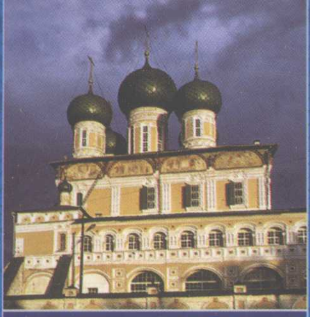


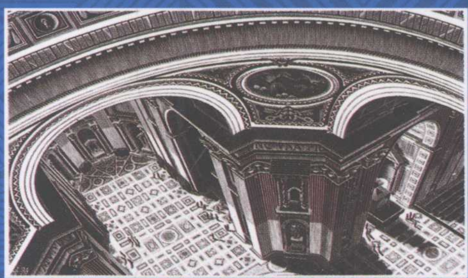
俄罗斯初等数学系列

Ten Thousand Exercises of Elementary Mathematics of Russia
(Algebra Volume)

俄罗斯初等数学万题选

(代数卷)

● 周概容　萧慧敏　王艳丽　编译



- 数学奥林匹克
- 世界看中国
- 中国学俄罗斯
- 有名师才会有高徒
- 本书是俄罗斯师范学院数学系学生必做的习题集

- 中国是数学奥林匹克大国
- 俄罗斯是数学奥林匹克强国
- 中国有世界上人数最多的数学奥林匹克选手
- 俄罗斯有世界上最优秀的数学奥林匹克选手
- 中国的数学奥林匹克训练题花样翻新
- 俄罗斯的数学奥林匹克训练题最具原创性
- 中国全民学奥数
- 俄罗斯精英学奥数

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯初等数学万题选

（代数卷）

● 周概容　萧慧敏　王艳丽　编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

这部“万题选”主要是参照俄文版下列图书编译的：莫坚诺夫《初等数学专门化教程习题集》；莫坚诺夫、诺沃赛洛夫《投考高校数学参考书》；安东诺夫等《初等数学自学习题》；沙赫诺《高难度初等数学习题集》；列曼《莫斯科数学竞赛题集》；雅格洛姆《非初等问题的初等解法》；亚历山德洛夫《集合与函数通论导引》；李俨《中算史论丛》（第1～5集）等.此“万题选”共分三卷：代数卷、几何卷（第一编：平面几何；第二编：立体几何）、三角卷，共搜进习题近10 000道，每卷书的前一部分是习题，后一部分是相应习题的答案、解答或揭示.本卷为代数卷，包括相应习题及解答.

这部“万题选”内容严谨、系统、丰富，适合中小学数学教师、师范院校数学专业师生、高中学生以及数学爱好者参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

俄罗斯初等数学万题选.代数卷/周概容，萧慧敏，王艳丽编译.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5603-4145-3

Ⅰ.①俄… Ⅱ.①周…②萧…③王… Ⅲ.①初等数学－习题集②代数－习题集 Ⅳ.①O12－44②O15－44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第146399号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘家琳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张34 字数620千字
版 次 2013年7月第1版 2013年7月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4145-3
定 价 68.00元

序

学习数学必须做一定的练习. 通过练习, 才能较好地掌握所学的知识和方法, 才能逐步把书本的东西化为自己头脑中的东西. 这是人所共知的道理.

学生之间的差异是客观存在的. 有些学生对数学有较浓厚的兴趣, 不满足于只做课本上的习题, 又有时间和精力做更多更难的习题, 这种愿望是好的. 这部万题选中译本的出版, 希望能对这些学生有所帮助. 有些业余的数学爱好者, 也可以利用它来提高自学水平. 对于中学数学教师, 本书也是一部较好的参考书.

我们鼓励青年们做一定数量的综合题, 这有助于他们融会贯通数学中各分科的内容和方法, 以及在以后工作中解决实际问题.

我们说学数学要做练习, 绝不是说做得越多越好. 做多少才适当, 这是因人而异的. 有的人立志要以数学为自己的专业(这总是少数), 有的人只是要以数学为钻研其他学科的工具; 有的人做少量典型的题, 就能举一反三, 有的人要多做几个才能达到同样目的; 有的人要求掌握更多的技巧, 有的人没有这种要求.

因此不能统一要求,每个人要根据自己的情况来确定选做多少,选做哪些才适当.

做数学练习要求运算熟练而准确,逻辑严密而简明,作图正确而整洁.达到这些要求是要有个过程的.我们希望有志于学好数学的青少年以严肃的科学态度来对待练习的写作,一丝不苟,错了就改,发现更好的方法就重写(只要有时间),精益求精.好的练习应有简明扼要的文字说明,使人一看就懂,不费猜测.科学态度和逻辑表达能力都是一切科学工作者应当具备的品质.

吴大任

1979 年 6 月于南开大学

前言

学习数学,一是要掌握基本知识、概念和性质;二是要掌握基本方法、技能,并掌握一定的技巧.对基本知识要做到深入理解和融会贯通;对基本方法和技能要求熟练和运用自如.

学习基本知识和基本方法训练必须有机结合.做练习、解习题,在数学教学和自学中是极其重要的环节.不过需要强调指出,做题必须以基本知识为指导,并不是做题愈多愈好,盲目地、一味地做题是学不好数学的.重要的是通过解题,从中提炼方法、掌握技巧,达到举一反三的目的.

学习数学,必须做一定数量的习题,做习题可以正确地理解和深入、牢固地掌握有关的概念、性质、公式与方法.不做一定数量的练习是学不好数学的,因为只有通过练习,才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与方法,才能把书本上的东西转化为自己头脑中的东西.况且,许多习题本身就是一些有用的知识或性质,有些习题又是有关知识和方法应用的范例,有些则有助于开阔视野.习题实际上是相应课程的一种必要补充和拓展.

20 世纪 80 年代,前苏联 П · С · 莫坚诺夫《初等数学专门

化教程习题集》的中译本，曾以书名《初等数学习题汇编》在新蕾出版社出版.原《习题汇编》中译本共四个分册：

《代数》第一～第十六章；

《平面几何》第十七～第二十二章；

《立体几何》第二十三～第二十七章；

《三角》第二十八章～第三十一章.

在改革开放初期，著名数学家、教育家、南开大学副校长兼教务长吴大任教授推荐其出版，并亲自为该书撰写了序.该书的出版还得到著名数学家、南开大学原副校长胡国定教授的关心和鼓励.著名数学家，南开大学原数学系主任周学光教授、南开大学校长侯自新教授、著名中学教师赵殿兴先生，审阅了全部译稿.

《习题汇编》中译本出版三十多年来，我国的教育事业有了很大的发展，出版了多种初等数学习题集.不过，像这部书这样系统、全面、深入的并不多见.因此，我们决定结合我国初等数学教学的要求以及读者的需要，对原书进行必要的调整.参照多种俄文版有关图书，例如：沙赫诺《高难度初等数学习题集》；列曼《莫斯科数学竞赛题集》；雅格洛姆《非初等问题的初等解法》；亚历山大洛夫《集合与函数通论导引》；莫坚诺夫、诺沃赛洛夫《投考高校数学参考书》；安东诺夫等《初等数学自学习题》以及我国著名数学史学家李俨的专著《中算史论丛》(第1～5集)等，做了订正和充实，编译出版本《俄罗斯初等数学万题选》.这部"万题选"共分三卷：代数卷、几何卷(第一编：平面几何；第二编：立体几何)、三角卷.

我们主要在以下几方面进行了调整、订正和充实：每卷书增加了学科简介、基本公式和常用数学符号；增补了我国中学教学要求的而原"汇编"缺少的内容，例如：集合论、实数、复数、微积分初步……

这部书的编译得到哈尔滨工业大学出版社的大力支持，该出版社的策划编辑刘培杰老师，对这部书的编译提出了许多指导性意见，在此我们表示深切的谢意.

周概容
2011年5月于南开大学

◎ 翻译说明

这部万题选是根据〔苏〕П·С·莫坚诺夫著《初等数学专门教程习题汇编》第二版翻译而成的. 中译本分为三册:

《代数》;《几何》;《三角》.

每册中包括相应的习题解答. 全书共编进各科习题近10 000道. 习题解答包括提示、题解和答案三种形式. 有的章节附有简短的说明和例题. 在编写这部习题汇编时,原作者参阅了国内外的大量文献,吸收了法国、英国、德国、意大利、波兰、美国、葡萄牙、西班牙、瑞士和中国等一系列国家的初等数学习题. 这部习题汇编内容丰富而系统,适合中学数学教师、师范院校数学专业学生以及有一定基础的中学学生和数学爱好者参考使用.

全部习题根据内容划分章节. 代数和三角的内容分别与С·И·诺渥塞洛夫著《初等代数专门教程》(赵慈庚等译《人民教育出版社》)和《三角学专门教程》(郑星华等译《人民教育出版社》)完全一致. 几何部分的有关内容可参阅梁绍鸿编《初等数学复习及研究》(平面几何)和朱德祥编《初等数学复习及研究》(立体几何)(《人民教育出版社》).

在翻译过程中还参照(俄文版):

沙赫诺《高难度初等数学习题集》;

列曼《莫斯科数学竞赛题集》;

雅格洛姆《非初等问题的初等解法》;

莫坚诺夫、诺渥塞洛夫《投考高校数学参考书》等书,调整了少量习题,选择了一些新题,增补了部分题解.

考虑到部分读者的情况,译者对一些不常见的概念和性质作了注释和说明.在翻译的过程中改正了原书中的一些贻误之处.

吴大任教授、胡国定教授对我们的工作始终关心和鼓励.吴大任教授为本书写了“序”.王大璲同志和袁著祉等同志对本书的翻译工作始终给予了很大支持.周学光教授,赵殿兴先生和侯自新同志分别审阅了代数、几何和三角部分的译稿,并提了不少宝贵意见.在此,我们对以上同志深表谢意.

由于我们水平所限,译文中定有不少不妥之处,恳请读者批评指正.

译　者

◎ 目录

集 合

第 1 章

§1 集合及其运算

1. 写出集合 $\Omega = \{1,2,[1,2]\}$ 的全部子集.

2. 设 Ω 正整数的集合满足条件"当 $\omega \in \Omega$ 时，则 $8 - \omega \in \Omega$"，回答下列问题：

1）写出只含一个元素的集合 T_1；

2）写出只含两个元素的一切集合 T_2；

3）满足上述条件的子集总共多少个？

3. 考虑向平面上掷一个点 ω，设 A_1, A_2, A_3 为平面区域，用集合的关系与运算表示：

1）点恰好落入 3 区域之一；

2）点落入 3 区域的交；

3）点恰好落入 3 区域之外；

4）点至少落入两区域之交；

5）点至少落入 3 区域之一.

4. 设 A，B 和 C 是任意三集合，讨论下列命题是否正确：

1）若 $A \cup C = B \cup C$，则 $A = B$；

2）若 $A \backslash C = B \backslash C$，则 $A = B$；

3）若 $A \cap C = B \cap C$，则 $A = B$；

4）若 $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$，则 $A = \overline{B}$.

5. 对于任意集合 A,B,C,证明下列关系式:

1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing$;

2) $(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\setminus\overline{A\cap B}=A\cap B$.

6. 证明:1) 若 $A\subset B$,则 $\overline{A}\supset\overline{B}$;2) 若 $A\subset B$ 且 $\overline{A}\subset\overline{B}$,则 $A=B$.

7. 对于任意集合 A,B,C,证明下列关系式:

1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing$;

2) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

8. 证明:$\overline{A\cup B}\cap C=(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)$ 是 $A\cap C=B\cap C$ 成立的充分和必要条件.

9. 如图 1,设电路 MN 中装有 a 和 b 两个继电器. 以 A 和 B 分别表示 a 和 b 为通路,以 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别表示 a 和 b 断路. 试利用电路 MN 的"通"和"断"两种状态证明集合的对偶律.

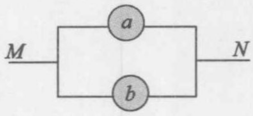


图 1

10. 假设市场上出售甲厂和乙厂生产的产品. 考虑集合 $A=\{$甲畅销$\}$,$B=\{$乙畅销$\}$,则 $\overline{A}=\{$甲不畅销$\}$,$\overline{B}=\{$乙不畅销$\}$,用集合的关系与运算表示:1)至少一种畅销;2) 都畅销;3) 至少一种不畅销;4) 都不畅销;5) 甲畅销、乙不畅销.

11. 对于任意两集合 A 和 B,证明下列关系式等价

$$A\subset B,\overline{A}\supset\overline{B},A\cap\overline{B}=\varnothing,A\cup B=B$$

12. 证明事件运算的对偶律:

1) $\overline{\bigcup\limits_{i=0}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$;

2) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

13. 已知集合 A 和 B,满足条件

$$(A\cup\overline{X})\cap(\overline{A}\cup\overline{X})\cup\overline{A\cup X}\cup\overline{\overline{A}\cup X}=B$$

求集合 X.

14. 设 A,B 是任意集合,证明:若 $A\cap B=\varnothing$且 $\overline{A\cap B}=\varnothing$,则 $\overline{A}=B$.

15. 判断命题的正确性:设 $AB\neq\varnothing$,则 $\overline{A},B$ 不相容.

16. 设 A 和 B 互为对立集合,证明 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也互为对立集合.

17. 0,1,…,9 等 10 个阿拉伯数字中随意选 8 个(允许重复),组成一个 8

位电话号码(第一位数不为0). 引进集合:$B_i=\{$号码中不含数字 $i\}$,$\overline{B}_i=\{$号码中含数字 $i\}$$(i=0,1,\cdots,9)$. 说明下列集合的含义:$B_0\cap B_9$,$B_0\cup B_9$,$B_0\cap\overline{B}_9$,$\overline{B}_0\cup\overline{B}_9$.

18. 靶子由半径为 $r_1<r_2<\cdots<r_{10}$ 的同心圆构成. 设集合 $A_i=\{$半径为 r_i 的圆$\}$$(i=1,2,\cdots,10)$,说明集合 A,B,C,D 的含义

$$A=\overline{A}_3\cap A_4;\quad B=\bigcup_{i=1}^{6}A_i;\quad C=\bigcup_{i=3}^{6}A_i;\quad D=\bigcap_{i=1}^{10}A_i$$

19. 证明集合 A,$\overline{A}\cap B$ 和 $\overline{A\cup B}$ 两两不相交.

20. 证明下列等式:

1) $(A\cup B)\setminus B=A\setminus A\cap B=A\cap\overline{B}$;

2) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$;

3) $\overline{(A\cap B)\cup(C\cap D)}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup\overline{D})$.

21. 设 $\mathbf{Q}$ 是有理数集. 证明:

1) 若 $s,t\in\mathbf{Q}(t\neq0)$,则 $st\in\mathbf{Q}$;

2) 若 $s,t\in\mathbf{Q}(t\neq0)$,则 $\frac{s}{t}=p^2+q^2$.

22. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合,以 $N(A)$ 表示集合 A 中元素的个数,证明

$$N(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}N(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}N(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}N(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}N(A_1A_2\cdots A_n)$$

23. 一数学竞赛中有甲、乙、丙 3 道题. 假设参加竞赛的 25 名学生每人至少解出一题,在没做对甲题的学生中,做对乙题的人数是做对丙题人数的 2 倍,只做对甲题的人数比其余学生中做对甲题的多一人,只做对一道题的一半人没做对甲题. 求只做对乙题的学生的人数 n.

§2 集合的映射[①]

1. 何谓映射?

---

① 记号:设 $\mathbf{N}$——自然数集,$\mathbf{R}$——实数集,$\mathbf{Q}$——有理数集,$\mathbf{W}$——无理数集,$\mathbf{Z}^+$——正整数集,$\mathbf{Z}^-$——负整数集,$\mathbf{Z}$——整数集,$f:A\mapsto B$ 表示 A 到 B 的映射. 自然数集合有两个不同定义:$\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 和 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$,我国现在采用前一种.

2. 何谓可逆映射？何谓逆映射？

3. 何谓单射的象集、原象集？

4. 何谓单射、双射、映射的合成（积）？

5. 何谓恒等映射？何谓相等映射？

6. 设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，且 $f:A\mapsto B$. 证明：

1）若 f 为单射，则 $m\leq n$；

2）若 f 为满射，则 $m\geqslant n$；

3）若 f 为双射，则 $m=n$.

7. 对于集合 $A=\{1,2,3,4\}$，则：

1）从 A 到 A 的映射有多少个？

2）从 A 到 A 的一一映射有多少个？

8. 设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，且 $f:A\mapsto B$. 证明下列三命题等价：

1）f 是单射；　　2）f 是满射；　　3）f 是双射.

9. 设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，证明：A 到 B 的不同映射的总数为 n^m.

10. 证明：n 个元素的集合的不同单射的总数为 $\mathrm{C}_n^m\cdot m!$.

11. 已知集合 A,B 及对应的法则

$$A=\mathbf{R},B=\{y\mid -\frac{\pi}{2}<b<\frac{\pi}{2},b\in\mathbf{R}\},f:a\mapsto b=\arctan a$$

判断 f 是否映射？是否一一映射？并说明为什么.

12. 证明：从 n 个元素的集合到 n 个元素的集合的不同单射个数为 $n!$.

13. 何谓映射 f_1 和 f_2 的积（或合成）？

14. 设 $A=\mathbf{R}^+$——正实数集，$B^{\cdot}=\mathbf{R}$——实数集，给出 A 到 B 的一个单射.

15. 设映射 $f_1:A\mapsto B$ 和 $f_2:B\mapsto C$，证明：

1）若 f_1 和 f_2 都是单射，则 $f=f_1f_2$ 是单射；

2）若 f_1 和 f_2 都是满射，则 $f=f_1f_2$ 是满射；

3）若 f_1 和 f_2 都是双射，则 $f=f_1f_2$ 是双射.

16. 已知集合 A,B 以及相应的映射 f，证明：

1）对于 $A=\{a\mid a(t)$ 是一元整系数多项式$\}$，$f:a\mapsto b=a(0)$；

2）对于 $A=\mathbf{Z},B=\{b\mid b=2k,k\in\mathbf{Z}(整数集)\}$，$f:a\mapsto b=2a$.

17. 设映射 $f_1:A\mapsto B$ 和 $f_2:B\mapsto C$，证明：

1）若 $f=f_1f_2$ 是单射，则 f_1 是单射；