普通高等教育“十二五”规划教材

Mathematics

王汝亮 张序萍 陈贵磊 郭秀荣 主编

大学数学辅导教程

（线性代数、概率论与数理统计）

下册

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材
省级精品课程辅导教材
考研辅导教材

大学数学辅导教程

下　册

（线性代数、概率论与数理统计）

主　编

王汝亮　张序萍　陈贵磊　郭秀荣

副主编

马芳芳　王鲁新　徐亚鹏　郭文静

上海交通大学出版社

内容提要

本书分上、下两册，下册为线性代数、概率论与数理统计部分，共13章：第1章行列式；第2章矩阵；第3章向量组；第4章线性方程组；第5章特征值和特征向量；第6章二次型；第7章随机事件与概率；第8章随机变量及其分布；第9章多维随机变量及其分布；第10章随机变量的数字特征；第11章大数定律与中心极限定理；第12章样本及抽样分布；第13章参数估计和假设检验. 每章都有知识点梳理，题型归类与方法分析，同步测试题，书末附有参考答案.

本书可以作为本科生参加研究生入学考试的指导书，也可作为数学考研的辅导教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学辅导教程. 下 / 王汝亮等主编. —上海：
上海交通大学出版社，2013
ISBN 978-7-313-10484-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第257030号

大学数学辅导教程
(线性代数、概率论与数理统计)
下 册

主 编：王汝亮 张序萍 陈贵磊 郭秀荣
出版发行：上海交通大学出版社 地 址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030 电 话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印 制：上海交大印务有限公司 经 销：全国新华书店
开 本：787 mm×1092 mm 1/16 印 张：15.25
字 数：341千字
版 次：2013年11月第1版 印 次：2013年11月第1次印刷
书 号：ISBN 978-7-313-10484-7/O
定 价：28.00元

前言

大学数学是高等学校各专业重要的公共基础课，是培养学生抽象思维、逻辑推理、空间想象能力和科学计算能力以及应用知识能力必不可少的一门课程，也是进一步学习现代科学知识的必修课. 它不但广泛地应用于自然科学和工程技术，而且已经渗透到生命科学、经济科学和社会科学等众多的领域，乃至行政管理和人们的日常生活中，所以，能否应用数学观念定量思维已经成为衡量民族文化素质的一个重要标志，正如马克思所说："一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步."

高等数学、线性代数、概率论与数理统计是大学数学的三个组成部分，也是理工、经济类学生报考硕士研究生时必考的重要课程. 本书编者所授大学数学课程为省级精品课程，同时作者主持的《大学数学考研辅导与团队建设研究》是创新基金项目. 多年来考研数学辅导教学团队认真研究大学数学的教学内容和教学方法，认真总结举办考研数学辅导的经验，根据学生的知识结构，结合教学实践编写了《大学数学辅导教程》一书.

本书具有如下特点：将知识点进行了系统小结与归类，题型多样，技巧多变；对解题方法进行了归纳，使难题的解决有法可循；题目选择、题型的归纳都是依据多年对考研题目的研究所成，其知识的多样性、灵活性、技巧性、综合性等在书中都体现出来了.

在编写和出版该书的过程中得到了有关领导的大力支持和帮助，在此一并表示感谢.

囿于水平，加之时间仓促，书中存在的错误和不当之处，恳请读者批评指正.

编　者

2013 年 9 月

目录

第1篇　线性代数

第 1 篇

线性代数

第 1 章　行列式

行列式实质上由一些数值做成的方阵按照一定规则计算得到的一个数，是线性代数的基础内容，在线性方程组、矩阵、向量组的线性相关性、特征值及正定矩阵的研究中有所应用.

本章重点:

(1) 行列式的计算.

(2) 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是否为零的判定.

1.1　行列式的概念

1.1.1　知识点梳理

1) 排列与逆序

定义 1　由自然数 1, 2, …, n 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 n 级排列.

定义 2　在一个 n 级排列中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序数的总数称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1, i_2, \cdots, i_n)$.

2) n 阶行列式的概念

定义 3　n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.1)$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和，式(1.1)称为 n 阶行列式的完全展开式.

注: ① n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

② 每项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;

③ 每项的符号是：当该项元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

n 阶行列式也可定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum (-1)^S a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

其中 S 为行标与列标排列的逆序数之和，即

$$S = N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n).$$

n 阶行列式还可定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

1.1.2 题型归类与方法分析

题型 1 关于行列式的概念

例 1 已知 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是 6 阶行列式中的一项，确定 i，j 的值以及此项所带的符号.

【解】 根据行列式的定义，它是不同行不同列元素乘积的代数和. 因此，行指标

$$2,\ 3,\ i,\ 6,\ 5,\ 1$$

应取自 1 至 6 的排列，故 $i = 4$. 同理可知，$j = 2$.

关于此项所带的符号，可有两种思路：

(1) 将该项按行的自然顺序排列，有 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15} = a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$，后者列的逆序数为 $N(531\,264) = 7$，所以该项应带负号.

(2) 直接计算行的逆序数与列的逆序数，有 $N(234\,651) + N(312\,465) = 9$，也知此项应带负号.

例 2 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}$，证明 $f'(x) = 0$ 有小于 1 的正根.

【分析】 按行列式定义易知 $f(x)$ 是 x 的多项式，显然 $f(x)$ 连续且可导. 根据罗尔定理，只需证明 $f(0) = f(1)$.

【证明】 因为 $f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$，$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$，又知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f'(\xi) = 0$，即 $f'(x) = 0$ 有小于 1 的正根.

1.2 行列式的计算

1.2.1 知识点梳理

1) 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

注: 由性质(1)可知,行列式的行与列具有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有.

(2) 交换行列式的两行(列),行列式变号.

注: 交换行列式 i, j 两行(列),记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1 若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

(3) 行列式中某一行(列)有公因子 k,则 k 可以提到行列式符号外. 特别地,若行列式中某行(列)元素全是零,则行列式的值为零.

推论 2 行列式两行(列)元素对应成比例,则此行列式为零.

(4) 如果行列式中某行(列)的每个元素都是两个数的和,则此行列式可以拆成两个行列式的和.

注: 由于 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应该拆成 2^n 个行列式之和,故一般情况下

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|.$$

(5) 把行列式某行(列)的 k 倍加至另一行(列),行列式的值不变.

注: 在行列式计算中,往往先利用性质 5 作恒等变形,以期简化计算.

2) 行列式按行(列)展开

定义 4 在 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中去掉元素 a_{ij} 的第 i 行以及第 j 列元素后的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},再记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

引理 1 一个 n 阶行列式 D,若其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零,则该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

定理 1 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或

$$|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

推论 3 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\ i\neq j$$

综上所述,可得到有关代数余子式的一个重要性质:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

3) 行列式的计算

(1) 化三角形行列式计算行列式. 计算行列式时,常利用行列式的性质,把它化为三角形行列式来计算. 例如,化为上三角形行列式的步骤为:

如果第一列第一个元素为0,先将第一行与其他行交换,使得第一列第一个元素不为0,然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行,使得第一列除第一个元素外其余元素全为0;再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式;如此继续下去,直至使它成为上三角形行列式,这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

(2) 降阶法计算行列式. 直接利用按行(列)展开法则计算行列式,运算量较大,尤其是高阶行列式. 因此,计算行列式时,一般先利用行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含有一个非零元素,再按此行(列)展开,化为低一阶的行列式,如此继续下去直到化为三阶或二阶行列式.

(3) 几种特殊行列式的计算:

① 上(下)三角形行列式等于其主对角线上元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ * & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

② 关于副对角线以外元素全为0的行列式,其计算公式为

$$\begin{vmatrix} * & & a_{1n} \\ & a_{2n-1} & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & a_{2n-1} & \\ a_{n1} & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

③ 拉普拉斯展开式,设$\boldsymbol{A}$是m阶矩阵,$\boldsymbol{B}$是n阶矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

④ 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ & & \cdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j).$$

(4) 有关行列式的几个重要公式：

① 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

② 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

④ 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

⑤ 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

⑥ 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

4) 题型归类与方法分析

题型2 数字型行列式的计算

(1) 直接降阶计算行列式.

例3 计算 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_n$.

【解】 直接按第一列展开，得

$$|\boldsymbol{A}|=x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}+y(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

(2) 行(列)元素之和相等的行列式(归一法).

例4 计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots & & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_n$.

【分析】 行列式中各行元素之和都为 $a+(n-1)b$，故可把行列式各列同时加到第一列，提出公因子 $a+(n-1)b$，然后各行减去第一行，化为上三角形行列式来计算.

【解】 $$|\boldsymbol{A}|\overset{c_1+c_2+\cdots+c_n}{=}\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots & & \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ & & \cdots & & \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \cdots\\ r_n-r_1}}{=}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(3) 箭形行列式.

例 5 计算 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_n$ $(a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n)$.

【分析】 对于所谓的箭形行列式,可直接利用行列式的性质将其一条边化为零,从而根据三角或者次三角行列式的结果求值.

【解】 先将第 i 列提出 a_i,再把第 i 列的 -1 倍加至第 1 列 $(i=2,3,\cdots,n)$,得

$$|\boldsymbol{A}|=a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix} a_1 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=a_2a_3\cdots a_n\begin{vmatrix} a_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$=a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

(4) 递推法.

例 6 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$.

【解】 按第 1 列展开,有

$$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2},$$

得 $$D_n-aD_{n-1}=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2});$$

从而 $$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})$$
$$=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n,$$

那么 $$D_n = a^n + aD_{n-1} = a(aD_{n-2} + a^{n-1}) + a^n = a^2D_{n-2} + 2a^n$$
$$= \cdots = a^{n-1}D_1 + (n-1)a^n = (n+1)a^n.$$

(5) 数学归纳法.

例 7 证明 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)a^n$.

【证明】 当 $n=1$ 时，$D_1 = 2a$，命题正确.

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$，命题正确.

设 $n=k$ 时，$D_k = (k+1)a^k$ 正确，下证当 $n=k+1$，命题正确.

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k+1}$$，对 D_{k+1} 按第一列展开得

$$D_{k+1} = 2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}_k + a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}_k$$
$$= 2aD_k - a^2D_{k-1},$$

按归纳假设 $D_k = (k+1)a^k$，$D_{k-1} = ka^{k-1}$，从而
$$D_{k+1} = 2a(k+1)a^k - a^2ka^{k-1} = (k+2)a^{k+1}.$$

证毕.

(6) 范德蒙行列式.

例 8 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ & \cdots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

【解】 考虑 $n+1$ 阶范德蒙行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&y\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2&y^2\\&&\cdots&&\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&y^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&y^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

易知原行列式是上式中 y^{n-1} 项系数的相反号，而上式 y^{n-1} 项系数为

$$-\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

故所求的行列式为

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

(7) 关于某行(列)元素的余子式或代数余子式的线性组合.

例 9 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$，$D$ 中元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式依次记为 M_{ij} 和 A_{ij}，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 及 $M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

【解】 注意到 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$ 中其线性组合系数分别为 1，所以用 1，1，1，1 代替 D 的第 1 行所得的行列式，可得

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}=4,$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}=\begin{vmatrix}1&-5&2&1\\-1&1&0&-5\\1&3&1&3\\-1&-4&-1&-3\end{vmatrix}=0.$$

题型 3 抽象行列式的计算

例 10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.