infty)$，式（1.1.3）只存在一个解。这个条件不满足。