THE EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD
——Theory, Application and Program

扩展有限单元法
——理论、应用及程序

余天堂 著

科学出版社

扩展有限单元法

——理论、应用及程序

余天堂　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书对扩展有限单元法的理论、应用和程序进行了较为详尽的论述。全书共分9章，包括4部分内容。第1部分（第1章～第3章）系统地综述扩展有限单元法理论的研究进展和主要应用，简述扩展有限单元法理论的基础知识（水平集法和线弹性断裂力学基础）；第2部分（第4章）详细地论述扩展有限单元法的基本理论；第3部分（第5章～第8章）详细介绍扩展有限单元法在黏聚裂纹扩展、非均质问题、动态断裂问题和剪切带演化领域中的应用；第4部分（第9章）介绍扩展有限单元法的程序设计，给出主要的程序代码，将有利于读者尽快掌握扩展有限单元法的程序实现，并在此基础上应用该方法解决工程实际问题。

本书可供力学、土木工程、水利工程、机械工程和航空航天等专业的教师、科研人员、研究生和高年级本科生阅读，也可供从事断裂分析软件开发和使用者参考。

图书在版编目(CIP)数据

扩展有限单元法：理论、应用及程序/余天堂著.—北京：科学出版社，2014.1

ISBN 978-7-03-039377-7

Ⅰ.①扩…　Ⅱ.①余…　Ⅲ.①有限元法　Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309615号

责任编辑：惠　雪　曾佳佳/责任校对：邹慧卿
责任印制：肖　兴/封面设计：许　瑞

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏 杰 印 刷 厂　印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2014年1月第 一 版　　开本：B5(720×1000)
2014年1月第一次印刷　　印张：19
字数：370 000

定价：89.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

现有的数值分析方法有很多，每种方法各有千秋，但有限单元法是理论基础最为成熟、使用最广泛和商业化程度最高的一种数值方法。有限单元法已成为工程数值分析最有力的工具，解决了大量的科学和工程问题。然而，有限单元法采用连续函数作为形状（插值）函数，在单元内部形状（插值）函数连续且材料性能不能跳跃，因此其分析不连续力学问题的能力不强，特别是分析移动边界问题（如裂纹扩展）的能力很弱。

针对有限单元法分析不连续力学问题的不足，美国西北大学 Belytschko 教授带领的课题组于 1999 年提出了扩展有限单元法，其基本原理是基于单位分解的思想在常规有限单元法位移模式中加进一些加强函数以反映不连续性，这样计算网格独立于结构内部的几何或物理界面，因此能方便地分析不连续性问题，特别是不连续边界演化问题。扩展有限单元法问世后在国际上引起了极大关注，得到了快速发展和广泛应用，近十几年来一直是国际计算力学界的研究热点之一，该方法是目前解决不连续性问题最有效的数值方法。鉴于扩展有限单元法能方便有效地解决任意的不连续性问题，且只需要在常规有限单元法程序上做一定修改即可实现，因此 ABAQUS、ASTER和 DYNAFLOW 等国外有限单元法大型软件已加入了扩展有限单元法的功能；国内洞力公司基于扩展有限单元法技术和虚节点多边形有限单元法技术开发了模拟裂纹扩展与预测疲劳寿命的商用软件 ALOF。这些软件极大地加快了扩展有限单元法的推广与应用，这是其他新型数值分析方法所无法比拟的。

作者是国内较早开展扩展有限单元法研究的研究者之一，本书以作者所在课题组取得的研究成果为基础，系统地论述了扩展有限单元法的理论及其在黏聚裂纹扩展、非均质问题、动态断裂和剪切带演化领域中的应用，详细地介绍了扩展有限单元法的程序设计。

作者的硕士生刘鹏、龚志伟、万林林、李彦静和博士生石路杨为本书做了诸多的工作，书中的一些内容来自他们的研究成果。作者对他们表示衷心的感谢。

作者在扩展有限单元法方面的研究先后两次获得国家自然科学基金的资助（50609004：裂缝扩展的扩展有限元法模拟及在水工结构安全评估中的应用；5117906：高水压力作用下岩体水力劈裂的扩展有限单元法模拟），在此表示衷心的感谢。

余天堂

2013 年 8 月于南京

目　录

前言
第 1 章　绪论 …… 1
1.1　扩展有限单元法的产生 …… 1
1.2　扩展有限单元法理论的研究进展 …… 2
1.3　扩展有限单元法的主要应用 …… 6
1.4　扩展有限单元法程序设计及软件开发 …… 10
1.5　与其他相关方法的比较 …… 11
1.6　本书主要内容 …… 11
参考文献 …… 12
第 2 章　水平集法 …… 23
2.1　表征裂纹 …… 24
2.2　表征孔洞和夹杂 …… 27
参考文献 …… 29
第 3 章　线弹性断裂力学基础 …… 31
3.1　断裂模式 …… 31
3.2　裂尖场 …… 32
3.3　复合型裂纹的断裂准则 …… 37
3.4　互作用积分法 …… 40
参考文献 …… 44
第 4 章　扩展有限单元法的基本理论 …… 46
4.1　单位分解法 …… 46
4.2　扩展有限单元法 …… 47
4.3　裂纹附近精度的提高 …… 64
4.4　扩展有限单元法劲度矩阵的条件数 …… 73
4.5　裂纹面接触条件的处理 …… 75
4.6　多裂纹体的扩展有限单元法 …… 84
4.7　其他裂纹问题的扩展有限单元法 …… 92
4.8　裂纹扩展路径的影响因素 …… 95
4.9　三维扩展有限单元法 …… 98

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

参考文献…… 106
第 5 章　黏聚裂纹模型的扩展有限单元法…… 113
5.1　黏聚裂纹问题的基本方程及弱形式 …… 113
5.2　黏聚区本构关系 …… 114
5.3　黏聚裂纹模型的扩展有限单元法 …… 117
5.4　黏聚裂纹扩展分析算法 …… 120
5.5　数值算例 …… 123
参考文献…… 125
第 6 章　非均质问题的扩展有限单元法…… 127
6.1　夹杂问题的扩展有限单元法 …… 127
6.2　孔洞问题的扩展有限单元法 …… 135
6.3　非均质材料热传导问题的扩展有限单元法 …… 136
6.4　不连续岩体的扩展有限单元法 …… 145
6.5　非均质体开裂分析的扩展有限单元法 …… 152
6.6　V 形切口问题的扩展有限单元法 …… 153
参考文献…… 162
第 7 章　动态断裂问题的扩展有限单元法…… 164
7.1　动态扩展有限单元法 …… 164
7.2　动态边界光滑扩展有限单元法 …… 168
7.3　功能梯度压电材料动态断裂分析的扩展有限单元法 …… 178
7.4　压电双材料界面裂纹瞬态动力分析的扩展有限单元法 …… 204
参考文献…… 214
第 8 章　剪切带演化的扩展有限单元法…… 219
8.1　岩土材料剪切带分析的基本理论 …… 219
8.2　模拟剪切带的扩展有限单元法 …… 223
8.3　数值算例 …… 230
参考文献…… 233
第 9 章　扩展有限单元法的程序设计…… 235
9.1　数据输入 …… 235
9.2　加强结点与加强方式和单元类型的确定 …… 236
9.3　整体劲度矩阵的计算 …… 242
9.4　应力强度因子的计算 …… 266
9.5　数值算例 …… 270
参考文献…… 279

附录 A 裂尖加强函数的偏导数 …… 281
A. 1 正交各向异性裂尖加强函数 …… 281
A. 2 双材料界面裂纹各向同性裂尖加强函数 …… 282
附录 B 互作用积分法计算应力强度因子 …… 286
附录 C 整体坐标到局部坐标的转换 …… 290
索引 …… 292

第1章 绪　论

1.1 扩展有限单元法的产生

现有的数值方法有很多，但从通用性和理论基础成熟性角度而言，有限单元法是最好的一种数值方法，是目前工程上应用最广的数值方法。有限单元法分析裂纹问题时，将裂纹边设置为单元的边，裂纹的端点是单元的结点，在裂尖处使用奇异单元，在端点的高应力区还需要进行网格加密。因此，有限单元法分析裂纹问题的前处理很复杂。有限单元法分析裂纹扩展的实现方法有三种：①变网格法[1]。随着裂纹的扩展，计算网格不断更新。这种方法的优点是可以较准确地追踪裂纹演化。缺点是需要不断地更新网格，且前后两次网格的有关内变量场需要进行变换。②不变网格法[2]。在裂纹扩展轨迹上布置零厚度接触单元实现裂纹跟踪。这种方法的优点是计算网格始终不变，缺点是必须事先知道裂纹扩展轨迹。③弱化单元的性质来表征裂纹的扩展[3]。这种方法的优点是计算网格始终不变，缺点是不能获得准确的裂纹宽度和裂纹路径。

有限单元法采用连续函数作为形状(插值)函数，要求在单元内部形状函数连续且材料性能不能跳跃，因此有限单元法分析静态不连续问题(如夹杂问题和静止的裂纹问题)的前处理复杂，分析移动边界问题(如裂纹扩展和剪切带演化)的能力不强，甚至可以说很弱。改进有限单元法的形状函数，在单元内部形状函数可以不连续，这样就可以方便地分析不连续问题。基于此思想，美国西北大学 Belytschko 和 Black[4] 于 1999 年提出一种用最小重构网格的有限单元法模拟弹性裂纹扩展。随后，Moës 等[5]进一步完善了该方法，采用阶跃函数加强裂纹贯穿单元，用裂尖 Westergaard 函数加强裂尖单元。2000 年，Daux 等[6]引入连接函数考虑多分支裂纹，并正式将该方法命名为扩展有限单元法(extended finite element method，XFEM)。

扩展有限单元法的基本原理是基于单位分解的思想在常规有限单元法位移模式中加进一些加强函数以反映不连续性，其位移逼近由连续和不连续两部分组成，连续位移采用常规有限单元法逼近获得，不连续位移则需根据不连续问题的类型选取相应的加强函数来确定。扩展有限单元法分析不连续问题时计算网格和结构内部的几何或物理界面是相互独立的，因此能方便地分析不连续问题，特别是不连续边界演化问题。

扩展有限单元法问世后在国际上引起了极大关注，得到了快速发展和广泛应

用，主要用来求解夹杂界面[7]、裂纹扩展[8]、剪切带演化[9]、生物膜生长[10]、流固耦合[11]、位错[12]和两相流[13]等不连续问题。

1.2 扩展有限单元法理论的研究进展

从加强函数、混合单元的处理、积分方案、裂纹面接触条件、加强范围、误差估计和收敛率七个方面综述扩展有限单元法理论上的一些研究进展。

1.2.1 加强函数

构造扩展有限单元法位移逼近的关键问题是选取合适的加强函数。对于裂纹问题，裂纹贯穿单元一般选取阶跃函数为加强函数，含裂尖的单元(也称为裂尖单元)采用裂尖函数加强，裂尖加强函数一般根据裂尖渐近场的主要项确定。Sukumar 等[14]给出了各向同性双材料界面裂纹的裂尖加强函数；Béchet 等[15]提出了压电材料的力-电裂尖加强函数，研究表明采用标准的力裂尖加强函数与力-电裂尖加强函数获得的结果差别不大[15-18]，因此不必采用复杂的力-电裂尖加强函数分析压电材料断裂问题；Asadpoure 等[19]给出了正交各向异性材料裂纹裂尖加强函数；Rojas-Díaz 等[20]给出了电磁材料裂纹裂尖加强函数；Yu 等[21]给出了 V 形切口裂纹裂尖加强函数；Elguedj 等[22]给出了幂硬化材料弹塑性裂纹裂尖加强函数；Moës 等[23]和 Unger 等[24]给出了黏聚裂纹的裂尖加强函数。

Belytschko 等[25]根据符号距离函数定义了交叉不连续、分支不连续、导数不连续和切向不连续问题的加强函数。Daux 等[6]定义了一个连接加强函数，用于模拟多分支和交叉裂纹。后来，Budyn 等[26]和 Dahi Taleghani[27]分别发展了一个简单的连接加强函数，用于模拟多裂纹扩展的汇合。Sukumar 等[28]采用平面问题的裂尖加强函数分析三维裂纹问题，获得的应力强度因子与参考解吻合得很好，这表明平面问题的裂尖加强函数能有效地分析三维裂纹。Liu 等[29]将裂尖渐近位移场的主要项和高阶项作为裂尖加强函数，提高了局部位移场的精度，可以直接求出应力强度因子。后来，Zamani 等[30]将其扩展到热弹性断裂问题。Laborde 等[31]在常规裂尖加强函数的基础上再增加四个加强函数以改善高阶扩展有限单元法的收敛率。对于黏聚裂纹，Wells 等[32]采用符号函数加强所有开裂的三角形单元，但裂尖限制在单元边界上。Zi 等[33]采用符号函数加强所有开裂的三角形单元，裂尖可以位于三角形单元任意位置。Wells 等[32]和 Zi 等[33]的加强策略都存在裂尖单元裂纹两边应力不等的问题，这与黏聚裂纹两边应力相等的假定不符。针对三角形单元，Asferg 等[34]提出了一种在裂尖单元能获得正确应力分布的裂尖加强模式，然而该方法有些复杂。Belytschko 等[35]研究了位错问题的加强函数。

对于裂尖存在奇异性的问题，也有部分研究者只采用阶跃函数加强裂纹贯穿单元和裂尖单元，这样存在两个问题：一是由于位移逼近中没反应裂尖奇异性，因此裂尖附近精度不高；二是裂尖需要位于单元边界上，即裂纹扩展时裂纹必须贯穿整个单元。尽管 Zi 等[33]成功地解决了第二个问题，但实施过程比较复杂。

材料界面处位移连续，但应变不连续，因此在材料界面处加强函数应连续，但其导数不连续。Sukumar 等[36]定义水平集函数的绝对值为加强函数，该加强函数存在混合单元；为了消除混合单元，Moës 等[37]提出了一种修正的水平集加强函数，基于修正的水平集加强函数的扩展有限单元法的收敛率非常接近优的有限单元法收敛率。常规的扩展有限单元法是加强单元结点，这种加强方式的缺点是描述界面的点只能位于单元边界上，为了克服加强单元结点的扩展有限单元法的不足，Soghrati 等[38]提出了一种加强界面结点的扩展有限单元法，该方法对界面与单元的交点进行加强，因此描述界面的点可以位于单元任意位置。

对于封闭形式解未知的问题，Waisman 等[39]提出了一种带未知参数的加强函数方法。根据待求问题的一些特征，给出带未知参数的加强函数及未知参数的可选范围，由残余误差最小确定未知参数。

1.2.2 混合单元的处理

部分结点被加强的单元称为混合单元(blending element)。在混合单元内，加强函数不满足单位分解，不能精确地表示加强函数，在逼近函数中增加了不想要的附加项，因此削弱了混合单元中逼近的精度。由于混合单元的存在只是局部的，因此混合单元对整体精度的影响并不大；但混合单元内逼近中增加了不想要的项，这会显著地降低扩展有限单元法的收敛率[7]。为了不降低整体收敛率，需要对混合单元进行特别处理，以达到去掉混合单元中不想要的项。采用阶跃函数加强的混合单元，通过平移加强函数可消除这些单元中不想要的项。因此，只是采用裂尖函数加强的混合单元才需要进行特别处理。Chessa 等[40]提出了两种消除混合单元的方法，即增强应变法和分级加强法。增强应变法，混合单元的假想应变场为实际位移场获得的应变加上增强应变，采用增强应变法能提高扩展有限单元法的精度，但该方法的缺点是构造增强应变场的形函数较为困难。分级加强法，对于采用多项式函数作为加强函数的弱不连续问题，标准形函数比加强形函数高一阶。Gracie 等[41]采用不连续伽辽金法解决混合单元问题，将加强区域划分成若干个无重合区域的覆盖，对每个覆盖内所有的结点进行加强，这样就不存在混合单元。Fries[42]在常规扩展有限单元法逼近框架内引入一个线增函数，实现新的加强函数在常规单元和混合单元边界处等于零，从而消除混合单元问题，该方法能有效地提高由于混合单元引起的精度和收敛率降低。相比其他处理方法，Fries 的方法对常

规扩展有限单元法程序稍作修改就能实现。Fries 只是通过数值分析展示了该方法的有效性,后来 Shibanuma 等[43]基于单位分解有限单元法逼近发现了该方法的理论解验证。Ventura 等[44]提出在混合单元内对加强函数进行加权处理以消除混合单元,该方法类似于 Fries 的方法。

1.2.3 积分方案

不含裂纹的单元的积分和常规有限单元法一样,需要说明的是不含裂纹但含加强结点的单元,需根据加强类型适当增加积分点数。裂纹切割单元的积分是不连续函数的积分,因此需要采用特殊的积分方案。Moës 等[5]提出了一种简单且高精度的积分方法,将裂纹切割的单元划分成一些子单元,每个子单元内被积函数是连续的,单元上的积分转为在这些子单元上积分。当裂纹扩展时,裂尖单元必须每次重新划分子单元,这部分区域的应力和内变量场要变换,这样可能出现能量不守恒。为了避免出现能量不守恒,采用加大裂纹贯穿单元、裂尖单元和这些单元邻近一层单元的积分点数[45,46],不需要划分积分子单元就可以得到满意的结果。Song 等[47]基于单点积分和沙漏控制提出一种四结点四边形单元的积分方法,该方法对不连续的被积函数不需要用子单元积分。

Ventura[48]针对裂纹完全贯穿单元提出了一种不需要使用积分子单元且精度高的积分方案,但该方法存在很大的局限性。对于采用裂尖函数加强的单元,由于奇异性,若采用常规积分法则,相对多项式积分而言,需要采用更多的积分点。Béchet 等[49]和 Laborde 等[31]几乎同时提出了一种思想相近的二维问题奇异函数积分方案,即通过极坐标变换技术,将三角形域的积分转换为四边形参考单元的积分,从而消除被积式的奇异性,这样就可以和常规积分一样,但他们都认为难以推广到三维问题。

Xiao 等[50]研究了影响裂尖单元和裂纹完全贯穿单元积分精度的因素,提出了基于 DECUHR(自适应积分)和 Gauss-Legendre 积分的两种积分方案。Peters 等[51]分别采用高斯积分和基于辛普森准则自适应分等级算法计算裂纹区单元劲度矩阵,算例表明自适应方案更有效。Elguedj 等[52]提出了一种弹塑性扩展有限单元法的数值积分方案,对裂纹区域单元的积分采用两套子单元,一套用于计算劲度矩阵(单元边和裂纹面重合),一套用于计算塑性流(单元边和裂纹面不重合)。

Natarajan 等[53]采用一种基于 Schwarz-Christoffel 保型变换的数值积分方法,直接对各多边形区域积分。利用平面多边形控制点将多边形区域映射为复平面上的单位圆,形成积分点坐标和权重,这样不需形成积分子单元。但是相对于高斯积分法,该方法收敛性差,且仅适用于平面问题。在边界单元法中,Nagarajan 等[54]发展了一种映射法,在二维三角形区域上积分 r^{-1} 阶奇异性问题。Park 等[55]

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

将其扩广到三维问题，应用到三维扩展有限单元法/广义有限单元法中奇异加强函数的积分。

1.2.4 裂纹面接触条件

扩展有限单元法的位移模式有不连续的加强函数，因此扩展有限单元法分析疲劳裂纹和裂纹体受压时必须考虑裂纹面间的接触问题，否则裂纹面间会发生相互的嵌入现象。扩展有限单元法已耦合各种接触算法：罚函数法[56]，Lagrange 乘子法[57]，增广的 Lagrange 乘子法[58]，Nitsche 法[59]，线性互补法[60,61]。

常规有限单元法求解接触问题的一些算法都可用于扩展有限单元法中施加裂纹面的约束条件，但两种方法中裂纹面约束条件的施加并不完全相同。常规有限单元法中，裂纹位于单元边界，采用四结点四边形单元时，沿单元边界形函数是线性分布的；扩展有限单元法中，裂纹位于单元内部，采用四结点四边形单元时，若裂纹面不与单元边界平行，则沿裂纹面形函数是非线性分布的，另外裂尖加强函数也是非线性的。常规有限单元法中施加点约束就能正确地表示裂纹面接触，扩展有限单元法中施加点约束并不能正确地表示裂纹面接触（除非裂纹面与单元边界平行），因此扩展有限单元法使用点约束接触方案时需要采用一些稳定算法消除解的振荡[62]，比如减小乘子空间。Giner 等[63]提出了基于 Lagrange 乘子的线段-线段法（砂浆法）施加裂纹面接触条件，线段-线段法优化了沿裂纹段的接触约束的实现，实际上是精确地模拟了接触，该方法能获得优的收敛率，且可有效地避免裂纹面的相互嵌入。

1.2.5 加强范围

传统的扩展有限单元法的位移模式中裂尖加强函数只加强裂尖单元，这样计算精度与裂尖位置关系很大[40]。为了消除裂尖位置对精度的影响，Liu 等[29]建议裂尖加强 3 层单元。Béchet 等[49]提出对裂尖函数加强区域采用几何加强代替拓扑加强，即采用一个给定的加强区域。扩大裂尖加强范围会加大整体劲度矩阵的条件数，Béchet 等[49]提出了一种减少劲度矩阵条件数的预条件方案。Laborde 等[31]也提出采用固定的裂尖函数加强区域，为了改善劲度矩阵的条件数，文中修改了裂尖加强基函数。采用几何加强存在以下两个问题：①对一具体问题，几何加强范围的取值是个未知数；②裂尖接近计算区域边界时，几何加强范围会超过计算域。

1.2.6 误差估计

目前,关于扩展有限单元法误差分析的研究不多。基于恢复法估计扩展有限单元法的误差的关键点是计算恢复场。Bordas 等[64,65]基于扩展有限单元法获得的结点位移,通过扩展移动最小二乘法(用裂尖渐近函数加强移动最小二乘基)计算增强应变。Duflot 等[66]将一个全局梯度恢复公式扩充到扩展有限单元法。Ródenas 等[67]发展了适用扩展有限单元法的一个修正的超收敛分片恢复技术,后来他们通过局部近乎静力容许的方式构造恢复梯度的方法获得扩展有限单元法离散误差(余能范数)的上限[68]。Gerasimov 等[69]基于残值法估计扩展有限单元法的后验误差。

1.2.7 收敛率

扩展有限单元法能获得比常规有限元更精确的数值结果,然而,其收敛率关于网格参数 h 并不是优的。Stazi 等[70]通过大量数值试验表明扩展有限单元法中二次形函数单元比线性形函数单元的精度要高,但由于裂尖奇异性的存在,收敛率并没提高,收敛率仅是 $o(h^{1/2})$,只是误差的绝对值得到了改善。Laborde 等[31]测试后发现扩展有限单元法的收敛率也仅是 $o(h^{1/2})$,他们分析了收敛率没提高的原因主要有三点:①相比常规有限单元法的插值误差,扩展有限单元法的插值误差不是优的;②增加在有限元基中的加强函数导致局部不协调;③为了表述沿裂纹位移的不连续性,必须采用足够精确的用作单位分解的有限元基。他们提出了相应的改进措施,改进后的扩展有限单元法能获得优的收敛率。Chahine 等[71]采用一个截断函数将奇异加强区域局部化,这样可以获得准优的收敛率。

为了获得优的收敛率,一些方法相继被提出,比如,固定加强区域的扩展有限单元法、高阶的扩展有限单元法和消除混合单元的扩展有限单元法。

1.3 扩展有限单元法的主要应用

扩展有限单元法已广泛应用于求解各类不连续问题,下面综述扩展有限单元法在固体力学和流体力学中的主要应用。

1.3.1 固体力学

1. 裂纹

扩展有限单元法提出之初是用于求解裂纹问题,因此裂纹问题是其主要的应

用方向。Yazid 等[72]和 Karihaloo 等[73]综述了扩展有限单元法在断裂力学中的应用。扩展有限单元法已用于分析弹性裂纹和弹塑性裂纹、单裂纹和多裂纹、静载下裂纹和动载下裂纹、均质材料裂纹和非均质材料裂纹(如功能梯度材料裂纹、双材料界面裂纹)、各向同性材料裂纹和各向异性材料裂纹、二维裂纹和三维裂纹、块体裂纹和板壳裂纹等问题。

扩展有限单元法最初用于求解弹性裂纹问题[4-6]。Nagashima 等[74]研究了扩展有限单元法在弹塑性问题中的应用,研究表明小变形弹性问题的裂尖渐近位移函数也适合非线性问题。后来,Elguedj 等[22]根据弹塑性断裂力学中的 HHR 场提取了幂硬化材料弹塑性裂纹裂尖加强函数,将扩展有限单元法用于分析弹塑性断裂问题。扩展有限单元法分析弹塑性断裂更多的是采用黏聚裂纹模型[32-34],一些学者采用黏聚裂纹模型的扩展有限单元法分析混凝土结构断裂过程[75-78]。

Budyn 等[26]采用扩展有限单元法模拟脆性材料多裂纹扩展,Dahi Taleghani[27]采用扩展有限单元法研究岩体水力劈裂中多裂纹相互作用机理。

Menouillard 等[79]使用显式时间积分技术采用扩展有限单元法模拟动态裂纹扩展。Duddu 等[10]采用扩展有限单元法和水平集法模拟率无关材料的动力开裂。Zi 等[80]采用扩展有限单元法模拟冲击载荷下混合模式断裂过程。Belytschko 等[81]采用扩展有限单元法模拟动态裂纹的扩展,以控制偏微分方程失去双曲线特性作为裂纹扩展准则。Prabel 等[82]采用扩展有限单元法模拟弹塑性介质中的动态裂纹扩展。Coon 等[83]采用扩展有限单元法分析复杂断层系统的地震破裂。Réthoré 等[84]采用扩展有限单元法模拟空间域和时间域内的不连续,耦合空间-时间扩展有限单元法(ST-XFEM)模拟动态裂纹扩展。ST-XFEM 由于避免了虚假的数值振荡,因此能较精确地模拟动态裂纹的扩展。Larsson 等[85]采用扩展有限单元法模拟壳结构动断裂。

Khoei 等[86]采用阶跃函数加强的扩展有限单元法模拟摩擦接触引起的不连续问题。基于单位分解法采用三角形子单元离散接触区域,对接触面分割的单元,利用接触结合带上积分点处接触面材料性质矩阵计算劲度矩阵的积分,不需要在裂纹面布置积分点。Dolbow 等[87]采用扩展有限单元法模拟摩擦接触裂纹的扩展,接触面采用三种不同的非线性本构关系(完全接触、摩擦接触和无摩擦接触),用大时间增量法(LATIN)迭代求解非线性边值问题。

Dolbow 等[88]用扩展有限单元法和互作用积分技术计算功能梯度材料的复合型应力强度因子。Nagashima 等[89]用扩展有限单元法求解双材料界面裂纹的应力强度因子。Asadpoure 等[19]采用扩展有限单元法模拟横观各向同性介质中的裂纹问题,扩展有限单元法获得的应力强度因子与其他数值方法和解析法得到的一致。

Sukumar 等[90]采用扩展有限单元法研究三维平面 I 型裂纹问题。Areias

等[91]采用四面体单元的扩展有限单元法分析三维裂纹的产生和扩展，单元开裂就一分为二。Bordas 等[92]采用扩展有限单元法和水平集法评估复杂三维构件的损伤容许值。Gasser 等[93]采用扩展有限单元法模拟混凝土三维裂纹扩展。Chopp 等[94]采用扩展有限单元法和快速前进法分析三维多个共面裂纹问题，模拟裂纹合并和疲劳开裂。Ferrié 等[95]采用三维扩展有限单元法模拟 Al-Li 合金中的半椭圆裂纹的疲劳开裂，三维裂纹扩展准则中考虑沿裂纹波前的闭合应力线性变化，数值模拟和实验观测到的疲劳裂纹扩展相吻合。

Dolbow 等[96]采用扩展有限单元法模拟 Mindlin-Reissner 板的断裂问题，为了获得复合型应力强度因子，提出了一种恰当形式的互作用积分技术。Areias 等[97]考虑材料和几何非线性采用扩展有限单元法研究壳的开裂问题，他们还分析了薄板和薄壳的弹塑性断裂[98]。

Zi 等[99]采用扩展有限单元法分析疲劳裂纹的扩展。Stolarska 等[100]用扩展有限单元法模拟集成电路中的热疲劳开裂。

Vigneron 等[124]采用扩展有限单元法模拟二维切除术后器官的变形。Cernescu 等[125]采用扩展有限单元法评估全口托牙的断裂强度。

2. 夹杂和孔洞

Sukumar 等[7]提出了分析孔洞和夹杂问题的加强函数，平面弹性静力问题表明了该方法的精确性和潜能。Moës 等[101]构造了分析夹杂问题的一个新的加强函数，该加强函数不存在混合单元，采用扩展有限单元法进行细观结构的多尺度分析，数值试验表明扩展有限单元法获得的结果非常接近于直接采用有限单元法和快速傅里叶变换得到的结果。采用扩展有限单元法分析夹杂问题，结果和网格没有显著的依赖性，但网格仍需要细到足以捕捉到材料界面的几何特征和精确地求解到界面附近的位移场。Shamloo 等[102]基于帽盖塑性理论用扩展有限单元法分析压应力敏感材料的塑性变形特性。Zhang 等[103]采用扩展有限单元法模拟了黏弹性介质中的夹杂问题。

3. 剪切带

Samaniego 等[9]采用扩展有限单元法模拟剪切带的动态演化，将剪切带作为连续力学体中的强不连续体，剪切带的位置可以是任意的，文中采用线性初始边值问题失去双曲率作为剪切带形成的条件。Areias 等[104]采用扩展有限单元法模拟剪切带的演化，边值问题失稳作为确定剪切带形成和方向的指标，算例表明该方法能有效地追踪剪切带的发展和大的应变。Patzák 等[105]将扩展有限单元法应用于非局部连续损伤力学中，通过引入能准确捕捉局部化应变概貌的特殊函数，在非常粗的网格上改进标准的位移逼近。Mariano 等[106]采用扩展有限单元法研究宏观

裂纹和细观裂纹相互作用引起的应变局部化问题,算例表明为了获得同样的结果,常规有限单元法比扩展有限单元法需要更多的结点。Song 等[107]通过重新安排扩展有限单元法基函数和结点自由度,用叠置单元和虚结点描述不连续体,通过增加虚结点自由度来表示剪切带,数值分析表明该方法对模拟剪切带的发展具有有效性和健壮性。

4. 位错

Gracie 等[108]仅采用阶跃函数对滑移面两侧及位错芯附近区域进行加强,采用双水平集函数描述位错的几何位置和位错的发展,后来他们对该方法进行了修正,提出了新的用于模拟位错芯加强奇异性的加强函数[109]。Belytschko 等[110]也采用扩展有限单元法模拟位错的发展。

5. 拓扑优化

结构拓扑优化过程中,结构几何在不断改变,因此有限单元法进行结构拓扑优化分析时需要不断地重构计算网格。扩展有限单元法的计算网格独立于结构内部的几何或物理界面,拓扑优化过程中计算网格不变,因此扩展有限单元法非常适合结构拓扑优化分析。Wei 等[113]和 Guo 等[114]采用扩展有限单元法和水平集法进行结构拓扑优化设计。

6. 节理岩体

Belytschko 等[25]采用扩展有限单元法和水平集法模拟节理岩体中的隧洞开挖问题,将节理考虑为切向位移不连续,位移等值线能很好地显示出穿过节理的位移的不连续。Yu[115]和 Deb 等[116]采用扩展有限单元法分析节理岩体。

1.3.2 流体力学

Chessa 等[111]采用扩展有限单元法模拟固化问题。Zabaras 等[112]采用扩展有限单元法模拟熔体对流中的树枝状的凝固,数值模拟表明扩展有限单元法能有效地捕捉各种相变现象,用一个均匀网格就可以精确地捕捉二维和三维移动界面。Chessa 等[117]采用扩展有限单元法和水平集法模拟两相不相融合的流体问题,分析表明水平集捕捉相界面具有很多优势。Wagner 等[118]基于扩展有限单元法发展了一种模拟二维微粒流的新方法,对于流过一个圆粒子的流动采用斯托克斯流体解析解加强有限元基。Chessa 等[119]采用扩展有限单元法模拟有表面张力的轴对称两相流问题,混合区的符号距离函数通过求解一个 Laplace 方程获得,这样混合区符号距离函数几乎为常量,从而减少混合区单元的病态项。Chessa[120]采用扩

展有限单元法模拟自由表面和两相流问题。流-固界面的演化可以简单地用 Stefan 方程表示，很多学者采用扩展有限单元法分析流-固相互作用[121-123]。Duddu 等[126]耦合扩展有限单元法和水平集法模拟生物-薄膜的生长，一维和二维数值模拟阐明了该方法的精度和实用性。Chessa 等[127]采用三角形单元的扩展有限单元法研究了多维相变问题，模拟了相界面和单元内温度梯度的不连续性，实例显示了该方法的精度和有效性。Wagner 等[128]基于扩展有限单元法发展了一种数值模拟流体中粒子悬浮问题的方法，对于流过一个粒子的流动采用斯托克斯流体解加强有限元基，对于两个粒子问题的流动，采用润滑理论解加强有限元基。Merle 等[129]将扩展有限单元法应用于具有移动热源和相边界的热问题中，该方法能捕捉热源附近的高度局部化的解或相边界处温度梯度的不连续性。该方法在固定网格上求解瞬态热分析和相变问题，比变网格法好，变网格会出现单元的扭曲。算例表明该方法适合求解移动热源和相变问题。该文首次在固定网格上表示剧烈变化的相界面。Ji 等[130]采用扩展有限单元法利用杂交数值方法在固定网格上模拟剧烈变化相界面的演化，在界面前端位置可以获得一次精度。

1.4 扩展有限单元法程序设计及软件开发

Sukumar 等[131]给出了扩展有限单元法程序编制的详细过程。Bordas 等[132]给出了扩展有限单元法面向对象程序设计框架，同时给出了数百条裂纹的二维线弹性断裂力学问题和裂纹扩展分析以及复杂三维工业问题的应用算例，表明该设计框架的可行性。Wyart 等[133]给出了在一般的有限单元法程序上实现扩展有限单元法功能的方法。Giner 等[134]给出了在 ABAQUS 软件中通过用户子程序 UEL 开发求解二维断裂问题的扩展有限单元法子程序的详细过程和相应的程序代码，这样可以充分利用 ABAQUS 的一些求解功能，比如非线性接触分析。随后，Shi 等[135]在 ABAQUS 软件中通过用户子程序 UEL 实现了三维疲劳裂纹扩展分析。

ABAQUS 软件 6.9 版本已引入扩展有限单元法分析功能，但存在很多局限性，可喜的是 ABAQUS 软件扩展有限单元法功能在不断地进行升级，但尚不能分析裂纹交叉问题。另外，扩展有限单元法已在 ALTAIR RADIOSS、ASTER、CAST3M、VAST、MORFEO、DYNAFLOW、GETFEM＋＋和 OOFEM 等大型有限元软件中得以实现。

国内洞力公司基于扩展有限单元法技术和虚节点多边形有限单元法技术开发了模拟裂纹扩展与预测疲劳寿命的商用软件 ALOF(analyses laboratory of fracture)，ALOF 可以准确预测静载荷或疲劳载荷作用下裂纹行为，确定工程结构损伤容限，为完整性与耐久性分析提供依据。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com