高等学校“十二五”规划教材 | 基础课

大学文科数学

■主 编 庞栓琴
■副主编 郭 强 秦 雨

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十二五”规划教材|基础课

大学文科数学

主　编　庞栓琴
副主编　郭　强　秦　雨

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书根据高等学校大学文科数学教学大纲的基本要求编写而成.

全书分为四个部分：第一部分为微积分，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分和定积分；第二部分为线性代数，内容包括行列式、矩阵及其运算、线性方程组；第三部分为概率论与数理统计，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基础和统计推断；第四部分为数学实验，内容包括MATLAB数学实验和用Excel软件解决数理统计问题.

全书例题丰富，除第四部分外，每章均配有一定数量的习题和自测题，书末附有习题和自测题参考答案，便于教师教学与学生自学.

本书可作为高等院校各个文科专业的教材及参考书，适当取舍内容后也可用于专科、高职各层次的经管类和文科专业等各类教学当中，亦可供自学者使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/庞栓琴主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2012.8
高等学校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-5606-2840-0

Ⅰ.①大… Ⅱ.①庞… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第135051号

策　　划　戚文艳
责任编辑　王　瑛　戚文艳
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张 23
字　　数　546千字
印　　数　1～3000册
定　　价　40.00元
ISBN 978-7-5606-2840-0/O·0134

XDUP 3132001-1

如有印装问题可调换

本社图书封面为激光防伪覆膜，谨防盗版。

前　言

目前我国许多高校的文科专业都开设有“大学文科数学”或者“文科高等数学”课程．一个大学生在中小学阶段已学过12年的数学，数学教育是其所受的时间最长的教育之一．那么，为什么到了大学阶段还要学习数学？特别是对文科专业的学生，安排他们学习数学的目的何在？

大家知道，数学的应用在近几十年来已经发生了根本的变化，数学已渗入到几乎所有的学科领域．“高科技本质上是数学”这句话已经得到越来越多的人们的认同．数学追求一种完美的理性认识，要求对研究的对象有确切无误的刻画，从简单而明确的命题出发，以准确而令人信服的逻辑推理达到其明确的结论．数学追求的是一种理性精神，追求的是真、善、美．

对文科专业的学生，我们强调的不是数学方法的应用，而是对数学作为一种文化精神、思维方式的认识，特别是对贯穿于数学学科中的那种无与伦比的理性精神的认识．

本书是按照高等学校大学文科数学教学大纲的基本要求，并结合作者多年在实际授课过程中的体会而编写的．全书共分四部分，包括微积分、线性代数、概率论与数理统计以及数学实验．本书从各个角度比较自然地引入了数学的基本概念，既展现了数学知识的来龙去脉，又保持了数学所特有的形式化本质特征；列举了一些有应用价值的实例，并扼要地阐明了具有启发意义的数学思想方法；通过对数学内容的辩证分析、典型数学史料的穿插融会，以及章末附设“阅读材料”等形式，介绍了数学与逻辑、数学与哲学、数学与教育、数学与文化、数学家品质与业绩等内容，渗透了数学的人文精神．每章首设有本章的主要内容及要求；除第四部分外，每章末(微积分部分是每节末)配有相关习题，同时，为使学生能对自己的学习效果进行自我检测，每章末还配有自测题；带*号的章节对文科学生可能会有一定的难度，这部分内容可在教学过程中酌情选用．基于文科数学学时的限制，在必须精简的前提下，本书在教学内容的选择与组织上充分注意了学科的系统性．

庞栓琴担任本书主编，郭强、秦雨担任副主编．本书第一部分及阅读材料由秦雨编写；第二部分由庞栓琴编写；第三部分和第四部分由郭强编写．全书由王雪峰教授主审．本书在编写过程中，得到了丁正生教授和乔宝明教授的鼓励和支持，同时也得到了西安科技大学(特别是高新学院)许多老师的大力支持和帮助，在此表示深深的谢意．

由于编者水平所限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正．

编　者

2012年3月

目　　录

第一部分　微　积　分

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

第四部分　数学实验

第一部分

微 积 分

微积分是近代数学中最伟大的成就，对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分.

——冯·诺依曼

公元前 3 世纪，古希腊的阿基米德在解决抛物弓形的面积、球和球冠的面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的方法中就隐含着近代积分学的思想. 作为微分学基础的极限理论，早在古代就有比较清楚的论述. 比如我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”. 三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周和体而无所失矣. ”这些都是朴素的、也是很典型的极限概念.

到了 17 世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素. 归结起来，大约有四种主要类型的问题：第一类问题是研究运动的时候直接出现的，也就是求即时速度的问题；第二类问题是求曲线的切线的问题；第三类问题是求函数的最大值和最小值问题；第四类问题是求曲线的长度、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力的问题.

17 世纪许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题做了大量的研究工作. 如法国的费马、笛卡尔、罗伯勃、笛沙格，英国的巴罗、瓦里士，德国的开普勒，意大利的卡瓦列利等人都提出了许多很有建树的理论，为微积分的创立做出了贡献.

17 世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国科学家牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度独自研究并完成了微积分的创立. 他们的最大功绩是把两个貌似毫不相关的问题联系在一起，一个是切线问题(微分学的中心问题)，一个是求积问题(积分学的中心问题).

直到 19 世纪初，法国科学院的科学家以柯西为首，对微积分的理论进行了认真研究，建立了极限理论，后来又经过德国数学家魏尔施特拉斯进一步地严格化，使极限理论成为了微积分的坚定基础，从而使微积分进一步地发展开来.

第1章 函 数

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．本章将介绍函数的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础．

本章的基本要求如下：

（1）了解函数的定义，会计算函数的定义域．

（2）了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性．

（3）了解复合函数的基本概念，会分解复合函数．

（4）掌握反函数的概念及计算方法．

（5）了解初等函数的概念．

（6）了解分段函数的概念．

1.1 函数的概念

历史上，“函数”这个概念是由著名的德国数学家莱布尼茨首先引入的，其后经过欧拉等人不断修正、扩充和完善，现在逐步形成了一个较为完整的概念．

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着．17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海等问题）的研究中引出了函数这个基本概念．在那以后的 200 多年里，这个概念几乎在所有的科学研究工作中占据了中心位置．

本节将介绍函数的概念和函数关系的构建．

1.1.1 集合的基本概念

所谓集合，就是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物称为该集合的元素．例如：

（1）某大学在校生的全体为一集合；

（2）方程 $x^2-3x+2=0$ 的解为一集合；

（3）直线 $y=2x+1$ 上所有的点为一集合．

其中：(1)和(2)中的元素只有有限个，这样的集合叫做有限集；(3)中的元素有无限多个，这样的集合叫做无限集．

通常情况下，集合用大写字母(如 A、B、C)表示，其元素用小写字母(如 a、b、c)表示．

设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的一个元素，则记做

$$a\in A$$

如果 a 不是 A 的元素，则记做

$$a\notin A$$

集合中的元素具有唯一性、排他性和无序性.

集合一般有两种表示方法：列举法和描述法. 所谓列举法，就是把集合中的所有元素都列举出来. 比如由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根组成的集合，可表示为

$$A=\{1,2\}$$

而描述法则是给出集合中元素所具有的共性，一般用

$$A=\{x\,|\,x\text{ 所具有的特征}\}$$

来表示. 比如满足方程 $y=2x+1$ 的点组成的集合，可表示为

$$A=\{(x,y)\,|\,y=2x+1\}$$

还有一些比较特殊的集合，比如不含任何元素的集合，称为空集，记做 $\varnothing$. 如方程 $x^2+1=0$ 的实数解集合就是空集.

1.1.2 集合的关系与运算

定义 1.1.1 设 A、B 是两个集合，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，即如果 $a\in A$，则 $a\in B$. 那么称 A 为 B 的子集，记做

$$A\subseteq B\text{ 或 }B\supseteq A$$

读做 A 包含于 B 或 B 包含 A. 若又有 $b\in B$ 但 $b\notin A$，则称 A 真包含于 B 或 B 真包含 A，记做

$$A\subset B\text{ 或 }B\supset A$$

定义 1.1.2 设 A、B 是两个集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记做 $A=B$.

注意 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

定义 1.1.3 设 A、B 是两个集合，由集合 A 与 B 的公共元素所构成的集合称为集合 A 与 B 的交集，记做

$$A\cap B$$

即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

交集具有以下简单性质：

(1) $(A\cap B)\subset A$；

(2) $(A\cap B)\subset B$.

例 1.1.1 有直线点集 $A=\{(x,y)\,|\,y=2x+1\}$ 和 $B=\{(x,y)\,|\,y=-x+4\}$，则两条直线的交点构成了两个集合的交集 $A\cap B=\{(1,3)\}$.

定义 1.1.4 设 A、B 是两个集合，由集合 A 与 B 的所有元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并集，记做

$$A\cup B$$

即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

并集具有以下简单性质：

(1) $(A\cup B)\supset A$；

(2) $(A\cup B)\supset B$.

例 1.1.2 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}\cup\{2, 4, 6, 8, 9\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

定义 1.1.5 由所研究对象的全体构成的集合叫做全集，记做 Ω. 设 $A\subset\Omega$，那么由 Ω 中所有不属于 A 的元素构成的集合叫做集合 A 在 Ω 中的补集，记做

$$A^{\mathrm{C}} \quad \text{或} \quad \overline{A}$$

即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in\Omega \text{ 且 } x\notin A\}$$

例 1.1.3 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，则 $\overline{A}=\{2, 4, 6, 8\}$.

集合之间的运算满足以下定律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.3 实数集

我们首先来看看数的发展. 人类对于数的认识是逐步发展的. 最早认识的是自然数 0，1，2，3，…，其中对于 0 的认识要明显晚于对其他自然数的认识. 全体自然数的集合称做自然数集，记做 $\mathbf{N}$. 在 $\mathbf{N}$ 中我们可以定义加法和乘法. 但是当利用自然数进行减法运算时，自然数集就不够用了. 于是我们将自然数集扩充到整数集 $\mathbf{Z}$. 之后又为了除法的需要发展出了有理数集 $\mathbf{Q}$. 这样在 $\mathbf{Q}$ 中我们就可以进行四则运算了.

任何一个有理数都可以写成两个整数的商的形式，也就是$\dfrac{p}{q}$(其中 p，$q\in\mathbf{Z}$ 且 $q\neq 0$). 然而并不是所有的数都可以表示成这种形式的，例如一个直角三角形两个直角边长都为 1，那么根据勾股定理，可以得到其斜边的长度为$\sqrt{2}$，这个数就不能表示成$\dfrac{p}{q}$的形式，因此它不是有理数. 我们把这样的数称为无理数. 我们所熟知的无理数如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π 等. 有理数和无理数统称为实数. 全体实数构成的集合叫做实数集，记做 $\mathbf{R}$.

实数集中的任何一个实数都可以和数轴上的唯一一个点相对应；反之，数轴上的任何一个点也可以和唯一一个实数相对应. 这样在以后的讨论中，我们就不详细区分数轴上的点和实数了.

微积分所研究的对象，就是现实世界中的事物在数量上的相互依赖关系，而这种数量关系都是建立在实数集的基础上的.

1.1.4 区间

在 $\mathbf{R}$ 的子集中，我们经常会遇到各种各样的区间，实际上就是各种集合. 区间可以是开、闭或半开半闭以及有限或无限的，如图 1.1.1 所示.

注意 在图 1.1.1 中，$-\infty$和$+\infty$只是一种符号，既不能把它们视为实数，也不能对它们进行运算.

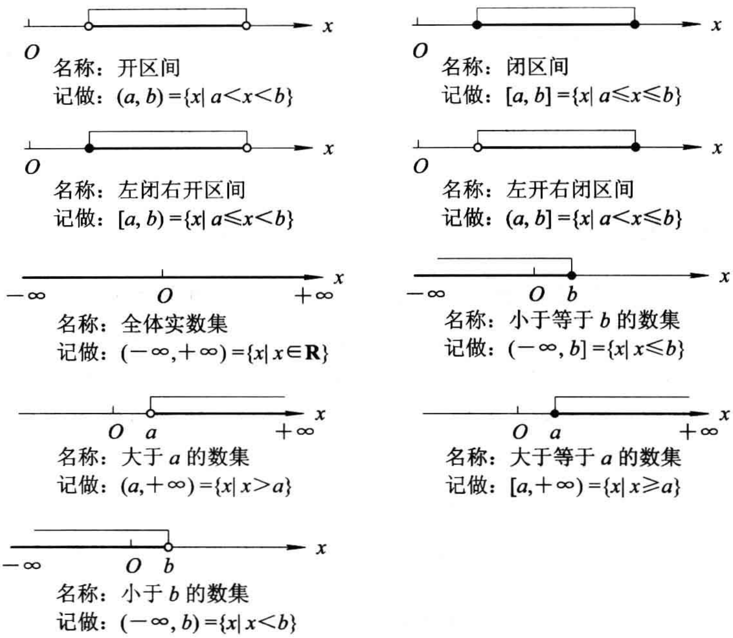

图 1.1.1

1.1.5 绝对值

定义 1.1.6 设 $x\in\mathbf{R}$，x 的绝对值是一个非负实数，记做 $|x|$，其定义为

$$|x|\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

例如，$|5|=5$，$|-2|=2$. 绝对值在几何上表示的是数轴上的点到原点的距离.

常用绝对值的运算性质如下：

(1) $|xy|=|x||y|$；

(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$；

(3) $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$；

(4) 设 $a>0$，则 $|x|\leqslant a\Rightarrow -a\leqslant x\leqslant a$，$|x|\geqslant a\Rightarrow x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$.

1.1.6 邻域

邻域实际上就是一个特定的区间.

定义 1.1.7 设 $a\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，称集合

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

为 a 的一个 δ 邻域，记做 $U_\delta(a)$，其中 a 叫做邻域的中心，δ 叫做邻域的半径，如图 1.1.2 所示. 显然

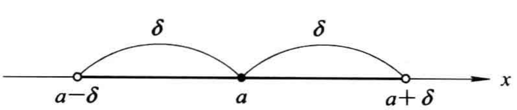

图 1.1.2

$$U_\delta(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记做 $U_\delta(\bar{a})$，即

$$U_\delta(\bar{a}) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

1.1.7　函数的概念

早在文艺复兴时期，随着封建社会的瓦解，资本主义开始兴起. 当时的力学、天文学等自然科学为了适应实践的需要，把运动作为研究主题，对各种变化过程和过程中变量之间的相互依赖关系进行了深入的研究，进而产生了函数的概念. 当然这一概念不是一蹴而就的，它历经了伽利略、笛卡尔、牛顿、莱布尼茨、欧拉、狄利克雷等多位科学家的思索提炼，才形成了现今人们所理解的函数模型.

为了更好地理解函数，先来看下面两个例子：

(1) 水达到沸点的温度取决于海拔高度(当人往高处走时沸点下降)；

(2) 某人的存款额在一年中的增长取决于银行的利率.

在上述两种情况中，一个变量的值取决于另一个变量的值. 水的沸点 b 取决于海拔高度 h；利息的多少 I 取决于利率 r. 我们称 b 和 I 为函数(或因变量)，因为它们是由它们所依赖的变量 h 和 r 所决定的，于是称 h 和 r 为自变量.

定义 1.1.8　设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果给定一个 x 的取值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，x 为自变量. x 的取值范围称做定义域，记做 D_f；y 的值称做函数值，其取值范围称做值域，记做 R_f. y 与 x 之间的函数关系记做

$$y=f(x)$$

所以所谓的函数，实际上类似于一个机器，对于每一个允许的输入值都有一个指定的输出值. 输入构成了函数的定义域，输出构成了函数的值域，如图 1.1.3 所示.

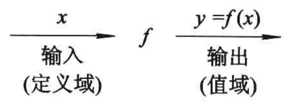

图 1.1.3

在微积分的范畴下，我们所研究的函数的定义域和值域都是定义在实数集或者其子集上的. 当函数的定义域扩充到更大的范围时，就产生了复变函数、泛函等更高深的数学学科，这些内容不在本书研究范围内.

下面我们来看几个常见的函数的例子.

例 1.1.4　函数 $y=2$，定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{2\}$，如图 1.1.4 所示.

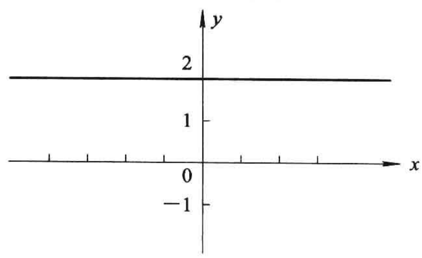

图 1.1.4

例 1.1.5　圆周-面积函数 $A(r)=\pi r^2$ 的定义域是所有可能的半径的集合，它是全体正实数构成的集合，其值域也是全体正实数构成的集合.

A 在 $r=3$ 处的值是

$$A(3) = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

即半径 r 为 3 的圆的面积为 9π.

常见的函数表示法一般有三种，上面几例均为函数的解析表示法，特点是便于计算和分析研究. 此外，还有表格法和图像法. 表格法可以快速地求出一些特殊的自变量值对应的函数值，但是数量有限. 图像法能够清晰地反映出函数的变化趋势，但是不能准确地求出函数值. 因此，三种函数表示法各有长处.

例 1.1.6　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，如图 1.1.5 所示.

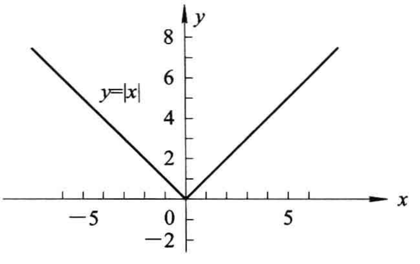

图 1.1.5

绝对值函数在不同的自变量取值区间有不同的解析表达式，这样的函数称做分段函数.

下面再来看一个常见的分段函数.

例 1.1.7　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数，如图 1.1.6 所示.

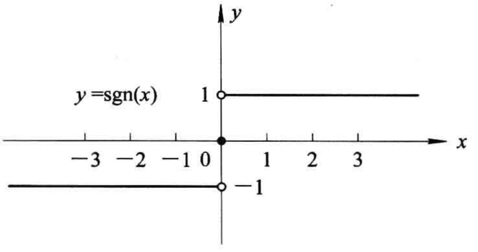

图 1.1.6

例 1.1.8　判断下面函数是否相同，并说明理由.

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

解　(1) 虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 与对应法则均相同，所以这两个函数相同.

(2) 虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同，但其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 和对应法则均相同，所以这两个函数相同.

一般地，当函数 $f(x)$ 用解析法表示时，如果不特别声明，则函数的定义域指的就是使 $f(x)$ 有意义的全体 x 的集合，通常称它为自然定义域.

如果需要对自变量的取值加以某些特定的限制，这时产生的定义域称为人为定义域.

例 1.1.9　求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域.

解　由题设可知，要使表达式有意义，$4-x^2$ 必须大于 0，从而

$$x^2<4$$

因此，$-2<x<2$，从而定义域为 $(-2,2)$.

1.1.8　建立函数关系

为了解决实际情况，我们需要先确定问题中自变量和因变量以及相互依赖的关系，并将其表示出来，再利用适当的数学方法加以分析和解决.

例 1.1.10　脉冲发生器产生一个单三角脉冲，其波形如图 1.1.7 所示，写出电压 U 与时间 $t(t\geqslant 0)$ 的函数关系式.

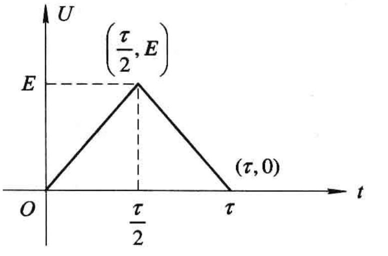

图 1.1.7

解　当 $t\in\left[0,\ \frac{\tau}{2}\right]$时，

$$U=\frac{E}{\frac{\tau}{2}}t=\frac{2E}{\tau}t$$

当 $t\in\left(\frac{\tau}{2},\ \tau\right]$时，

$$U-0=\frac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}\cdot(t-\tau)$$

即

$$U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$$

当 $t\in(\tau,\ +\infty)$时，$U=0$.

所以，$U=U(t)$是一个分段函数，其表达式为

$$U(t)=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t, & t\in\left[0,\ \frac{\tau}{2}\right]\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in\left(\frac{\tau}{2},\ \tau\right]\\ 0, & t\in(\tau,\ +\infty)\end{cases}$$

习　题　1.1

1. 叙述函数的定义，并指出下列两题中的两个函数是否相同，为什么？

(1) $y=\frac{x^2}{x}$ 与 $y=x$；　　(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

2. 建立函数关系式：

(1) 把等边三角形的周长和面积表示为该三角形边长 x 的函数；

(2) 把正方形的边长表示为该正方形对角线长度 d 的函数，然后把该正方形的面积表示为对角线长度的函数.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=1+x^2$；　　(2) $f(x)=1-\sqrt{x}$；　　(3) $F(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$；

(4) $F(t)=\frac{1}{1+\sqrt{t}}$；　　(5) $g(z)=\sqrt{4-z^2}$；　　(6) $g(z)=\sqrt[3]{z-3}$；

(7) $y=\frac{1}{x^2-2x}$；　　(8) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；　　(9) $y=\sqrt{\ln\frac{x-3}{2}}$.

1.2 函数的性质

函数都具有一些共同的特性，研究这些特性有助于掌握它们的变化规律，从而更好地解决实际问题. 下面讨论函数的几个简单性质.

1.2.1 有界性

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，能够找到一个正数 $M>0$，使得对于 D 中所有的 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 内是有界的. 反之，则称函数 $f(x)$ 在 D 内是无界的.

图 1.2.1 所示的就是一个有界函数的图像.

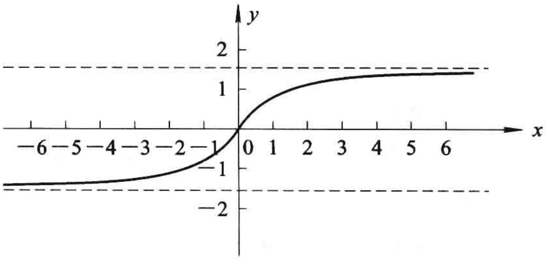

图 1.2.1

1.2.2 单调性

我们先看两个函数的图像，如图 1.2.2 所示.

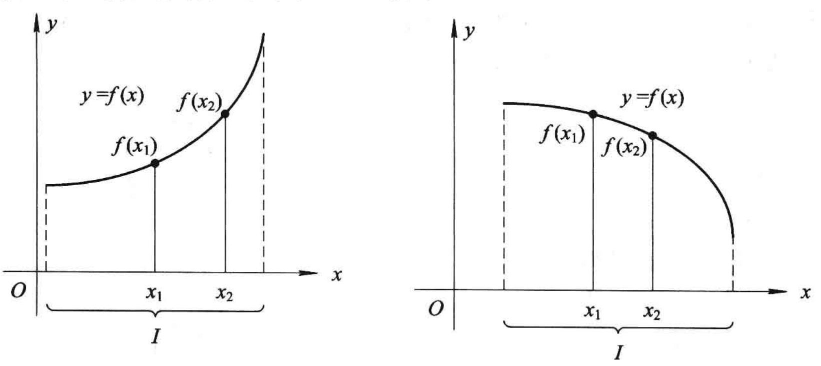

图 1.2.2

从图 1.2.2 中可以清晰地看到函数增减性变化的明显不同. 随着 x 的增大，如果函数图像是向上爬升或升高的，就是增函数；如果函数图像是下降或下落的，就是减函数. 下面给出函数单调性的具体数学定义.

定义 1.2.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$，对于任意给定的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，

(1) 如果 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递增的函数；

(2) 如果 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递减的函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内是单调递减的，在 $(0, +\infty)$ 内是单调递增的；函数 $y=x^3$ 在整个定义域 $\mathbf{R}$ 上都是单调递增的；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内分别是单调递减的.

例 1.2.1　证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 内是单调递增的函数.

证　在 $(-1, +\infty)$ 内任取两点 x_1、x_2 且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

因为 x_1、x_2 是 $(-1, +\infty)$ 内任意两点，所以，$1+x_1>0$，$1+x_2>0$.

又因为 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 内是单调递增的函数.

1.2.3　奇偶性

奇函数和偶函数图像具有对称性的表征.

定义 1.2.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 是一个对称数集，即 $x\in I$ 时，$-x\in I$. 如果对于任意给定的 $x\in I$，函数满足：

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数.

奇和偶的名称来自 x 的幂次. 如果 y 是 x 的奇次幂，如 $y=x$ 或 $y=x^3$，那么它们就是 x 的奇函数. 如果 y 是 x 的偶次幂，如 $y=x^2$ 或 $y=x^4$，那么它们就是 x 的偶函数. 当然，其他一些函数也有奇偶性，如 $y=\sin x$ 是奇函数，而 $y=\cos x$ 则是偶函数.

奇函数图像是关于原点对称的，而偶函数图像是关于 y 轴对称的. 这里一定要注意轴对称和点对称在对称方式上的区别，如图 1.2.3 所示.

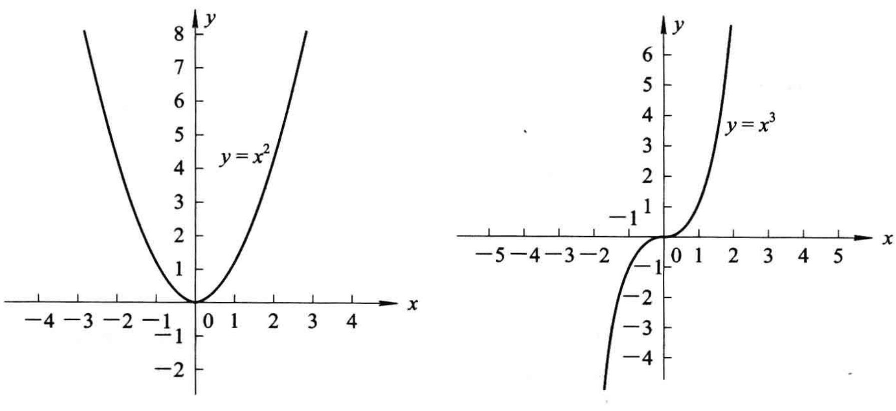

图 1.2.3

例 1.2.2　讨论下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2$；　　(2) $f(x)=x^2+1$；

(3) $f(x)=x$；　　(4) $f(x)=x+1$.