高校电子信息类专业主干课“十一五”规划教材

电磁场与微波技术学习指导

吕芳 辛莉 侯婷 李秀娟◎编著

Learning Guidance for Electromagnetic Field and Microwave Technology

南大学出版社
EAST UNIVERSITY PRESS

高校电子信息类专业主干课“十一五”规划教材

电磁场与微波技术学习指导

◆ 吕芳 辛莉 侯婷 李秀娟 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内 容 提 要

本书是与吕芳、杜永兴、辛莉编著的高校电子信息类专业课"十一五"规划教材《电磁场与电磁波》和吕芳、辛莉、侯海鹏编著的《微波技术》(均由东南大学出版社出版)配套使用的学习指导书,该指导书可使本科生加深对电磁场和微波技术理论的理解,同时也能使本科生学会解题的思路和方法。

本书针对原来两部教材课后习题做了解答,每章还包括了基本内容概述、典型例题分析及拓展训练。全书共三部分,共13章。内容按照原书的章节顺序排列,第一部分是电磁场课程中的矢量分析和场论、宏观电磁现象的基本原理、静电场和恒定电场、恒定电流的磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射。第二部分为微波技术课程中的传输线基本理论、微波传输线、微波网络、微波元件、微波有源器件与电路。第三部分是重点高校电磁场和微波技术两门课的考研真题及其解答。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与微波技术学习指导/吕芳等编著. —南京:东南大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5641-4361-9

Ⅰ.①电… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教学参考资料 ②微波技术—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O441.4 ②TN015

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第147292号

电磁场与微波技术学习指导

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社　　址 江苏省南京市玄武区四牌楼2号
邮　　编 210096

经　　销 江苏省新华书店
印　　刷 南京玉河印刷厂
开　　本 700mm×1000mm 1/16
印　　张 17.5
字　　数 353千字
书　　号 ISBN 978-7-5641-4361-9
版　　次 2014年1月第1版
印　　次 2014年1月第1次印刷
定　　价 34.80元

前　言

电磁场、微波技术是高校工科电子信息类专业的重要技术基础课，也是令很多大学生“头痛”的课程。这些课程内容抽象、公式繁多且对高等数学基础要求较高，同时这些课程的习题又具有较强的灵活性和复杂性。本书通过对两门课程相关知识点的梳理，及对典型例题进行分析和求解，特别注重精讲解题思路和方法，起到总结、深化、提高与扩展知识面的作用，同时也希望能达到启发读者触类旁通的效果。

本书是基于吕芳、杜永兴、辛莉编著的高校电子信息类专业主干课“十一五”规划教材《电磁场与电磁波》和吕芳、辛莉、侯海鹏编著的《微波技术》(分别由东南大学出版社2009、2010年出版)编写的。全书共三部分，共13章。内容按照原书的章节顺序排列，第一部分是电磁场课程中的矢量分析和场论、宏观电磁现象的基本原理、静电场和恒定电场、恒定电流的磁场、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁辐射。第二部分为微波技术课程中的传输线基本理论、微波传输线、微波网络、微波元件、微波有源器件与电路。第三部分是重点高校两门课的考研真题及其解答。书末有附录、增补习题及其参考答案、参考文献等。

本书中每章先给出基本内容概述，增加了典型例题讲解，之后是对于教材的课后习题解答。内容安排合理，文字表述明了，物理概念清晰，并说明解题的方法和要点。

在编写过程中注意强调基本概念和典型问题的解决方法，增加了典型例题的求解方法以及部分工程应用方面的内容，意在培养解决工程应用的能力，提供了部分高校两门课考研真题及解答，有助于考研学生的复习。

在编写中，吸收了其他院校部分讲课教师的意见和建议，同时融入了课题组教师长期讲授该课程的教学经验和体会。

本书由吕芳、辛莉、侯婷、李秀娟编写，由吕芳负责全书的统稿工作。其中所有典型例题及第一部分第七章，第二部分第三、四章由吕芳编写；第一部分第二、三章，第二部分第五、六章由辛莉编写；第一部分第四、五、六、八章由侯婷编写；第一部分第一章，第二部分第二章由李秀娟编写。本书在编写过程中，得到了许多老师的大力支持与帮助，研究生刘翥、许惠、田甜做了大量的习题录入工作，在此深表谢意。

书中不妥之处敬请广大读者提出宝贵意见。

作　者

2013年2月

CONTENTS 目　录

第一部分　电磁场与电磁波

1　矢量分析与场论

1.1　基本内容概述

一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量，例如，电压、温度、时间、质量、电荷等。实际上，所有实数都是标量。标量的空间分布构成标量场。

在二维空间或三维空间内的任一点 P，它是一个既存在大小（或称为模）又有方向特性的量，称为矢量，用黑体 $\boldsymbol{A}$ 表示，而白体 A 表示 $\boldsymbol{A}$ 的大小（即 $\boldsymbol{A}$ 的模）。如电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 等。矢量的空间分布构成矢量场。

若场中的物理量在各点处的对应值不随时间变化，则称该场为稳定场。否则，称为不稳定场。

一个模为 1 的矢量称为单位矢量（Unit Vector）。用 $\boldsymbol{e}_A$ 表示，即

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A}$$

式中，A 为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为 $$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A$$

矢量的加法服从交换律和结合律

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \qquad \text{（交换律）}$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \qquad \text{（结合律）}$$

矢量减法

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$$

两个矢量的点积 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 是一个标量，定义为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小与它们之间较小的夹角 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ 的余弦之积，即 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta$。

矢量的点积服从交换律和分配律

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \qquad \text{（交换律）}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \qquad \text{（分配律）}$$

两个矢量的叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是一个矢量，它垂直于包含矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面，其大小定义为 $AB\sin\theta$，方向为当右手四个手指从矢量 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 旋转 θ 时大拇指的方向，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_c AB\sin\theta$$

矢积不服从交换律，而服从分配律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\quad\text{（分配律）}$$

在直角坐标系中矢量的基本运算代数表示式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

在圆柱坐标系中矢量的基本运算代数表示式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_\rho B_\rho+A_\phi B_\phi+A_zB_z$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ A_\rho & A_\phi & A_z\\ B_\rho & B_\phi & B_z\end{vmatrix}$$

在球坐标系中矢量的基本运算代数表示式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_rB_r+A_\theta B_\theta+A_\phi B_\phi$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\phi\\ A_r & A_\theta & A_\phi\\ B_r & B_\theta & B_\phi\end{vmatrix}$$

直角坐标系与圆柱坐标系及球坐标系的转换关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_\rho=\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_\phi=-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_z\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_r=\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{e}_\theta=\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{e}_\phi=-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x+\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y\end{cases}$$

在直角坐标系中梯度、散度、旋度表示式：

$$\mathrm{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=\nabla u\quad\text{是矢量}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\quad\text{是标量}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\quad\text{是矢量}$$

斯托克斯定理 $$\oint_C\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.2　典型例题解析

【例 1.1】 给定两个矢量 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y+6\boldsymbol{e}_z$，求它们之间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量。

解：
$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{29}$$
$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{4^2+(-5)^2+6^2}=\sqrt{77}$$
$$|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=(2\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z)\cdot(4\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y+6\boldsymbol{e}_z)=-31$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为
$$\theta_{AB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(\frac{-31}{\sqrt{29}\sqrt{77}}\right)=131^\circ$$

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为
$$A_B=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{-31}{\sqrt{77}}=-3.53$$

【例 1.2】 已知 $\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{e}_x+2z^2\boldsymbol{e}_y+xy\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{e}_x-4\boldsymbol{e}_z$，求 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$。

解：
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 3y & 2z^2 & xy\\ x^2 & 0 & -4\end{vmatrix}=-8z^2\boldsymbol{e}_x+(12y+x^3y)\boldsymbol{e}_y-2x^2z^2\boldsymbol{e}_z$$
$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -8z^2 & 12y+x^3y & -2x^2z^2\end{vmatrix}=-4z(4-xz)\boldsymbol{e}_y+3x^2y\boldsymbol{e}_z$$

【例 1.3】 求标量函数 $\psi=x^2yz$ 的梯度及 ψ 在一个指定方向的方向导数。此方向由单位矢量 $\boldsymbol{e}_l=\frac{3}{\sqrt{50}}\boldsymbol{e}_x+\frac{4}{\sqrt{50}}\boldsymbol{e}_y+\frac{5}{\sqrt{50}}\boldsymbol{e}_z$ 定出；求(2,3,1)点的方向导数值。

解：
$$\nabla\Psi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)$$
$$=\boldsymbol{e}_x2xyz+\boldsymbol{e}_yx^2z+\boldsymbol{e}_zx^2y$$

故沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\frac{3}{\sqrt{50}}\boldsymbol{e}_x+\frac{4}{\sqrt{50}}\boldsymbol{e}_y+\frac{5}{\sqrt{50}}\boldsymbol{e}_z$ 的方向导数为
$$\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\nabla\Psi\cdot\boldsymbol{e}_l=\frac{6xyz}{\sqrt{50}}+\frac{4x^2z}{\sqrt{50}}+\frac{5x^2y}{\sqrt{50}}$$

点(2,3,1)处沿 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数值为
$$\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\frac{36}{\sqrt{50}}+\frac{16}{\sqrt{50}}+\frac{60}{\sqrt{50}}=\frac{112}{\sqrt{50}}$$

【例 1.4】 已知矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x(x^2+axz)+\boldsymbol{e}_y(xy^2+by)+\boldsymbol{e}_z(z-z^2+czx-2xyz)$，试确定常数 a、b、c，使 $\boldsymbol{E}$ 为无源场。

解：由 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=(2x+az)+(2xy+b)+(1-2z+cx-2xy)=0$，

即 $$(2+c)x+b+1+(a-2)z=0$$

得 $$a=2,b=-1,c=-2$$

【例 1.5】 设 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，求矢量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 向上穿过 S 的通量 Φ[提示：注意 S 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同指向]。

解：$$\Phi=\int_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{r}\cdot n\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S|\boldsymbol{r}|\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$=\int_S\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=a\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}=a\cdot 2\pi a^2=2\pi a^3$$

【例 1.6】 设 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

(1) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})$；(2) $\nabla\cdot(r^2\boldsymbol{a})$；(3) $\nabla\cdot(r^n\boldsymbol{a})$。

解：根据公式 $\nabla\cdot(f\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\nabla f$，其中 $\boldsymbol{c}$ 为常矢量，f 为标量函数。

(1) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\nabla r$

其中 $$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\nabla r=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z}{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

故 $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

(2) $\nabla\cdot(r^2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot(\nabla r^2)=\boldsymbol{a}\cdot(2r\nabla r)=\boldsymbol{a}\cdot\left(2r\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$

(3) $\nabla\cdot(r^n\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot(\nabla r^n)=\boldsymbol{a}\cdot(nr^{n-1}\nabla r)=\boldsymbol{a}\cdot\left(nr^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=nr^{n-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$

【例 1.7】 证明矢量场 $\boldsymbol{F}=(y\cos xy)\boldsymbol{e}_x+(x\cos xy)\boldsymbol{e}_y+\sin z\boldsymbol{e}_z$ 为有势场。

证明：“有势场”⇔“无旋场”⇔“保守场”。

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y\cos xy & x\cos xy & \sin z\end{vmatrix}=0$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场，即可得出 $\boldsymbol{F}$ 是有势场。

【例 1.8】 求 $\boldsymbol{F}=x(z-y)\boldsymbol{e}_x+y(x-z)\boldsymbol{e}_y+z(y-x)\boldsymbol{e}_z$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_n=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z)$ 方向的环量密度。

解：由题意，环量密度

$$\lim_{\Delta S_n\to 0}\frac{1}{\Delta S}\int_l\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{e}_n$$
$$\boldsymbol{F}=x(z-y)\boldsymbol{e}_x+y(x-z)\boldsymbol{e}_y+z(y-x)\boldsymbol{e}_z$$

则

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x(z-y) & y(x-z) & z(y-x)\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{e}_x(z-y)+\boldsymbol{e}_y(x-z)+\boldsymbol{e}_z(y-x)$$

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z)$$

故 M 点处环量密度

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{e}_n=[\boldsymbol{e}_x(z-y)+\boldsymbol{e}_y(x-z)+\boldsymbol{e}_z(y-x)]\cdot\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z)\,|_M$$

$$=\frac{1}{3}(y-z)\,|_M=-\frac{1}{3}$$

【例 1.9】 求曲线 $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{e}_x+t^2\boldsymbol{e}_y+t^3\boldsymbol{e}_z$ 上这样的点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

解：曲线某点处的切线方程是$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}(t)}{t}=\boldsymbol{e}_x+2t\boldsymbol{e}_y+3t^2\boldsymbol{e}_z$，

平面的法线方向 $\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$

若过某点的切线平行于平面，则此点处切线与平面的法线垂直。于是

$$(\boldsymbol{e}_x+2t\boldsymbol{e}_y+3t^2\boldsymbol{e}_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=1+4t+3t^2=0$$

解得 $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$

从而得所求点为$(-1,1,-1)$和$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$

【例 1.10】 如果给定一个未知矢量与一个已知矢量的标量积和矢量积，那么便可以确定该未知量。设 $\boldsymbol{A}$ 为一已知矢量，$p=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ 而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，$p$ 和 $\boldsymbol{P}$ 已知，试求 $\boldsymbol{X}$。

解：由 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=p\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$

故得

$$\boldsymbol{X}=\frac{p\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

1.3 课后习题解答

【1.1】 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}=-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{C}=5\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_z$$

求：(1) $\boldsymbol{e}_A$；(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4) θ_{AB}；(5) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(6) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(7) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解：(1) $e_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)$

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\sqrt{1+36+16}=\sqrt{53}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-8-3=-11$

(4) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta$；$-11=\sqrt{14}\times\sqrt{17}\times\cos\theta$

$\therefore\theta=\arccos\left(-\dfrac{11}{\sqrt{238}}\right)$

(5) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{e}_x-15\boldsymbol{e}_y-10\boldsymbol{e}_z+2\boldsymbol{e}_y=-4\boldsymbol{e}_x-13\boldsymbol{e}_y-10\boldsymbol{e}_z$

(6) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=8+10-60=-42$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{e}_x-4\boldsymbol{e}_z-12\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y=-10\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=-50+8=-42$

(7) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{e}_x-20\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z-20\boldsymbol{e}_y=2\boldsymbol{e}_x-40\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=40\boldsymbol{e}_x-24\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z-20\boldsymbol{e}_y+15\boldsymbol{e}_x-16\boldsymbol{e}_z=55\boldsymbol{e}_x-44\boldsymbol{e}_y-11\boldsymbol{e}_z$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}&=-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=-[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})]\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=11(-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)+2(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\\&=2\boldsymbol{e}_x-40\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

【1.2】 求 $P'(-3,1,4)$点到 $P(2,-2,3)$点的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向。

解：矢量 P' 为 $\boldsymbol{A}'=-3\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z$；矢量 P 为 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z$

则距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 为：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'=5\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$$

$$|\boldsymbol{R}|=\sqrt{35}$$

$$\phi_x=\arccos\frac{5}{\sqrt{35}};\phi_y=\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right);\phi_z=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{35}}\right)$$

【1.3】 证明:如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

证明:由 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$,则有 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$,即

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})$

由于 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,即

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

证毕

【1.4】 证明:(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$,(2) $\nabla\times\boldsymbol{R}=0$,(3) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{A}$ 为一常矢量。

证明:(1)
$$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=\nabla\cdot(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=3;$$

(2)
$$\nabla\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0;$$

(3)
$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\nabla\cdot[(\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{e}_z)\cdot(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)]$$
$$=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_x x+\boldsymbol{A}_y y+\boldsymbol{A}_z z)$$
$$=\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{A}$$

【1.5】 求标量函数 $\psi=x^2yz$ 的梯度及 ψ 在一个指定方向的方向导数。此方向由单位矢量 $\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_y+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_z$ 定出,求(2,3,1)点的导数值。

解:$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=2xyz\boldsymbol{e}_x+x^2z\boldsymbol{e}_y+x^2y\boldsymbol{e}_z$

在指定方向的方向导数

$$\because \boldsymbol{e}_l=\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_x+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_y+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_z$$

$$\therefore \frac{\partial\psi}{\partial l}(2,3,1)=\frac{2}{3}\times2\times3\times1+\frac{2}{3}\times4\times1+\frac{2}{3}\times4\times3=4+\frac{8}{3}+8=\frac{44}{3}$$

【1.6】 三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{A}=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi$,$\boldsymbol{B}=z^2\sin\phi\boldsymbol{e}_\rho+z^2\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi+2\rho z\sin\phi\boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{C}=(3y^2-2x)\boldsymbol{e}_x+x^2\boldsymbol{e}_y+2z\boldsymbol{e}_z$。(1) 哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示?哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示?(2) 求出这些矢量的源分布。

解:(1) 证明:$\boldsymbol{A}=\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\phi\boldsymbol{e}_\phi$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial_\phi}$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\cos\phi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta\cos\phi)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi)$$

$$=\frac{2}{r}\sin\theta\cos\phi+\frac{\cos\phi\cos 2\theta}{r\sin\theta}-\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi\end{vmatrix}=0$$

故矢量既可用标量函数的梯度表示，又可用矢量函数的旋度来表示。

$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ 则 $\boldsymbol{A}$ 可由一个标量函数的梯度表示；

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 则 $\boldsymbol{A}$ 可由一个矢量函数的旋度表示。

圆柱坐标系中

$$\boldsymbol{B}=z^2\sin\phi\boldsymbol{e}_\rho+z^2\cos\phi\boldsymbol{e}_\phi+2\rho z\sin\phi\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$=\frac{z^2}{\rho}\sin\phi+\frac{z^2}{\rho}(-\sin\phi)+2\rho\sin\phi$$

$$=2\rho\sin\phi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z\end{vmatrix}=0$$

故矢量 $\boldsymbol{B}$ 可用一个标量函数的梯度表示。

直角坐标系中：

$$\boldsymbol{C}=(3y^2-2x)\boldsymbol{e}_x+x^2\boldsymbol{e}_y+2z\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}=\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=-2+0+2=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$$

故 $\boldsymbol{C}$ 可以由一个矢量函数的旋度表示。

(2) 这些矢量的源分布为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=2\rho\sin\phi,\nabla\times\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}=0,\nabla\times\boldsymbol{C}=(2x-6y)\boldsymbol{e}_z$$

【1.7】　若在标量场 $u=u(M)$ 中恒有 ∇u，证明 $u=$常数。

证明：标量场的梯度为

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial u}{\partial u_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial u}{\partial u_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial u}{\partial u_3}$$

如果在标量场 $u=u(M)$ 中恒有 $\nabla u=0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial u_1}=0,\frac{\partial u}{\partial u_2}=0,\frac{\partial u}{\partial u_3}=0$$

所以 u 与坐标无关，故 $u=C$ 为常数。

【1.8】　利用直角坐标，证明 $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})=f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla f$。

证明：在直角坐标系中

$$\begin{aligned}f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla f&=f\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial z}\right)+\left(\boldsymbol{A}_x\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{A}_y\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{A}_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=\left(f\frac{\partial \boldsymbol{A}_x}{\partial x}+\boldsymbol{A}_x\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(f\frac{\partial \boldsymbol{A}_y}{\partial y}+\boldsymbol{A}_y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(f\frac{\partial \boldsymbol{A}_z}{\partial z}+\boldsymbol{A}_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}(f\boldsymbol{A}_x)+\frac{\partial}{\partial y}(f\boldsymbol{A}_y)+\frac{\partial}{\partial z}(f\boldsymbol{A}_z)\\&=\nabla\cdot(f\boldsymbol{A})\end{aligned}$$

证毕

【1.9】　证明　$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}$

证明：根据算子的微分运算性质，有

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=\nabla_A\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})+\nabla_H\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})$

由 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$，可得：

$\nabla_{\boldsymbol{A}}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla_A\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$

$\nabla_{\boldsymbol{H}}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla_H\cdot\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})$

则：$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}$

证毕

【1.10】　利用直角坐标，证明 $\nabla\times(f\boldsymbol{G})=f\nabla\times\boldsymbol{G}+\nabla f\times\boldsymbol{G}$。

证明：在直角坐标系中

$$f\nabla\times\boldsymbol{G}=f\left[\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\nabla f\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_x\left(G_z\frac{\partial f}{\partial y}-G_y\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(G_x\frac{\partial f}{\partial z}-G_z\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(G_y\frac{\partial f}{\partial x}-G_x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

则

$$\begin{aligned}f\nabla\times\boldsymbol{G}+\nabla f\times\boldsymbol{G}&=\boldsymbol{e}_x\left[\frac{\partial(fG_z)}{\partial y}-\frac{\partial(fG_y)}{\partial z}\right]+\boldsymbol{e}_y\left[\frac{\partial(fG_x)}{\partial z}-\frac{\partial(fG_z)}{\partial x}\right]\\&\quad+\boldsymbol{e}_z\left[\frac{\partial(fG_y)}{\partial x}-\frac{\partial(fG_x)}{\partial y}\right]\\&=\nabla\times(f\boldsymbol{G})\end{aligned}$$

证毕