十二五

普通高等教育“十二五”规划教材

PUTONG GAODENG JIAOYU "12·5" GUIHUA JIAOCAI

线性代数

——Excel版教学用书

颜宁生　编著

冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

普通高等教育"十二

线性代数

——Excel版教学用书

颜宁生　编著

北　京
冶 金 工 业 出 版 社
2014

内 容 提 要

全书共分5章，主要内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型。随书附赠光盘包含16个课堂练习、16个见1游戏、15套机考试卷及相应的模板。教师利用这些模板可以任意生成多个课堂练习、见1游戏和机考试卷。由于增加了大量的Excel电子版内容，因此本书也可作为线性代数的考试用书。

书中所有的课堂练习、见1游戏和机考试卷都可实现人机互动，每个“模板”还可以制作任意多个难度相同但题型不同的课堂练习、见1游戏和机考试卷。本书适合在机房讲授，既可用于理工类非数学专业的基础课教学，也可供Excel爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数：Excel版教学用书/颜宁生编著. —北京：冶金工业出版社，2014.3

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5024-6492-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①颜… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第015881号

出 版 人 谭学余

地　　址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号，邮编100009

电　　话 (010)64027926 电子信箱 yjcbs@cnmip.com.cn

责任编辑 郭冬艳 美术编辑 吕欣童 版式设计 孙跃红

责任校对 郑 娟 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-6492-9

冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；三河市双峰印刷装订有限公司印刷

2014年3月第1版，2014年3月第1次印刷

148mm×210mm；5.625印张；165千字；167页

22.00元（附赠光盘）

冶金工业出版社投稿电话：(010)64027932 投稿信箱：tougao@cnmip.com.cn

冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893

冶金书店 地址：北京东四西大街46号(100010) 电话：(010)65289081(兼传真)

（本书如有印装质量问题，本社发行部负责退换）

前　言

一提到考试，一定会有人联想到诚信、作弊、紧张、害怕、压力等词，尽管这些词不能代表主流现象，但在不少大学里普遍存在。笔者在讲授“线性代数”课程时做过一项以游戏驱动教学的教学改革，经历过此项教学改革的同学，再谈及考试时，他们想到的词是：学习、快乐、获取知识的途径和手段。如果参加考试是低压甚至是无压的学习过程及快乐体验，那么就有很多人乐于参加考试，2 的 i 次方(i=0,1,2,3)开闭卷考试改革就是一项能够产生低压甚至是无压效果的教学改革。具体讲，i=0 时，2 的 0 次方代表有 1 次闭卷考试；i=1 时，2 的 1 次方代表有 2 次 C 级开卷考试；i=2 时，2 的 2 次方代表有 4 次 B 级开卷考试；i=3 时，2 的 3 次方代表有 8 次 A 级开卷考试。学生只有通过任何一次开卷考试，才可以不参加闭卷考试。为了使开卷考试有序进行，必须制定一些规则，比如，学生想参加开卷考试，他必须完成一定量的见 1 游戏。什么是“见 1 游戏”？见 1 游戏是供同学课后选做的电子版作业，具有自动计分功能。当你做对一道题后，作业上会自动出现“1”分。这种互动式的自动计分功能会产生一种趣味效果：就好像将作业当作游戏来做，游戏的结果是见到 1。故称此电子版作业为“见 1 游戏”。由于本课程共 32 课时(如果读者学校的课时超过 32 课时，可以将部分课堂练习当作见 1 游戏)，每次 2 课时，即共有 16 次课，故设计了 16 个见 1 游戏，16 个见 1 游戏共设计成 70 个小游戏，每个小游戏的积分为 1 分，做完 16 个见 1 游戏可以得到 70 个积分。当见 1 游戏积分达到 30 分时，就可以在本学期的第 8 周以后参加 A 级开卷考试；达到 50 分时，就可

以在本学期的第 12 周以后参加 B 级开卷考试；达到 60 分时，就可以在本学期的第 14 周以后参加 C 级开卷考试。如果他不想参加开卷考试或者他参加的所有的开卷考试都没有通过，那么他还可以参加期末闭卷考试。

本书设计的机考除了让每个同学有很多次考试机会以外，还别具特色。由于机考试卷是由软件生成的，因此对一个有 30 名同学的班级，可以制作 30 套题型和难度完全相同而数据不同的 30 套试卷，每套机考试卷都具备累积自动判分功能，也就是说，不需要人工阅卷。与机考改革配套的改革是作业改革，我们将作业称作见 1 游戏。由于每个同学的见 1 游戏都不同，所以，最大限度地避免了同学之间相互抄作业的现象，基本上达到了“快乐学习考试无忧”的改革目标。用一副课程对联可以很好地表达作者对“线性代数”课程教学改革的思路：

上联：将作业当成游戏作业有趣游戏成瘾

下联：将考试当成学习考试无忧学习成趣

横批：建议游戏①

① 建议的谐音是“见 1”

2 的 i 次方(i=0,1,2,3)开闭卷考试模式是一种“刷分”模式，其目的是鼓励学生在学习“线性代数”课程的过程中不断刷分。A 级开卷考试的满分设计成 79 分，B 级开卷考试的满分设计成 89 分，当某同学的积分达到 30 分后，他参加 A 级开卷考试的成绩=min(积分+30 分，A 级开卷考试成绩)；当他的积分达到 50 分后，他参加 B 级开卷考试的成绩=min(积分+30 分，B 级开卷考试成绩)；当他的积分达到 60 分后，他参加 C 级开卷考试的成绩=min(积分+30 分，C 级开卷考试成绩)。为了说明“刷分”特点，我们假设他的积分达到 35 分，那么不管他的 A 级开卷考试成绩有多高，最后的

成绩还是 65 分。如果他不满意这个成绩，他可以继续刷分。假设他的积分增加到 40 分，这时他的 A 级开卷考试成绩就有可能得到 70 分。

2 的 i 次方(i=0,1,2,3)开闭卷考试题都是机考试题。本书中所有的课堂练习、见 1 游戏和机考试卷都不需要人工判分，是由计算机自动判分，笔者是通过一项计算机模拟技术(详见《概率论与数理统计——模拟与模板》，科学出版社，2012)，再利用 Lingo 软件的嵌入技术开发出来的。

附录十(光盘)中有 16 个课堂练习模板。利用这些模板可以生成任意个课堂练习。比如在课堂上讲解完某一个数学方法后，需要同学进行课堂练习，就可以利用课堂练习模板制作难度相同但题型不同的 10 套课堂练习，供学号尾数为 0~9 的同学课堂练习(在机房上课)。

附录十一(光盘)中有 16 个见 1 游戏模板。如果一个班有 30 位同学，就可以利用见 1 游戏模板生成 30 套不同的见 1 游戏供 30 位同学使用。由于每个同学的见 1 游戏互不相同，所以这种个性化作业的最大优点就是最大程度地避免发生“抄作业”现象。

附录十二(光盘)中有 14 个开卷机考题模板，附录十二(光盘)中有 1 个闭卷机考题模板。利用这些模板可以生成任意多个机考试卷。这种个性化机考试卷的最大优点就是最大程度地避免“作弊”现象。

以课堂练习 1-1 为例，简单介绍如何编写见 1 游戏模板及如何利用见 1 游戏模板生成任意多套不同的见 1 游戏。首先在模板中的 4 个单元格 bh6、bh7、bi6、bi7 中分别键入公式“=INT(9*RAND()+1)”，模拟二阶行列式中的 4 个数字将在 1~9 这 9 个数字中均匀产生。附录一列出了几个在本书中经常使用的 Excel 函数。然后将这 4 个单元格 bh6、bh7、bi6、bi7 合并成一个被命名为_bh6 的单元格，再将 4 个单元格 h6、h7、i6、i7 合并成一个被命名为_h6 的单元格，通

过 bh6=@ole('课堂练习 1-1.xls','_bh6') 及 @ole('课堂练习 1-1.xls','_h6')=bh6 可以将_bh6 中的 4 个数字传递到_h6 中，再利用 Lingo 软件编写三个插件："获取新数据"、"获取答案"和"获取题目"。这三个插件放在课堂练习 1 模板名为"出题"的工作表中，运行"获取新数据"、"获取答案"两个插件后，可以得到：

运行"获取题目"插件后，可以得到：

重复执行"获取新数据"、"获取答案"和"获取题目"后，就可以生成任意多个课堂练习 1.1 了。

单元格 u3 中是该题计算结果的得分，每填写一个正确答案，单元格 u3 会自动累计计算答案的得分。例如在单元格 k6 中填写了正确答案 2 或 8，则单元格 u3 中将显示 0.2：

如果在单元格 k6 和 m6 中分别填写了正确答案 2 和 8，则单元

格 u3 中将显示 0.4:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1									课堂练习1.1														
2																					课堂练习1.1		
3	注：请清空下面黄色单元格中的0，然后填写相应的答案！																				0.4		
4																							
5	计	算	二	阶	行	列	式	：															
6								2	3	=	2	×	8	-	0	×	0	=	0				
7								1	8														
8																							

当所有的正确答案都填写完毕，则单元格 u3 中将显示得分 1。

此模板还具有手动与自动相结合的功能。例如要计算二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

可以在 h6、h7、i6、i7 四个单元格中分别键入 3, 0.5, 2, 1(手动)，就会自动生成一个新的课堂练习 1-1 答案:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1									课堂练习1.1														
2																					课堂练习1.1		
3	注：请清空下面黄色单元格中的0，然后填写相应的答案！																				1		
4																							
5	计	算	二	阶	行	列	式	：															
6								3	0.5	=	3	×	1	-	0.5	×	2	=	2				
7								2	1														
8																							

运行"获取题目"插件后，可以得到:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1									课堂练习1-1														
2																					课堂练习1.1		
3	注：请清空下面黄色单元格中的0，然后填写相应的答案！																				0		
4																							
5	计	算	二	阶	行	列	式	：															
6								3	0.5	=	0	×	0	-	0	×	0	=	0				
7								2	1														
8																							

经过多年的教学实践，发现同济大学数学系编的《线性代数》第五版对多数同学学习来说有一定的困难，于是萌发力求通过降低题目的难度来编写它的简易版教材的想法。

附录一是频繁出现在课堂练习、见 1 游戏和机考试卷中的 Excel

函数。读者了解这些函数后，学生可以提高计算能力，老师可以提高出题能力。

附录二是让课堂练习、见1游戏和机考试卷能够“动”起来的Lingo程序，限于篇幅，这里只附课堂练习1的Lingo程序。

附录三是让课堂练习、见1游戏和机考试卷最出“彩”的累积自动判分的两种计分法，有了它，老师不再改作业，考试不再判卷。因此，本书用了一个副书名——Excel版教学用书。

附录四是课堂练习和见1游戏的编号对照表，由于课堂练习和见1游戏在书中的编号是按照章序编的，为了方便教学，附录中电子版的课堂练习和见1游戏的编号是按照课次顺序编的。附录四是两者的编号对照表。

其他附录都是电子版，附在光盘内。

本书中所有的课堂练习、见1游戏和机考试卷都只有填空题、计算题和证明题三种类型，其中，计算题是提供计算思路的计算题，证明题是提供证明思路的证明题，从而降低了题目的难度，所以更加适合二本院校使用。

本书的编写出版得到了北京市教育委员会科技发展计划面上项目(KM200910012005)、中纺协会2011年36号(项目名称：《概率论与数理统计》教学方法与教学手段改革的研究与实践)和北京服装学院教育教学改革立项(JG-1329)的支持。

限于作者水平，书中存在的不足和疏漏，敬请读者批评指正。

作　者

2013年7月

目　　录

1 行 列 式

本章介绍二阶行列式、三阶行列式及 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法。此外还介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则，配有适量的课堂练习。每个课堂练习都有 10 个版本的电子版，供读者课上和课下练习。

1.1 二阶与三阶行列式

定义 1-1 称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$为二阶行列式。

二阶行列式中有两条对角线，一条是主对角线，一条是副对角线；a_{11} 和 a_{22} 是主对角线上的两个数字，而 a_{12} 和 a_{21} 是副对角线上的两个数字。通过这两条对角线，将很容易记住二阶行列式的计算公式。

二阶行列式可以表示二元线性方程组的解。

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

用消元法解得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

则

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

课堂练习 1-1

计算二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 2 \times 9 = -12$$

课堂练习 1-2

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} -9x_1 - 6x_2 = 60 \\ -3x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

解：由于

$$D = \begin{vmatrix} -9 & -6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -27 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 60 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 54 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} -9 & 60 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 189$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -2 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = -7$$

定义 1-2 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$-a_{13}a_{22}a_{31}$ 称为三阶行列式。

读者可以在三阶行列式中设计出 6 条对角线，并通过这 6 条对角线来记住三阶行列式的计算公式。通过对角线来记住阶行列式的计算公式的方法，只适合二、三行列式。对应四阶及更高阶行列式的计算公式，将在下节介绍全排列的知识后再作介绍。

与二阶行列式一样，三阶行列式可以表示三元线性方程组的解。

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则 $$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

课堂练习 1-3

计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-4&-2\\4&-4&-2\\-2&-1&4\end{vmatrix}=54$$

课堂练习 1-4

当 x 何值时，$\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&x\\0&-2&x^2\end{vmatrix}=0$

解：方程左端 D = $1x^2-2x+0$，

由 $1x^2-2x+0=0$，即当 x = 2 或 x = 0 时，

行列式 = 0。

课堂练习 1-5

三元线性方程组

$$\begin{cases}x_1-9x_2+x_3=-12\\-3x_1+5x_2-x_3=9\\-x_1+4x_2-x_3=2\end{cases}$$

的解为：$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=5$。

课堂练习 1-6

二次多项式 $f(x)=4x^2-3x+8$，满足

$f(-1)=15$，$f(2)=18$，$f(5)=93$。

1.2 全排列及其逆序数

定义 1-3 将 n 个不同元素按 1~n 进行编号，称 n 个不同元素排成一列叫做这 n 个元素的全排列。

n 个不同元素的全排列共有 $n!$种。

定义 1-4 取一个排列为标准排列，其他排列中某两个元素的次序与标准排列中这两个元素的次序相反时，则称这两个元素构成一个逆

序。一个排列的逆序数的总数称为逆序数。

通常取从小到大的排列为标准排列，即 $1\sim n$ 的全排列中取 $1,2,3,\cdots,(n-1), n$ 为标准排列。

定义 1-5 逆序数为偶数称为偶排列，逆序数为奇数称为奇排列，标准排列规定为偶排列。

例 1-1 讨论 1, 2, 3 的全排列。

全排列	123	231	312	132	213	321
逆序数	0	2	2	1	1	3
奇偶性	偶			奇		

逆序数的计算：设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列，则其逆序数为

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

式中，t_i 为排在 p_i 前，且比 p_i 大的数的个数。

课堂练习 1-7

排列 4 1 3 5 2 的逆序数为 5 。

课堂练习 1-8

排列 8 1 6 7 9 5 4 2 3 的逆序数为 24 。

1.3 *n* 阶行列式的定义

下面可用全排列的方式改写二阶，三阶行列式。

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

式中，(1)p_1p_2 是 1,2 的全排列；(2)t 是 p_1p_2 的逆序数；(3) $\sum$ 是对所有 1,2 的全排列求和。

三阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}
$$

$$
= \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}
$$

式中 (1) 乘积中三个数不同行、不同列: $\pm a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$；

行标(第 1 个下标): 标准排列 123；

列标(第 2 个下标): $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的某个排列(共 6 种)。

(2) 正项: 123, 231, 312 为偶排列；

负项: 132, 213, 321 为奇排列。

定义 1-6 n 阶行列式的定义:

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}
$$

式中, (1) $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列; (2) t 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数; (3) $\sum$ 是对所有 $1,2,\cdots,n$ 的全排列求和。

例 1-2 计算 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$

解 D_1 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为 0, 且列标构成排列的逆序数为

$$
t(12\cdots n) = 0
$$

故 $D_1 = (-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

D_2 中只有一项 $a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$ 不为 0, 且列标构成排列的逆序数为

$$
t(n\cdots 21) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n+1)}{2}
$$

故 $D_2 = (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$。

结论: (1)以主对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

(2)以副对角线为分界线的上(下)三角行列式的值等于副对角线上元素的乘积, 并冠以符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 。

特例:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

课堂练习 1-9

已	知			x	-2	-3	0
		f(x) =		3	x	-4	-2
				-2	1	x	8
				-2	1	2x	-2
则	x^3	的	系	数	=	-18	。

注: 上面的行列式展开式中只有 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 两项含 x^3。

1.4 对　换

定义 1-7 一个排列中某两个元素的位置互换称为对换。

定理 1-1 对换一次改变排列的奇偶性。

课堂练习 1-10

	排	列	2	3	5	4	1	的	逆	序	数	=	5,		为	奇	排	列	,	将	第
2	个	位	置	与	第	5	个	位	置	的	数	对	换	后	得	到	排	列	2	1	5
4	3	,	该	排	列	的	逆	序	数	=		4,		为	偶	排	列	。			

定理 1-2 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

式中, t 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。