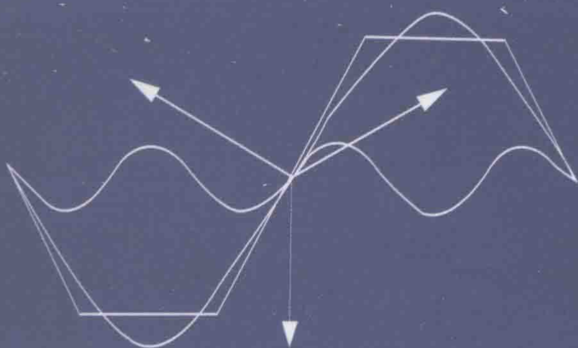
向量与谐波

XIANGLIANG YU XIEBO

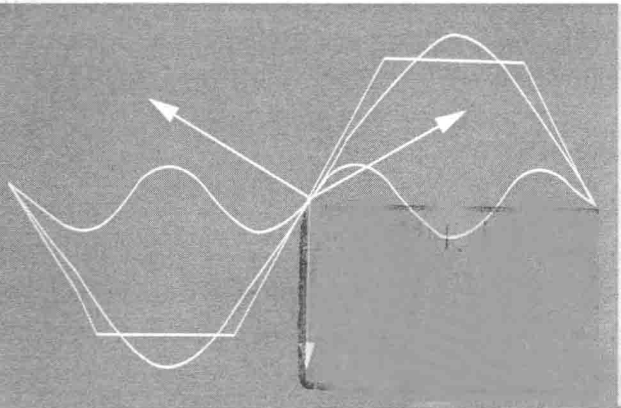
倪均祥◎编著



贵州出版集团
GUIZHOU PUBLISHING GROUP
贵州科技出版社

向量与谐波

XIANGLIANG YU XIEBO



倪均祥◎编著

贵州出版集团
GUIZHOU PUBLISHING GROUP
贵州科技出版社

图书在版编目(CIP)数据

向量与谐波/倪均祥编著.—贵阳:贵州科技出版社,2013.1

ISBN 978-7-5532-0047-7

Ⅰ.①向… Ⅱ.①倪… Ⅲ.①向量—应用—谐波 Ⅳ.①O455

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 271297 号

作　　者:倪均祥
责任编辑:彭丽蕾
出版发行:贵州出版集团　贵州科技出版社
地　　址:贵阳市中华北路 289 号
邮政编码:550004
网　　址:http://www.gzstph.com　http://www.gzkj.com.cn
经　　销:全国各地新华书店
印　　刷:贵州兴隆印务有限责任公司
开　　本:850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张:8.25
字　　数:230 千字
版　　次:2013 年 1 月第 1 版
印　　次:2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价:28.00 元

前　言

在交流电路中，由于电感和电容的存在，致使电流、电压（或电势）不仅具有大小，而且具有方向，使向量这一概念广泛存在于交流电路之中。在分析交流电路时，借用向量图进行剖析和计算，是一非常重要的工具，犹如写字离不开笔一样。于此，本书对电工向量的概念和应用进行全面系统分析。

我们很熟悉一个三相不对称电路，应用向量对称分量法，将一组不对称量（电压、电势或电流），分解成三组对称分量，即正相序、负相序、零相序。当该不对称电路存在于同步发电机中，由于负相序电流的存在，定子和转子中分别出现奇次和偶次谐波。反之，高次谐波存在于三相电路中（即三相对称的非正弦电路，可分解出一系列高次谐波），又分别组成正相序、负相序及零相序系统。因此，交流电路中的向量与谐波有着相互联系。在一般电气设备运行中，高次谐波的发生是不受欢迎的。因此，对工频谐波的分析、产生、危害及削弱的方法，应该有一个系统的认识。

虽然，对向量与谐波的有关介绍，分散于一些书籍和杂志之中，但专题论述并不多。这对具有一定电工基础理论，且具有丰富生产实践经验的读者，深感不足。笔者运用数学方法与物理概念广泛结合，遵循在普及基础上提高的原则，本着由浅入深的精神，力求简明扼要，加以系统总结，且掺入了自己的看法和见解。

由于水平问题，疵谬难免，恳请读者批评指正，以利再版，以飨读者。

作者

2012 年 6 月

目 录

第一章　向量代数学基础

第一节　向量概念

量是客观事物的属性之一，被测量而得到数。因此，凡是可以测量的对象都叫做量。例如：面积、温度、时间、电流、电压……都是量。由量测出来的数，称为量的值，或数值。

我们在生产实践和日常生活中，所遇到的量可以分成两种类型：标量和向量。仅具有大小的量叫标量。如质量、密度、时间、电荷、体积等。不仅具有大小，而且具有方向的量叫向量或矢量。如力、速度、位移、电流、电压、电动势等。

向量的画法，用带有箭头的有向线段表示（图 1－1）。

向量的符号记为 $\bar{A}$ 或 $\vec{A}$ 及 $\dot{A}$，为便于印刷，用黑体字母（如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$）表示向量。

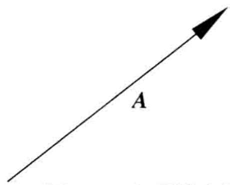


图1–1　向量的表示

线段的长度叫向量的模或绝对值，记为 $|\boldsymbol{A}|$，它表示向量的大小。显然，向量相等必须满足 3 个条件：

(1) 模相等；

(2) 方位相同（即同在一直线或分别在两平行线上）；

(3) 指向相同。

根据上面向量相等的条件，如图 1－2，$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CD}$。可知每一个向量只由它的模与方向（方位及指向）决定，而与起点位置无关。但在自然科学中，许

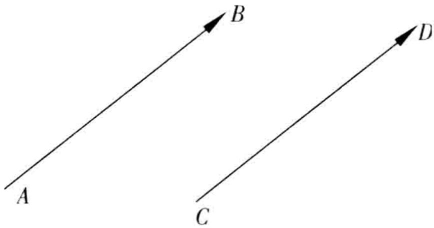


图1–2　两相等向量

多问题中的向量与起点位置有关。因此，我们把起点可以移动的向量叫自由向量。而起点不可以任意移动的向量可分为滑动向量及固定向量两种。滑动向量的起点只可以沿向量所在的直线移动，例如作用于刚体的力就是滑动向量。如有两个力，在同一直线上，大小相等且方向相同，则这两个力对于同一刚体的作用是相等的。固定向量的起点是固定的，如作用于弹性体或液体上质点的力，即为固定向量。固定向量不仅由大小和方向决定，且与起点位置有关。两个固定向量，若其大小和方向相同，起点不同，就不能算是相等。

但滑动向量和固定向量都可以归入自由向量来研究，所以向量代数只研究自由向量，并且是常向量。

实际上向量计算包括两部分：向量代数（也称向量几何运算）和向量分析。向量代数计算对象为常向量；向量分析计算对象为变向量。常向量就是模与方向都保持不变的向量；变向量就是模变而方向不变（向量的终点在从起点射出的射线上变动），或方向变而模不变（向量的终点在以起点为中心，模为半径的球面上变动），或模与方向都改变的向量。

向量分析是高等数学研究的内容，本章不涉及，我们只用初等数学中的向量代数方法去计算常向量。显然，上述所讲自由向量，应是常向量。在电工学中，交流电的电流、电压、电动势常用正弦函数来表达。以正弦函数所表示的物理量叫正弦量。取一单位圆（图1-3），P 点以 O 为圆心，半径为 R，与横轴夹角为 φ，以 ω 速度沿逆时针方向旋转，向量 $\boldsymbol{OP}$ 在纵轴上的投影即为不同时刻的瞬时值，那么向量 $\boldsymbol{OP}$ 是一个以模为常量，且模等于 R，方向变化的变向量。$\boldsymbol{OP}$ 在纵轴上的投影，每一瞬时值即为 $OP_y = R\sin(\omega t + \varphi)$。

从上式不难看出，向量 $\boldsymbol{OP}$ 在纵轴上的投影，是随时间变化（以时间为函数）的正弦量。我们把以时间为函数变化的向量规定为时间向量，也叫旋转向量。

旋转向量是一变向量，以空间向量的形式表示。空间向量就是空间内的有向线段，是以向量模与坐标轴的夹角来表达的，如机械力、位移、线速度等。

我们不但要提出任务，而且要找到完成任务的方法。

再看图 1 - 3，向量 **OP** 以 ω 速度逆时针旋转时，$t=0$ 时（旋转向量还未旋转，即起始位置），**OP** 与横轴的夹角 φ，称为初相位，或初相角。当旋转向量 **OP** 逆时针旋转到与纵轴重合时，在纵轴上的投影等于 R，即为正弦量的最大值。已知正弦量的初相位和最大值，就可将旋转向量转化为以常向量表示（也就是只需画出它的起始位置），并以空间向量的形式表达，如图 1 - 4。

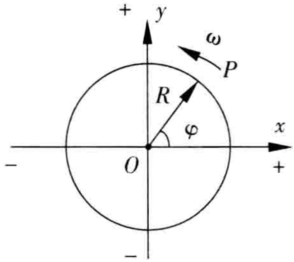


图1-3　旋转向量

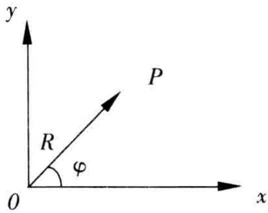


图1-4　空间向量

当然，电工学中的向量，往往是以极坐标的形式出现，而向量的模（在极坐标中即为向径），等于其有效值，而将另一向量作为极坐标中的极轴，两向量间的夹角作为极坐标中的极角，用以表达交流电路中向量间的关系。例如三相（A、B、C）对称交流电源，其电动势的电角度为 120°，向量表示如图 1 - 5。

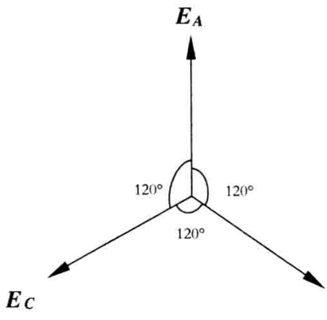


图1-5　三相对称交流电路中电动势的向量图

向量代数只研究自由向量，而且是常向量。本书以后所说向量均为自由向量，且为常向量，简称向量。

向量的运算规律是对物理学中有方向的量，加以数学的抽象化而建立起来的，它的基本运算有加、减、乘三种。加减运算以及实数与向量相乘的运算，叫线性运算。但向量与向量相乘，所得乘积可能为标量，

也可能为向量，要看相乘向量所处的空间几何位置。至于三个向量相乘，在电工学中不曾应用，本书不作讨论。

这里需要注意，向量与向量相乘的向量代数运算，不能完善解决电工学中的实际问题，必须借助复数。

第二节　向量加法

向量的运算规律是对物理量中的力、速度、加速度等加以数学的抽象化而产生的，因而，它的运算很自然地要根据这些物理量的特性来规定，不能与普通代数运算相同。

假若将一物体从 A 点移到 B 点经过 100 米，从 B 点移到 C 点为 60 米，再从 C 点移回到 A 点为 70 米（如图 1－6）。

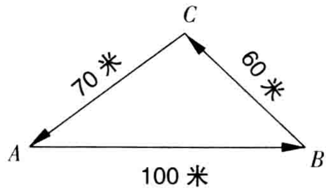


图1-6　物体位移等于零

该物体位移应等于零，用向量表示为：

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CA} = 0$$

而不能用代数量相加计算位移，即：

$$100 + 60 + 70 = 230(\text{米})$$

两种运算，结果截然不同。所以向量运算必须考虑其方向，要用作图的方法，不能将向量的大小（即模）直接相加。

一、平行四边形法则

向量加法，称为向量的合成，即和向量或向量和。例如求向量 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 时（如图 1－7），先作一平行四边形，对角线 $\boldsymbol{OC}$ 就代表和向量 $\boldsymbol{C}$。这种方法叫做平行四边形法则。

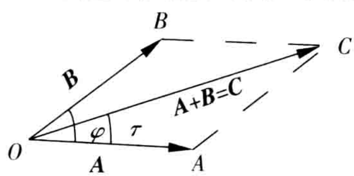


图1-7　平行四边形法则求向量和

当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向

（$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的夹角以 φ 表示）为已知时，和向量 $\boldsymbol{C}$ 的大小及方向（$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的夹角以 τ 表示）可用以下两个公式表示：

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\varphi$$

$$\tan\tau = \frac{B\sin\varphi}{A + B\cos\varphi}$$

上述向量的加法运算规则，当然不是任意规定的，更不是空想出来的，因为在求力、速度的合成问题时，由实验得出的和向量，就是和力或和速度。

二、三角形法则

向量加法，也可以应用三角形法则。事实非常明显，因为任何一个平行四边形都是由两个以其对角线为公共边的全等三角形组成的，而且我们所研究的向量均为自由向量，将向量 $\boldsymbol{B}$ 移动，使向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 首尾相接，然后连接向量 $\boldsymbol{A}$ 的首端和向量 $\boldsymbol{B}$ 的尾端，便得和向量 $\boldsymbol{C}$（如图 1－8）。

显然，三角形法则是由平行四边法则推演而来，三角形法则较平行四边法则作图更简便迅速。

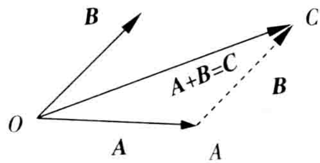


图1-8　三角形法则求向量和

上述两个向量相加的方法，可推广到若干个向量相加。如图 1－9 中，将诸向量移动，其首尾相接，一一顺次相连成有向折线，最后一个向量的尾端与第一个向量的首端连接起来的封闭线，即为所有向量之和。实际就是两个向量之和再与第三个向量相加，所得之和再与第四个向量相加 …… 依此类推。

若两个或两个以上向量，方位相同（即同在一直线上或分别平行），指向相同或相反，其向量和即为代数和。

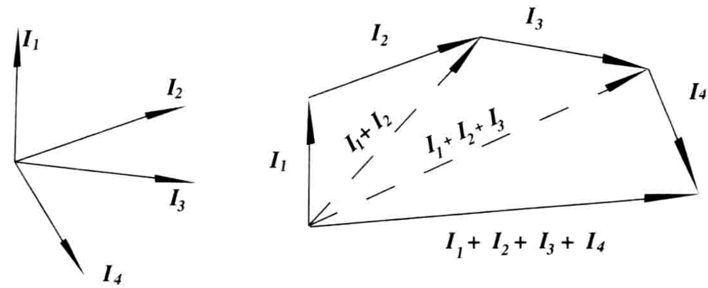


图1-9　两个以上的向量相加

第三节　向量减法

两个向量相减所得的差叫向量差。向量减法是向量加法的逆运算，向量减法可用向量加法代替，将减数作为负向量，与被减数之和，即：

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$

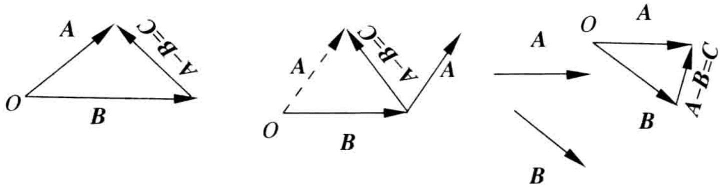
何谓负向量？两个向量模相等，方位相同，而指向相反，我们就说其中一个是另一个的负向量。$\boldsymbol{A}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{A}$。

两个向量相减有两种方法：三角形法则；向量减法转化为向量加法。

一、三角形法则

三角形法则是由向量加法的逆运算推演而来。

首先将两个向量首端集中于一点，然后两个向量的尾端相连即为向量差，差向量指向被减数的尾端（如图 1－10 所示）。

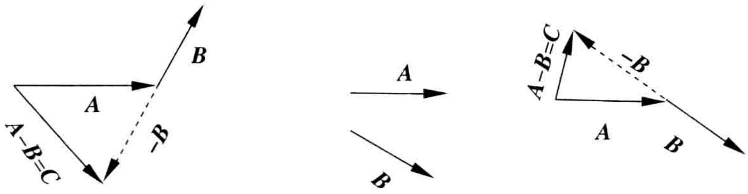


（a）两向量首端集中于O　　（b）移动A使首端集中于O　　（c）两向量移动首端集中于O

图1-10　两向量相减

二、两向量相减，转化为两向量相加

将减数作为负向量，其首端与被减数的尾端相接，然后再将被减数的首端和负向量的尾端相连，差向量指向负向量的尾端。确定了负向量之后，与向量加法运算一样（如图 1 －11 所示）。



(a)　　(b)

图1-11　两向量相减用加法代替

两个以上向量相减，参照两个以上向量相加的方法，予以推广（如图 1 －12 所示）。

若两个向量方位相同，指向相反，其向量差等于两向量模相加，差向量指向被减数尾端。因此，向量差的大小，不一定比向量和小。

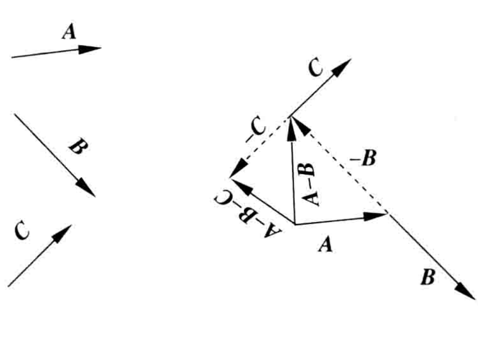


图1-12　两个以上向量相

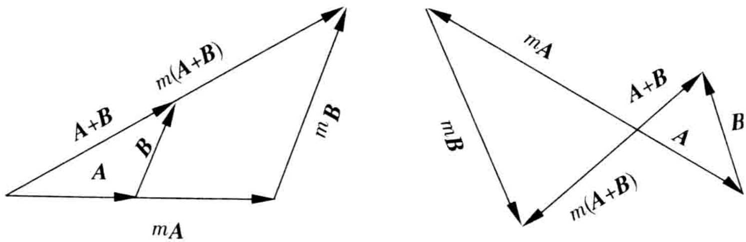
第四节　实数与向量相乘

当实数 m 与一向量 $\boldsymbol{A}$ 相乘，其积仍为向量，记为 $m\boldsymbol{A}$。

$m>0$ 时，积向量方向和 $\boldsymbol{A}$ 相同；

$m=0$ 时，积向量为零，方向不定；

$m<0$ 时，积向量方向和 $\boldsymbol{A}$ 相反（图 1－13）。



(a) $m>0$　　　(b) $m<0$

图1–13　实数与向量相乘

$m=0$ 在实际应用中显然没有什么意义。但 $m>0$，或 $m<0$，在电工学中是经常遇到的。

$m>0$ 时，例如三相四线制电路中，三相电源电压或三相负载不对称，中线电流等于 3 倍零序电流，公式表示为：

$$3\boldsymbol{I}_O=\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B+\boldsymbol{I}_C$$

或 $$\boldsymbol{I}_O=\frac{1}{3}(\boldsymbol{I}_A+\boldsymbol{I}_B+\boldsymbol{I}_C)$$

即 $m=3$（如图 1－14 所示）。

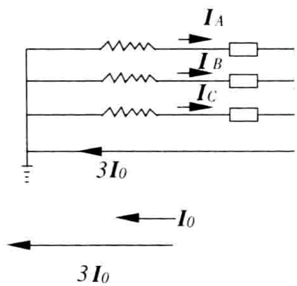


图1–14　中性线的零序电流

当 $m<0$ 时，若三相三线制（没有中线）电路中（图 1－15），A 相断线（即 $\boldsymbol{I}_A=0$），所造成的三相不对称电路，根据三相不对称电路的分析，三个线电流之和永远为零，公式表示为：

$$I_O = \frac{1}{3}(I_A + I_B + I_C) = 0$$

其中 $I_A = 0$,则:

$$\frac{1}{3}(I_B + I_C) = 0, I_B = -I_C$$

虽然向量 I_C 和向量 I_B 模相等方向相反,互为负向量,也可以看作向量 I_C 乘 $m = -1$ 的一个实数后等于向量 I_B(图 1 - 15)。

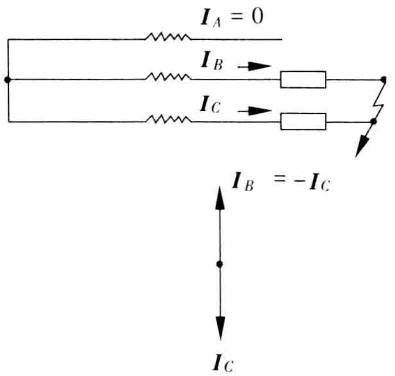


图1–15　不对称电路向量

再看图 1 - 13,同时也证明了实数与向量相乘的分配律,即 $m(A + B) = mA + mB$。

而结合律 $m(nA) = mnA$ 和交换律 $mA = Am$,显然更容易证明。

当然,向量加法同样服从普通代数的交换律 $A + B = B + A$ 和结合律 $A + (B + C) = (A + B) + C$。因此,我们可得一结论:向量的线性运算,在形式上完全和普通代数一样,但是,在本质上又完全是两回事。

第五节　向量乘法

两个向量相乘之积，根据已知的向量条件确定是标量（即标积，也叫点积、内积或直积），或者是向量（即矢积，也叫向量积，或叫螺旋积）。这同样与向量和的概念一样，是对某些物理量加以数学的抽象化而产生的。

将两个向量的大小（模），与两向量夹角的余弦相乘的积，定义为两向量的标积。

例如功是力在路程方向上的投影与路程相乘的积（图1－16）。设力为 $\boldsymbol{F}$，路程为 $\boldsymbol{S}$，即得：

$$功=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos\alpha$$

功是标量，它的大小是由两个向量 $\boldsymbol{F}$ 及 $\boldsymbol{S}$ 的大小和方向来决定的。因此，我们就把这个标量，叫做两个向量的标积。

又如在电工学中的功率，也是一标量，在交流电路中，一般感抗大于容抗，电压超前电流一个 φ 角（图1－16）。而有功功率，是电压在电流方向上的投影，即为：

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{U}=|\boldsymbol{I}||\boldsymbol{U}|\cos\varphi$$

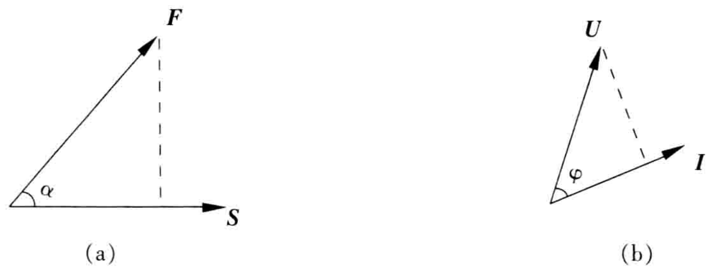


图1－16　两向量的标积

从图 1－16 中可知，若夹角 α 或 φ 为 90° 时，标积为零；α 或 φ 为零时标积等于两向量模的乘积；α 或 φ 为钝角时，从标积定义可