普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

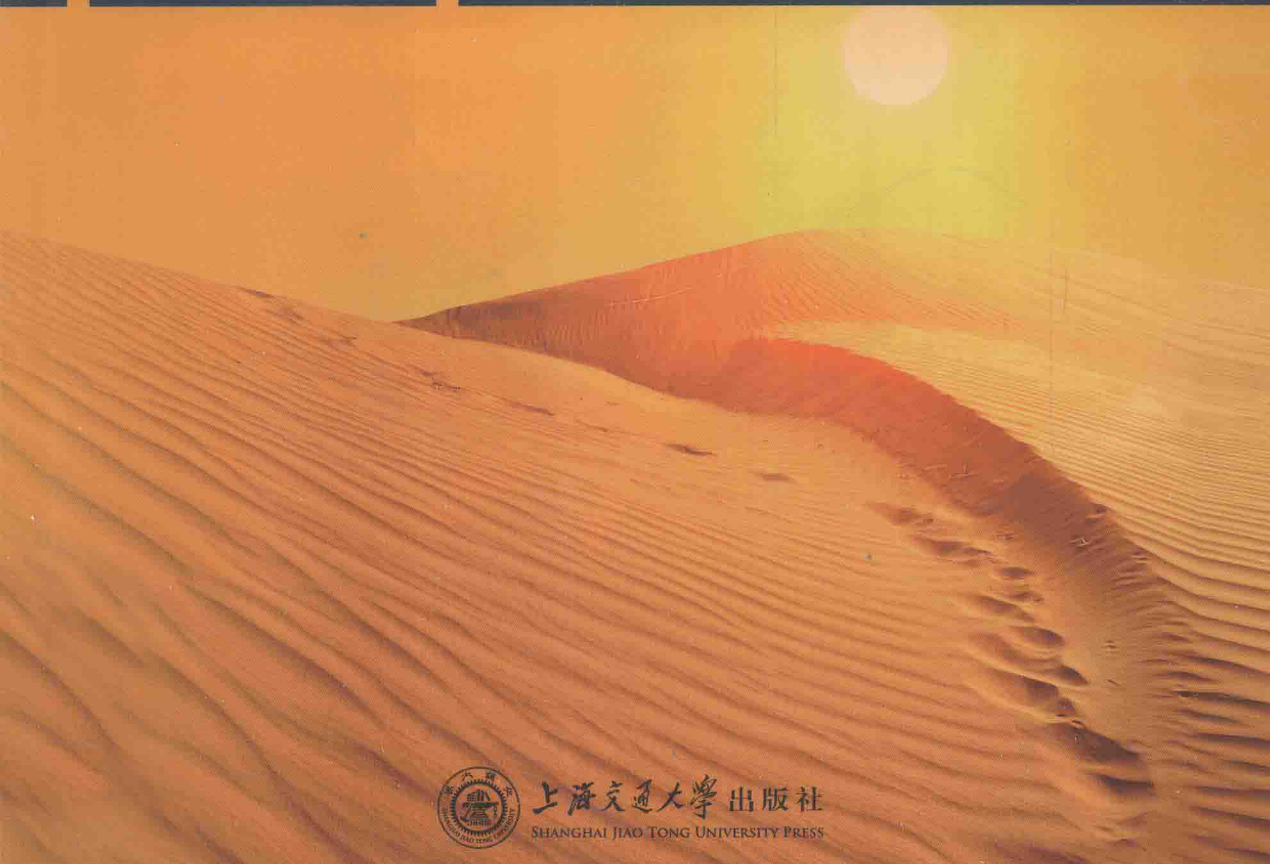
Nucleus

新核心

理工基础教材

高等数学证明题解题方法与技巧

李重华　编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育"十二五"重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus

新核心

理工基础教材

高等数学证明题

解题方法与技巧

李重华　编

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书由上海交通大学数学系李重华教授根据多年教学经验和实践编写而成.本书内容简练,重点突出,用各种例题演示证明题的解题方法与技巧.全书内容包括函数,极限与连续,导数与微分中值定理,一元函数积分,多元微积分,级数等.

本书可作为高等院校工科各专业的高等数学参考书,也可作为综合性大学和师范院校工科专业的参考书.

读者联系邮箱:science@press.sjtu.edu.cn

图书在版编目(CIP)数据

高等数学证明题解题方法与技巧/李重华编.—上海:上海交通大学出版社,2013
ISBN 978-7-313-09580-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第073156号

高等数学证明题解题方法与技巧
李重华 编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码200030)
电话:64071208 出版人:韩建民
上海交大印务有限公司印刷 全国新华书店经销
开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:13 字数:228千字
2013年9月第1版 2013年9月第1次印刷
印数:1~2 030
ISBN 978-7-313-09580-0/O 定价:26.00元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话:021-54742979

前　言

编者在上海交通大学执教三十余年，在教学过程和与学生接触过程中，发现学生对高等数学证明题目总不知如何下手，或易产生畏难情绪.

多年来编者一直有一个愿望，在有生之年编写一本名曰“高等数学证明题解题方法与技巧”的书，将编者解题心得通过大量典型题目的分析与证明展现在读者面前，使之获益.

编者花了多年时间收集大量有代表性的考题与习题(共计 226 题)，把如何证明的道理和思路进行分析、说明清楚并作出解答，让读者掌握证题要点. 阅读本书时，先要静下心来，冷静地从分析思路开始，仔细思考，抓住证明的结构及脉络，然后阅读证明部分，才有所获. 应记住的是不能用演算计算题的心态去读本书. 若读一遍尚不能领悟，不要心急，不要放弃，再读一遍，细心领会，解题能力一定会有所提高.

编者所收集的资料，主要是来自如下渠道：上海高校的考题、硕士研究生入学试题、编者参加编写的《高等数学习题集》(上海交通大学学生使用)、编者主编的《高等数学习题分析》和《上海交通大学高等数学竞赛试题精解》、[苏] 吉米多维奇著《数学分析习题集》、[苏] 肯杰尔著《高等数学习题集》、[美] 斯皮瓦克著《微积分补充题解》、[日] 矢野健太郎著《微分》和《积分》、[日] 田岛一郎著《微分积分》等著作以及台湾清华大学、台湾交通大学、台湾大学的试题.

限于编者水平，书中存在的错误与不足之处，敬请同仁与读者批评指正.

李重华于上海交通大学
2012 年元月

目　录

1　函数 …… 1

2　极限与连续 …… 11

3　导数与微分、中值定理 …… 52

4　一元函数的积分 …… 109

5　多元微积分 …… 153

6　级数 …… 188

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

1 函　　数

1.1 主 要 内 容

1.1.1 函数的定义

对于数集 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则 f，总有一个确定的数值 y 与之相对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$, $x \in D$.

变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量，x 和 y 的关系称为函数关系.

自变量取值的数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，记作 D_f；变量 y 构成的数集 R 称为函数 $f(x)$ 的值域，记作 R_f.

由函数的定义可见，此定义存在两个要素：

(1) 函数的定义域；

(2) 确定 x 与 y 之间的对应法则.

1.1.2 函数的表示法

(1) 解析表示法；

(2) 表格表示法；

(3) 几何表示法；

(4) 文字表示法.

1.1.3 函数的性质

(1) 奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 对称于原点，若对任何 $x \in D_f$ 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 单调性：设有函数 $y=f(x)$, $x \in D_f$ 若对于任意两点 x_1, $x_2 \in D_f$，当 $x_1 < x_2$ 时，$f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D_f 上严格单调增加；当 $x_1 < x_2$ 时，

$f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D_f 上严格单调减少.

若 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D_f 上单调增加；若 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D_f 上单调减少.

(3) 周期性：设有函数 $y = f(x)$，$x \in D_f$，若存在非零常数 l，使 $f(x+l) = f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，而 l 称为函数的一个周期.

(4) 有界性：设有函数 $y = f(x)$，$x \in D_f$，若存在正数 M，使 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$为有界函数. 若存在常数 A 与 B，使 $A \leqslant f(x) \leqslant B$，则 A 与 B 分别称为 $f(x)$的下界与上界.

1.2 例题与解题方法

1. 证明函数等式：

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

分析 从左边与右边看，似乎用和差化积的方法，但经过试做之后，比较繁，而且最后还需要用数学归纳法证明，与其如此，不如直接用归纳法证明.

证明 当 $k = 1$ 时，左边 $= \sin x$，右边 $= \dfrac{\sin x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \sin x$，等式成立. 假设当 $n = k$ 时，等式成立，即

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

则 $n = k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin kx + \sin(k+1)x\\ &\quad = \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + \sin(k+1)x\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} + 2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k}{2}x + 2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k}{2}x + \sin\frac{k+1}{2}x\left(\sin\frac{k+2}{2}x - \sin\frac{k}{2}x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{k+1}{2}x\sin\frac{k+2}{2}x\right),$$

得证.

2. 证明函数等式:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

分析 将等式右边的分母搬到左边,就可以看出一些端倪,因此可从右边的分子 $\sin x$ 出发,运用倍角公式即可得证.

证明 $\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}$

$$= 2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdot 2\cos\frac{x}{2^3}\sin\frac{x}{2^3} = \cdots$$

$$= 2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}.$$

再用归纳法证明即得.

3. 设 $f(x)$是定义在$[-a, a]$内的函数,证明: $f(x)+f(-x)$ 为偶函数, $f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

分析 直接应用偶函数与奇函数的定义就可以证得.

证明 设 $F(x) = f(x)+f(-x)$, 依定义 $F(-x) = f(-x)+f(x) = F(x)$, 故 F 为偶函数.

同理设 $G(x) = f(x)-f(-x)$ 也一样证明.

4. 试证　定义在区间$[-l, l]$上的任意函数 $g(x)$都可表达为一个偶函数与一个奇函数的和.

分析　由第 3 题知道，$F(x)=g(x)+g(-x)$ 与 $G(x)=g(x)-g(-x)$ 分别为$[-l, l]$上的偶函数与奇函数，即

$$F(x)+G(x)=2g(x).$$

于是 $g(x)=\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}G(x)$.

证明　由上面分析得到

$$g(x)=\frac{g(x)+g(-x)}{2}+\frac{g(x)-g(-x)}{2}.$$

这表明 $g(x)$可表达为一个偶函数与奇函数之和.

下面证明这一表达是唯一的.

设

$$g(x)=\varphi(x)+\psi(x), \tag{1}$$

其中 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$分别为$[-l, l]$上的偶函数与奇函数. 于是

$$g(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=\varphi(x)-\psi(x). \tag{2}$$

式(1)与式(2)相加得

$$2\varphi(x)=g(x)+g(-x),\text{即 } \varphi(x)=\frac{g(x)+g(-x)}{2}.$$

式(1)与式(2)相减得

$$2\psi(x)=g(x)-g(-x),\text{即 } \psi(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2}.$$

故 $g(x)=\frac{g(x)+g(-x)}{2}+\frac{g(x)-g(-x)}{2}$，这说明这一表达式是唯一的.

5. 设 $f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，证明：$f[g(x)]$、$g[f(x)]$为偶函数，$f[f(x)]$为奇函数.

分析　从函数奇偶性定义出发，即可证得.

证明　设 $F(x)=f[g(x)]$，$G(x)=g[f(x)]$，$H(x)=f[f(x)]$. 由于

$F(-x)=f[g(-x)]=f[g(x)]=F(x)$，因此，$F(x)$为偶函数.

又因为 $G(-x)=g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]=G(x)$，故 $G(x)$ 为偶函数.

又由于 $H(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]=-H(x)$，因此 $H(x)$为奇函数.

6. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且在该区间上恒有 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，其中 a 为正实数，试证：$f(x)$为周期函数.

分析 这里出现 $f(x+a)$，欲证 $f(x)$为周期函数，想象 $f(x)$的周期与 a 有关，试考察 $f(x+2a)$，看看会出现什么情况?

证明 由于 $f(x+2a)=f[(x+a)+a]$，
故有

$$
\begin{aligned}
f(x+2a)&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f^2(x+a)}\\
&=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}+f(x)-f^2(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+f(x)+f^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

由于 $f(x)=f(x-a+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-f^2(x-a)}\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x)-\frac{1}{2}$.

将它代入式(1)得

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x).$$

这说明 $f(x)$是以 $2a$ 为周期的周期函数.

7. 设 $f(x)$是以正数 T 为周期的函数，试证：$f(\omega)(\omega>0)$是以$\frac{T}{\omega}$为周期的

函数.

分析 从周期函数的定义出发去证明$\dfrac{T}{\omega}$为$f(x)$的周期.

证明 设$\varphi(x)=f(\omega x)$,那么$\varphi\left(x+\dfrac{T}{\omega}\right)=f\left[\omega\left(x+\dfrac{T}{\omega}\right)\right]=f(\omega x+T)$,由题设知$f(u+T)=f(u)$,故$f(\omega x+T)=f(\omega x)$. 于是得到

$$\varphi\left(x+\frac{T}{\omega}\right)=f(\omega x)=\varphi(x).$$

故$f(\omega x)$是以$\dfrac{T}{\omega}$为周期的函数.

8. 证明:狄利希莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

是周期函数,但没有最小周期.

分析 据周期函数定义,需分别讨论周期是有理数还是无理数.

证明 设l为任何一个正有理数,那么,当自变量x为有理数时,$x+l$也是有理数,于是$D(x+l)=1$;当x为无理数时,$x+l$为无理数,因此,$D(x+l)=0$. 把两者合并,即

$$\begin{aligned}D(x+l)&=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & \text{当 }x\text{ 为无理数},\end{cases}\\ &=D(x).\end{aligned}$$

可见,$D(x)$是以正有理数l为周期的周期函数. 由于正有理数中没有最小者,因此,函数$D(x)$没有最小周期.

9. 取整函数$\operatorname{sgn}(x)=[x]$是不超过$x$的最大整数,试证:$f(x)=x-[x]$是周期函数,并求它的周期.

分析 应用周期函数的定义证明. 由$[x]$的定义,故设$x=n+\alpha$.

证明 令$x=n+\alpha$,其中n为整数,α为小数部分,即$0<\alpha<1$. 那么$f(n+\alpha)=n+\alpha-[n+\alpha]=n+\alpha-n-[\alpha]=\alpha-[\alpha]$.

设$l>0$,$f(n+\alpha+l)=n+\alpha+l-[n+\alpha+l]$

$$=n+\alpha+l-n-[\alpha+l]=\alpha+l-[\alpha+l].$$

欲证$f(x)$为周期函数,则必须有$f(x+l)=f(x)$,即$\alpha+l-[\alpha+l]=\alpha-$

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

$[\alpha]$，亦即 $l=[\alpha+l]-[\alpha]$. 因此当 $l=m$(m 为正整数)时，右端$[\alpha+m]-[\alpha]=[\alpha]+m-[\alpha]=m$，这说明 $f(x)=x-[x]$ 是以 m 为周期的周期函数，我们可取此函数的周期为 $T=1$.

10. 若函数 $f(x)$在定义域上满足 $f(x)=f(2a-x)$，则称它的函数图形对称于直线 $x=a$. 试证：如果函数 $f(x)$的图形既对称于直线 $x=a$，又对称于直线 $x=b(b\neq a)$，那么 $f(x)$为周期函数.

分析 依照周期函数定义予以证明，试看我们熟悉的正弦函数 $g(x)=\sin x$，它的周期是 2π，它的图形既对称于直线 $x=\frac{\pi}{2}$，也对称于直线 $x=2\pi+\frac{\pi}{2}$，它们的差值是 2π，2π 的两倍 $2\times 2\pi=4\pi$ 也是正弦函数的周期. 因此，我们试着用 $2(a-b)$ 作为 $f(x)$的周期进行分析.

证明 由于 $f(x)$的图形对称于直线 $x=a$，因此有 $f(x)=f(2a-x)$，又因 $f(x)$的图形对称于直线 $x=b$，故有 $f(x)=f(2b-x)$. 因为 $a\neq b$，且 $f(x)=f(2a-x)$，故有 $f[x+2(a-b)]=f[2a-(x+2a-2b)]=f(2b-x)=f(x)$.
所以，$f(x)$是以 $2(a-b)$ 为周期的周期函数.

11. 试证：$f(x)=\sin(x^2)$ 不是周期函数.

分析 欲证 $f(x)$无周期似乎难以下手，但由于它是正弦函数，我们知道$\sin x$的零点 $x=n\pi$ 呈周期性分布，故认为 $\sin(x^2)$也必有许多零点，为简便计，设 $x\geqslant 0$，$x=\sqrt{n\pi}(n=0, 1, 2, \cdots)$，因此，考察它相邻零点之距离是否都相同？

证明 *方法 1* $f(x)=\sin(x^2)$ 在 $x\geqslant 0$ 处的零点为

$$x_n=\sqrt{n\pi}(n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi}+\sqrt{n\pi}}.$$

当 n 增大时，$x_{n+1}-x_n$ 减小，$f(x)$相邻零点之间的距离随 n 的增大而减少，且随 n 无限增大而趋于零，故它的零点不是周期分布，这说明 $f(x)=\sin(x^2)$ 不是周期函数.

方法 2 用反证法. 假设 $f(x)$为周期函数，那么 $\sin(x^2)$必具有周期的(函数)零点，但是 $f(x)$的零点为 $x=\pm\sqrt{n\pi}(n=0, 1, 2, \cdots)$ 都随 n 的增大两个相邻零点之间的距离也逐渐增大，这与假设 $f(x)$为周期函数相矛盾，故 $\sin(x^2)$不

是周期函数.

12. 设函数 $f(x)$具有性质 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则必有 $f(0)=0$，$nf(x)=f(nx)$，n 为任意正整数.

分析 证明等式 $nf(x)=f(nx)$ 一般都用归纳法.

证明 由于 $f(0+y)=f(0)+f(y)$，故 $f(0)=0$.

用归纳法证明 $nf(x)=f(nx)$.

当 $n=1$ 时，显然成立.

假设 $n=k$ 时，$kf(x)=f(kx)$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned} f[(k+1)x] &= f(kx+x)=f(kx)+f(x) \\ &= kf(x)+f(x)=(k+1)f(x), \end{aligned}$$

成立. 得证.

13. 试证函数 $y=(x^2+1)\operatorname{sgn}(x)$ 的反函数为

$$y=\begin{cases} -\sqrt{-x-1}, & x<-1, \\ 0, & x=0, \\ \sqrt{x-1}, & x>1. \end{cases}$$

分析 已给函数含有取整函数，它是分段函数(参看第 9 题)，求它的反函数也应分段考虑，将 x 解出来.

证明 按照已给函数定义，将它写成如下分段形式：

$$y=\begin{cases} -(x^2+1), & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x^2+1, & x>0. \end{cases}$$

其中第一段：$y=-(x^2+1)(x<0,\ y<-1)$ 的反函数为

$$x=-\sqrt{-y-1};$$

其中后一段：$y=x^2+1(x>0,\ y>1)$ 的反函数为

$$x=\sqrt{y-1}.$$

当 $y=0$ 时，对应的 x 值为零，即 $x=0$.

综上所述，所求反函数为

$$x=\begin{cases}-\sqrt{-y-1}, & y<-1,\\ 0, & y=0,\\ \sqrt{y-1}, & x>1.\end{cases}$$

按照习惯自变量用 x 表示,换名之后

$$y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1}, & x<-1,\\ 0, & x=0,\\ \sqrt{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

得证.

14. 设 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+a}$, $\varphi(x)=\dfrac{lx+m}{nx+l}$,且 $b:c=m:n$,证明: $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$.

分析 根据复合函数的定义,并把已知关系式: $b:c=m:n$ 用进去.

证明

$$f[\varphi(x)]=\frac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)+a}=\frac{a\cdot\dfrac{lx+m}{nx+l}+b}{c\cdot\dfrac{lx+m}{nx+l}+a}$$

$$=\frac{alx+am+bnx+bl}{clx+cm+anx+al},$$

$$\varphi[f(x)]=\frac{lf(x)+m}{nf(x)+l}=\frac{l\cdot\dfrac{ax+b}{cx+a}+m}{n\cdot\dfrac{ax+b}{cx+a}+l}$$

$$=\frac{alx+bl+cmx+am}{anx+bn+clx+al}.$$

由题设 $b:c=m:n$,知 $bn=cm$. 故 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$.

15. 设 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$,如果 $f(x)=a+bx$,证明: $f_n(x)=a\cdot\dfrac{b^n-1}{b-1}+b^nx$.

分析 用归纳法证明等式.

证明 当 $n=1$ 时, $f_1(x)=a+bx$, 设 $n=k$, $f_k(x)=a\dfrac{b^k-1}{b-1}+b^kx$ 成立,则当 $n=k+1$ 时,

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=a+bf_k(x)=a+b\cdot\left(a\cdot\frac{b^k-1}{b-1}+b^kx\right)$$
$$=a\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x.$$

因此所需证明的等式成立.

2 极限与连续

2.1 主要内容

2.1.1 数列极限的定义

设有一数列$\{a_n\}$,如果存在一个常数A,对于任意给定的正数ε,总存在正整数N,当$n>N$时,恒有不等式$|a_n-A|<\varepsilon$成立,则称A为数列$\{a_n\}$的极限,或称数列$\{a_n\}$收敛于A,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

或
$$a_n \to A,\ n \to \infty.$$

这一定义常称为"数列极限的$\varepsilon-N$定义".

若用逻辑符号表示,即

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n > N \to |a_n - A| < \varepsilon.$$

其中记号$\forall$是英文Any中第一个字母A的倒写,表示"对任何"或"对每一个"之意;$\exists$为Exist中第一个字母E的反写,表示"存在"或"找到"之意;$B\to C$表示"由B得到C"之意.

2.1.2 收敛数列的性质

(1) **唯一性**:若数列收敛,则其极限是唯一的.

(2) **有界性**:收敛数列必有界.

(3) **保号性**:若$\lim\limits_{n\to x} a_n = A$,且$A>0$(或$A<0$),则
$\exists N,\ \forall n > N \to a_n > 0$(或$a_n<0$).

2.1.3 数列极限存在准则

准则1(单调有界准则) 单调增加有上界的数列必有极限;单调减少有下

界的数列也必有极限.

准则 2(夹逼准则) 设有三个数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$和$\{c_n\}$,若$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n (n=1, 2, 3, \cdots)$,且$\{a_n\}$与$\{b_n\}$收敛于同一极限$A$,则$\{c_n\}$也必收敛于$A$.

2.1.4 函数 f(x)当 x→x₀ 时的极限

(1) 设函数$f(x)$在包含点x_0的某邻域内有定义(点x_0可以无定义),若存在常数A,对于任意给定的正数ε,总存在正数δ,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,则称A为当x趋于x_0时的极限,或称$f(x)$在$x\to x_0$时收敛于A. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

或

$$f(x)\to A (x\to x_0).$$

这一定义常称为“函数极限的$\varepsilon-\delta$定义”.

用逻辑符号表示,即

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall 0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon.$$

(2) 右极限定义:$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall 0<x-x_0<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon$,则称$A$为$f(x)$在$x\to x_0$时的右极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$,或$f(x_0+0)=A$.

(3) 左极限定义:$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall 0<|x_0-x|<\delta \to |f(x)-A|<\varepsilon$. 记作

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

(4) 定理:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

2.1.5 函数 f(x)当 x→∞时的极限

$\forall \varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \forall |x|>X \to |f(x)-A|<\varepsilon$,称$A$为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,或$f(x)\to A,\ x\to\infty$.

2.1.6 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com