Б.П.吉米多维奇

数学分析习题经典解析

费定晖 编演 郭大钧 主审

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

Б.П.
吉米多维奇
数学分析习题经典解析

费定晖　编演　郭大钧　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

吉米多维奇数学分析习题经典解析/费定晖编演.—济南:山东科学技术出版社,2013
ISBN 978 - 7 - 5331 - 7069 - 1

Ⅰ. ①吉... Ⅱ. ①费... Ⅲ. ①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.① O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 242061 号

吉米多维奇数学分析习题经典解析

费定晖　编演

出版者： **山东科学技术出版社**
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002　电话:(0531)82098088
网址:www. lkj. com. cn
电子邮件:sdkj@ sdpress. com. cn

发行者： **山东科学技术出版社**
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002　电话:(0531)82098071

印刷者： **山东人民印刷厂**
地址:莱芜市嬴牟西大街28号
邮编:271100　电话:（0634）6276022

开本：787mm × 1092mm 1/16
印张：27.5
版次：2013年12月第1版第1次印刷

ISBN　978 – 7 – 5331 – 7069 – 1
定价：　48.00 元

前 言 QIANYAN

由费定晖、周学圣编演，郭大钧、邵品琮主审的图书《Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解》(以下简称为《题解》)，全书共六册，自 1979 年经由山东科学技术出版社出版发行以来，历经 34 个春秋，先后共有 4 个版本 30 余次印刷，一直畅销不衰，深得读者厚爱。对此我们倍感欣慰，这将鞭策我们为读者作出更多奉献。

这次受山东科学技术出版社的再次约请，由我负责，在《题解》一书的基础上，从各章节中挑选出较为经典的习题，除了原解答外，有些题还给出了分析提示或思路，从而组成一本新书《Б. П. 吉米多维奇数学分析习题经典解析》(以下简称为《经典解析》)，全书共一册出版。

对于《经典解析》一书，我有以下几点考虑：

第一，考虑到不同层次的读者的不同要求，各类型的习题由浅入深，由易到难。有些题在它的后面还加上**注**，例如，143 题证明施托尔茨定理及 144 题的**注**，又如 3793 题的**注**，等等，对于一定层次的读者，这些所加的**注**要仔细阅读，予以密切关注。如果你认真做了，收获将会倍增。

第二，对不同类型的习题，根据难易程度的不同，对《经典解析》一书中的部分习题，在原题解的前面，分别给出**提示**，或给出**解题思路**，或给出**证明思路**，例如 52 题、452 题、150 题，等等，目的是帮助读者怎样分析问题，怎样下手解决问题，为他们在学习过程中提供一个良师益友。

第三，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达，并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准和适应时代发展需要。

第四，根据当前的语言习惯，对《经典解析》一书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，语言更加简洁、凝练和流畅。

第五，全书所选习题的总题量控制在原习题集 4462 题的四分之一左右，其中证明题的量占到近三成。这样，可使读者在一定量的时间内既能保证数学分析基本功的训练，又能提高学习质量和数学素养。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功。我们编写本书，希望能帮助读者更好地掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，巩固和加深对该课程基本内容的理解。

本书特请山东大学郭大钧教授担任主审，他对全书作了重要、仔细的审校，其中有的习题的较好解法或证明思路，均出自他的亲笔，这对于提高全书的质量极为重要，特致衷心的感谢。

这次本书能顺利地在较短的时间内出版发行，有赖于山东科学技术出版社领导的大力支持，该社责任编辑宋涛同志、邱蕾同志作了大量深入细致的编辑和版面设计等工作，付出了艰辛努力，对此我们深表谢意。同时感谢山东大学、华东交通大学等学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。

面对如此庞大、丰富多彩、极其经典的图书，限于本人水平，《经典解析》一书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在重印中更正。

费定晖

2013 年 6 月于华东交通大学

目录 MULU

第一章　分析引论

§1.　实　数

1° **数学归纳法**　为了证明某定理对任意的正整数 n 为真，只需证明下面两点即可：(1)这定理对$n=1$为真，(2)设这定理对任何的一个正整数 n 为真，则它对下一个正整数 $n+1$ 也为真.

2° **分割**　若分有理数为 A 和 B 两类，使其满足下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(**下类**)的任一数小于属于 B 类(**上类**)的任何数，则这样的一个分类法称为**分割**.(ⅰ)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(ⅱ)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数.有理数和无理数统称为实数*.

3° **绝对值**(或模)　若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数 $|x|$，称为 x 的绝对值(模)：

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° **上确界和下确界**　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合，若：

(1)每一个 $x\in X$** 满足不等式 $x\geqslant m$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使 $x'<m+\varepsilon$，则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样，若：

(1)每一个 $x\in X$ 满足不等式 $x\leqslant M$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x''\in X$，使 $x''>M-\varepsilon$，则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界，则通常说 $\inf\{x\}=-\infty$；

若集合 X 上方无界，则认为 $\sup\{x\}=+\infty$.

5° **绝对误差和相对误差**　设 a $(a\neq 0)$是被测量的精确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为被测量的绝对误差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的相对误差.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半，则说 x 有 n 位精确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立：

【5】 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及 $a^{[0]}=1$，求证：

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数，由此推出牛顿二项式公式.

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X.

证 当 $n=1$ 时，由于 $[a+b]^{[1]}=a+b$ 及 $\sum\limits_{m=0}^{1} C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]}=a+b$，所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]} b^{[0]}+C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]}+\cdots+C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0 a^{[k]} b^{[0]}+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]}+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\\
&=C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+C_k^0 a^{[k]} b^{[1]}+C_k^1 a^{[k]} b^{[1]}+C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]}+\cdots+C_k^k a^{[1]} b^{[k]}+C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1) a^{[k]} b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k) a^{[1]} b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}$$

故由 $(a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$ 可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 中，令 $h=0$，即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式 $(a+b)^n=\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$.

【6】 证明伯努利不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时，此式取等号.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1，所以，$1+x_i>0$. 因而，有

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\
&\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\
&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).
\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$，所以，

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【8】 证明不等式：$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n>1)$.

提示 注意不等式$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\quad(k=1,2,\cdots)$.

证 当$n=2$时，因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$，故不等式成立.

设$n=k$时，不等式成立，即$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$，则对于$n=k+1$时，有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\quad(k=1,2,\cdots),$$

从而有
$$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立.

于是，对于任何正整数n，有$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【10】 证明不等式：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证 当$n=1$时，因为$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设$n=k$时，不等式成立，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

则对于$n=k+1$时，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$，即证$(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$，而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 于是，最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立. 于是，由数学归纳法，本题证毕.

【11】 设c为正整数，而不为整数的平方，且A/B为确定实数$\sqrt{c}$的分割，其中B类包含所有满足$b^2>c$的正有理数b，而A类包含所有其余的有理数. 求证：在A类中无最大数，而在B类中无最小数.

证 设$a\in A$. 若$a\leqslant 0$，则显然存在$a'>a(a'>0)$且$a'\in A$. 故可设$a>0$，于是$a^2\leqslant c$. 但不可能有$a^2=c$. 因若$a^2=c$，设$a=\frac{p}{q}$，p与q为互素的正整数，则$\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于c是正整数，而p^2与q^2也是互素的，故必$q=1$，从而$c=p^2$，此与假定矛盾，故必$a^2<c$. 下面我们证明，存在正整数n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是$a+\frac{1}{n}$也属于A.

上述不等式相当于：$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c$，$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2$，若$n$满足不等式$\frac{2a+1}{n}<c-a^2$，则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取 $n>\dfrac{2a+1}{c-a^2}$，而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【13】 作出适当的分割，然后证明等式：(1)$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$.

证 (1)作确定$\sqrt{2}$的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入 B 类. 又作确定$\sqrt{8}$的分割 A'/B'：一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足 $a'^2<8$ 的正有理数 a' 归入 A'类，一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b'归入 B'类. 我们知道，根据实数加法的定义，满足不等式：

$$a+a'<c<b+b'\quad (\text{对任何 } a\in A, b\in B, a'\in A', b'\in B')$$

的唯一实数 c 就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此，如果我们能证明恒有$(a+a')^2<18$(当 $a+a'>0$ 时)，$(b+b')^2>18$，则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$. 于是得知 $\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若 $a+a'>0$，则 a 与 a'中至少有一个为正，从而由 $a^2a'^2<16$ 知 $aa'<4$，

$$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18;$$

同样，因 $b^2>2, b'^2>8, b>0, b'>0$，故 $b^2b'^2>16, bb'>4$，

$$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18.$$

于是证毕.

【15】 求证：任何非空且下方有界的数集有下确界，而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性，只证本题的后半部分，分两种情形：

(1)A 中有最大数$\bar{a}$，此时，设 $a\in A$，则有 $a\leqslant\bar{a}$，说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a}\in A$，故对 A 的任何上界 M，均有 $\bar{a}\leqslant M$，故 $\bar{a}$ 为 A 的上确界.

(2)A 中无最大数. 此时，作分割 A_1/B_1：取集 A 的一切上界归入 B_1 类，而其余的数归入 A_1 类. 这样，A 中一切数全部落在 A_1 内，A_1 及 A 均非空，且 A_1 中的数小于 B_1 中的数，这确实是一个实数分割，易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数，即 β 是 A 的最小上界，从而 β 是 A 的上确界.

【18】 设$\{-x\}$为数的集合，这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数. 证明等式：

(1)$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

证 (1)设 $\inf\{-x\}=m'$，则有：

(ⅰ)当$-x\in\{-x\}$时，$-x\geqslant m'$； (ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有$-x'\in\{-x\}$，使$-x'<m'+\varepsilon$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x\in\{x\}$时，$x\leqslant -m'$； (ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'\in\{x\}$，使 $x'>-m'-\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数$-m'=\sup\{x\}$，即 $m'=-\sup\{x\}$，所以，$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

【19】 设$\{x+y\}$为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$. 证明等式：

(1)$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

证 (1)设 $\inf\{x\}=m_1$，$\inf\{y\}=m_2$，则有：

(ⅰ)当 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$时，$x\geqslant m_1$，$y\geqslant m_2$；

(ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有数 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使 $x'<m_1+\dfrac{\varepsilon}{2}$， $y'<m_2+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x+y\in\{x+y\}$时(其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$)，$x+y\geqslant m_1+m_2$；

(ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'+y'\in\{x+y\}$ (其中$x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$)，使 $x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$，即 $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

解不等式：

【26】 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

提示 令 $x-2=t$，易得 $-8\leqslant t\leqslant 4$，从而有 $|x|\leqslant 6$.

解 令 $x-2=t$，则得 $|t+4|+|t|\leqslant 12$ 或 $|t+4|\leqslant 12-|t|$.

两边平方，即有 $t^2+8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2$，或 $3|t|\leqslant 16-t$.

将上式两端再平方，化简整理得 $t^2+4t-32\leqslant 0$，于是，有 $-8\leqslant t\leqslant 4$. 从而得 $-8\leqslant x-2\leqslant 4$，即

$$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

【29】 $|x(1-x)|<0.05$.

解 由 $|x-x^2|<\frac{1}{20}$ 得 $x^2-x+\frac{1}{20}>0$ 或 $x^2-x-\frac{1}{20}<0$，解之得

$$\begin{cases}\dfrac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\dfrac{5+\sqrt{30}}{10}\\[2ex] \dfrac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\dfrac{5-\sqrt{20}}{10},\end{cases}$$

即

$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \quad 或 \quad \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【40】 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差，$\delta(x,y)$ 为数 xy 的相对误差. 求证：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

提示 由绝对误差与相对误差的定义，命题即获证.

证 设 $x=a+\Delta_x$，$y=b+\Delta_y$，其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

于是，

$$\Delta=|xy-ab|\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

最后得

$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1° **数列极限的概念** 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a（或者说，收敛于 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 x_n 为无穷小量.

没有极限的数列，称为发散的.

2° **极限存在的准则**

(1)若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，

(2)单调而且有界的数列有极限.

(3)**柯西准则** 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的充分必要条件是：对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$.

3° **关于数列极限的基本定理** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则有：

(1)若 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \lim\limits_{n\to\infty}y_n$;　　　　(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4° **数 e**　数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.7182818284\cdots$$

5° **无穷极限**　符号

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$$

表示：对于任何的 $E>0$，存在数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$.

6° **聚点**　若已知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有子数列

$$x_{p_1},x_{p_2},\cdots,x_{p_n},\cdots \quad (1\leqslant p_1<p_2<\cdots)$$

满足

$$\lim_{n\to\infty}x_{p_n}=\xi,$$

则称数 ξ（或符号 ∞）为已知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的聚点（聚点也称为极限点）.

一切有界的数列至少有一个有限的聚点（波尔查诺——魏尔斯特拉斯原理）. 若这个聚点是唯一的，则它即为已知数列的有限极限.

数列 x_n 的最小聚点（有限的或无穷的）$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 称为此数列的下极限，而它的最大聚点 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 称为此数列的上极限.

等式 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$ 为数列 x_n 的（有限或无穷）极限存在的充分必要条件.

【44】　求证：$x_n=n^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$ 无界，但当 $n\to\infty$ 时，它并不成为无穷大.

提示　只要注意到当 k 为正整数时，有　$x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & n=2k,\\ \dfrac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\end{cases}$

命题即获证.

证　因为　$x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & n=2k,k \text{ 为正整数},\\ \dfrac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\end{cases}$

所以，$x_{2k}\to\infty$，$x_{2k-1}\to 0\ (k\to\infty)$. 由于 $x_{2k}\to\infty$，故 x_n 无界；但因 $x_{2k-1}\to 0$，故 x_n 并不趋于无穷大.

设 n 遍历正整数列，求下列各式之值：

【48】　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解　因为 $\sin n!$ 有界：$|\sin n!|\leqslant 1$ 及 $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$.

【52】　$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

提示　分别令 $n=2k$ 及 $n=2k+1$（k 为正整数），易知极限不存在.

解　当 $n=2k$ 时（k 为正整数），

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$

当 $n=2k+1$，

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$

由于取不同方式时，所得的极限值不同，所以，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{1}{3}$.

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

提示 令 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$，先证 $\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}=8f(2n)-4f(n)$.
利用53题的结果即获解.

解 设 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$，由53题即得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

提示 令 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ 及 $g(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$，
易证 $f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}$. 利用58题的结果即获解.

解 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，$g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$，
则有 $2f(n+1)-g(n)=f(n)+1$，又由 $2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1$，故

$$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}[g(n)+1]=3$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0$*)，故得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$.

*) 参看58题.

证明下列等式：

【58】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

提示 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$ $(n>2)$.

证 因为 $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1>\frac{n(n-1)}{2}$ $(n>2)$，

故 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$；又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

【60】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$.

提示 $a^n>\frac{n^2(a-1)^2}{4}$ $(n>2)$. 分别就 $k\leqslant 0$，$k=1$ 及 $k>0$ 三种情形加以证明.

证 令 $a=1+\lambda$ $(\lambda>0)$，
则

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\quad(n>2).$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，此时，$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2(a-1)^2}{4}$.

(1)当 $k\leqslant 0$ 时,这时显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n\cdot n^{-k}}=0$.

(2)当 $k=1$ 时,$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2}$,而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2}\to 0$, 所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$;

(3)当 $k>0$ 时,$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k$,而 $a^{\frac{1}{k}}>1$,于是由(2)知,$\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\to 0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

总之,当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

【61】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

提示 令 k 代表任一大于 $2|a|$ 的正整数,则当 $n>k$ 时,有 $0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|<\frac{(2|a|)^k}{2^n}$.

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的正整数,则当 $n>k$ 时,有

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{k}\right)\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}\right)<|a|^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2|a|)^k}{2^n}=0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

【62】 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$,若 $|q|<1$.

提示 分别就 $0<q<1$,$-1<q<0$ 及 $q=0$ 三种情形加以证明.

证 (1)当 $0<q<1$ 时,可令 $q=\frac{1}{a}$,其中 $a>1$,所以,当 $n\to\infty$ 时,$nq^n=\frac{n}{a^n}\to 0$ *);

(2)当 $-1<q<0$ 时,可令 $q=-q'$,其中 $0<q'<1$,所以,当 $n\to\infty$ 时,$nq^n=(-1)^n nq'^n\to 0$;

(3)当 $q=0$ 时,$nq^n=0$.

总之,当 $|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

*) 利用 60 题的结果.

【63】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$.

提示 分别就 $a=1$,$a>1$ 及 $0<a<1$ 三种情形加以证明.

证 (1)当 $a=1$ 时,等式显然成立;

(2)当 $a>1$ 时,因为 $(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon(n>1,\varepsilon>0)$,则当 n 充分大后,可使 $1+n\varepsilon>a$,即 $(1+\varepsilon)^n>a$.事实上,只要取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,就可保证这点.所以,$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$,于是,当 $n>N$ 时,$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$,此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$;

(3)当 $0<a<1$ 时,则令 $a=\frac{1}{a'}$,其中 $a'>1$.于是,当 $n\to\infty$ 时,$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a'}}\to 1$.

总之,当 $a>0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【68】 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

提示 利用 10 题的结果及夹逼准则.

证 因为 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *),又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

*) 利用 10 题的结果.

【69】 证明:数列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n=1,2,\cdots)$ 是单调增加的,且上方有界.而数列 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是单调减少的,且下方有界.由此推出这些数列有公共的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

证明思路 首先，将 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 展开，可得

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

当 n 增加时，上式的项数增多，而且每个括弧内的数值也增大，故知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加. 由上式，利用 $\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$ $(k>2)$，可得 $x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$，即数列 x_n 上方有界.

其次，由

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即易推出 $y_{n-1}>y_n$，故知数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 单调减少. 又显然可知 $y_n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{n}{n}=2$，即数列 y_n 下方有界.

证 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

其中每一项都为正，当 n 增加时，不但对应的项数增多，而且每一个括弧内的数值也增大，所以，数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加.

又当 $k>2$ 时，$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$，$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,$$

此即数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 上方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，以 e 表之.

其次，由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{n+1}{n}$，也即 $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$，所以，$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，此即 $y_{n-1}>y_n$，因而，数列 $y_n(n=1,2,\cdots,)$ 单调减少. 又因

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+n\cdot\frac{1}{n}=2,$$

所以，数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 下方有界.

由此，我们知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

【71】 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列，而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列（$p_n,q_n\notin[-1,0]$）. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$