普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus
新核心
理工基础教材

数学物理方法
试题分析与解答

上海交通大学数学系　组编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus 新核心

理工基础教材

数学物理方法

试题分析与解答

上海交通大学数学系　组编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书选编上海交通大学近年的10份本科非数学专业数学物理方法(含原复变函数、积分变换和工程数学)课程考试试卷,对每一道试题均做详解,部分题目有题前分析和题后点评,指明解题思路和方法以及学生在解题过程中常犯的错误,有的题还给出多种解法.本书还编有3份模拟试卷并附答案,供学生复习自测使用.

本书可作为高等院校《数学物理方法》课程师生的教学辅导用书,也可供考研者参考.

读者联系邮箱:science@press.sjtu.edu.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法试题分析与解答/上海交通大学数学系编.—上海:上海交通大学出版社,2013
新核心理工基础教材
ISBN 978-7-313-10388-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①上… Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-题解 Ⅳ.①O411.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第227025号

数学物理方法试题分析与解答
上海交通大学数学系 编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路951号 邮政编码200030)
电话:64071208 出版人:韩建民
上海交大印务有限公司印刷 全国新华书店经销
开本:787 mm×960 mm 1/16 印张:9.75 字数:182千字
2013年9月第1版 2013年9月第1次印刷
ISBN 978-7-313-10388-8/O 定价:22.00元

前　言

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、管理等各科学生都具有扎实的数学基础. 历年来，上海交通大学的学生在国内外高校的数学竞赛中屡屡获奖；在历届硕士研究生入学考试中，考生的数学平均成绩，总是名列前茅. 这些成绩的取得，是因为上海交通大学有一个行之有效的教学及考核体系，有一套先进且成熟的优秀教材和辅导材料，有一支充满活力的教学梯队，特别是有一个教学核心，几十年来始终坚持在教学第一线，不断地总结教学经验、搜集教学资料. 今天的成绩，是长期积累的成果，是历史的沉淀和升华.

学好一门基础理论课程与顺利地通过这门课程的考试，两者的要求是不同的. 前者要求掌握课程的总体概貌，不但要掌握这门课程的基本概念、基本内容以及基本方法，还要了解它们的来龙去脉，知道所学的内容何处来、用在何处、如何应用. 后者是检验所学内容的掌握情况，注重课程内各概念和内容之间的联系，强调基本概念和基本方法，适当顾及应用问题. 这两者之间没有包含关系，所以顺利地通过考试也是一门学问，本书的编写，就是希望在这方面对读者有所帮助.

近年来，大学基础课程的内容和教学有了很大的变化. 根据课程改革的要求，原工程数学系列课程中的复变函数、积分变换和数学物理方程课程被整合为数学物理方法课程.

本书选编了近年来上海交通大学本科非数学专业数学物理方法（含原复变函数、积分变换和工程数学）课程考试试卷. 为避免试卷题目的重复或雷同，对试卷进行重新编排. 本书内容充实，形式多样，知识点广，难易恰当. 其中既有许多体现本课程要求的基本题，又有一些难度较大、略带技巧性的综合题，以及具有实际意义的应用题. 对所有的题目，本书做详尽的解答，包括：每题所考的知识点，解题时所需的基本方法、公式，以及解题具体步骤，并尽量做到试题分析透彻，解题方法简明扼要，步骤清楚，通俗易懂. 本书还编有 3 份模拟试卷并附答案，供学生复习自测

使用.

由于上述特点，本书具有较广泛的适用性，可作为高等院校数学物理方法课程学生的教学辅导参考材料，也可以作为教师参考用书.

本书由王健负责执笔. 本书的编写和出版得到了上海交通大学数学系的大力支持，许多任课教师对历年命题付出了艰辛的劳动，在此一并致谢.

限于水平，加之时间紧迫，书中不妥或错误之处，敬请读者不吝指教.

编　者

2013 年 8 月于上海交通大学

目　　录

试 卷 1

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列方程所表示的曲线中，不是圆周的为（　　）.

(A) $\left|\dfrac{z-1}{z+2}\right| = 2$；

(B) $|z+3|-|z-3| = 4$；

(C) $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1\ (|a|<1)$；

(D) $z\bar{z}+a\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{a}-c=0\ (c>0)$.

2. 设 $z=0$ 为函数 $\dfrac{(1-e^{z^2})}{z^4\sin z}$ 的 m 阶极点，那么 $m=$（　　）.

(A) 5；　　(B) 4；　　(C) 3；　　(D) 2.

3. 下列积分中，积分值不为零的是（　　）.

(A) $\oint_C \dfrac{1}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z-1|=2$；

(B) $\oint_C e^z\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z|=5$；

(C) $\oint_C \dfrac{z}{\sin z}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z|=1$；

(D) $\oint_C \dfrac{\cos z}{z-1}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$.

4. 设函数 $\dfrac{e^z}{\cos z}$ 的泰勒展开式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径 $R=$（　　）.

(A) $+\infty$；　　(B) 1；　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$；　　(D) π.

5. 设 $f(t)=te^{-3t}\sin 2t$，则其拉普拉斯变换 $L[f(t)]$ 为（　　）.

(A) $\dfrac{4(p+3)}{[(p+3)^2+4]^2}$；　　(B) $\dfrac{(p+3)}{[(p+3)^2+4]^2}$；

(C) $\dfrac{4(p+3)}{(p+3)^2+4}$; (D) $\dfrac{4p}{[p^2+4]^2}$.

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 C 为正向圆周 $|z|=3$,则积分 $\oint_C \dfrac{z+\bar{z}}{|z|}\mathrm{d}z=$ ________________.

2. 设 $u(x, y)$ 的共轭调和函数为 $v(x, y)$,a, b 为常数,那么 $au(x, y)+bv(x, y)$ 的共轭调和函数为________________.

3. $(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}$ 的主值为________________.

4. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在奇点 $z=0$ 处的留数为________________.

5. 设 $u(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$,则函数 $f(x)=u(x)\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的傅里叶变换为________________.

三、计算题(本大题共 8 小题,每小题 8 分,共 64 分)

1. 设 $v=\mathrm{e}^{px}\cos 2y$,按题意要求求解:

(1) 求 p 的值,使 v 为调和函数;

(2) 求调和函数 $u(x, y)$ 使得函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 为解析函数.

2. 已知函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^4-5z^2+4)}$,试在圆环域 $1<|z|<2$ 内展开成罗朗级数.

3. 利用留数计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\ (a>0)$ 的值.

4. 利用留数计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2x\sin x\cos x}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x$ 的值.

5. 利用拉普拉斯变换的性质,求积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 4t}{t}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t$ 的值.

6. 利用拉普拉斯变换的性质,解微分方程的初值问题:

$$\begin{cases}x''(t)-3x'(t)-4x(t)=\delta(t-1),\\ x(0)=0,\ x'(0)=0.\end{cases}$$

7. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=\sin 2x,\ 0<x<\pi,\ t>0,\\ u(0, t)=u(\pi, t)=0,\\ u(x, 0)=u_t(x, 0)=0.\end{cases}$$

8. 给定初值问题 $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \mathrm{e}^{-t}, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \cos 2x, \end{cases}$ 求上述初值问题的解.

（已知：$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos 2bx \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{-b^2}$.）

四、证明题（本题 6 分）

设 D 为单连通区域，$z_0 \in D$，$f(z)$ 在 D 内除 z_0 外均解析，且 $|f(z)|$ 在 z_0 的邻域内有界.

证明：$\oint_C f(z) \mathrm{d}z = 0$，其中：$C$ 为 D 内任一包含 z_0 的闭曲线.

试　卷　2

一、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Im}(z_0)}{z-z_0}=(\quad)$.

(A) 等于 i;　　(B) 等于 $-$i;　　(C) 等于 0;　　(D) 不存在.

2. 下列命题中,**不正确的**是(　　).

(A) 积分 $\oint\limits_{|z-a|=r}\dfrac{1}{z-a}\mathrm{d}z$ 的值与半径 $r(r>0)$ 的大小无关;

(B) $\left|\int_C(x^2+\mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z\right|<1$,其中 C 为连接 $-\mathrm{i}$ 到 i 的线段;

(C) 若 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析,且沿任何圆周 C: $|z|=r(0<r<1)$ 的积分等于零,则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处解析;

(D) 设函数 $g(z)$ 在区域 D 内有定义,且 $f'(z)=g(z)$,则在 D 内 $g'(z)$ 存在且解析.

3. 在下列函数中,$\mathrm{Res}[f(z),0]=0$ 的是(　　).

(A) $f(z)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}-\dfrac{1}{z}$;　　(B) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}-\dfrac{1}{z}$;

(C) $f(z)=\dfrac{\sin z+\cos z}{z}$;　　(D) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^2}$.

4. 利用拉普拉斯变换的性质,实积分 $\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-at}\sin bt\,\mathrm{d}t\ (a>0)$ 的值为(　　).

(A) $\dfrac{b^2-a^2}{(b^2+a^2)^2}$;　(B) $\dfrac{-2ab}{(b^2+a^2)^2}$;　(C) $\dfrac{2ab}{(b^2+a^2)^2}$;　(D) $\dfrac{a^2-b^2}{(b^2+a^2)^2}$.

5. 求解固有问题 $\begin{cases}X''(x)+X(x)=0,\ 0<x<l,\\ X'(0)=X(l)=0,\end{cases}$ 其固有函数是(　　).

(A) $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $n=1,2,\cdots$;

(B) $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, $n=0,1,2,\cdots$;

(C) $\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$, $n=0, 1, 2, \cdots$;

(D) $\cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$, $n=0, 1, 2, \cdots$.

二、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 $z=0$ 为函数 $\dfrac{1}{z^3-\sin z^3}$ 的 m 阶极点,那么 $m=$________.

2. 调和函数 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 的共轭调和函数为________________.

3. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-2)^n$,在 $z=4$ 收敛而在 $z=2+2\mathrm{i}$ 发散,则其收敛圆域为________.

4. 若 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-5t}, & t\geqslant 0,\end{cases}$ 则拉普拉斯变换 $L[f(t)]=$__________.

5. 设有定解问题 $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x), & 0<x<l,\ t>0,\\ u\,|_{x=0}=u_1,\ u\,|_{x=l}=u_2,\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\,|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}$ 其中:u_1, u_2 为常数.

令其解为 $u(x, t)=v(x, t)+w(x)$,使得 $v(x, t)$ 满足齐次方程、齐次边界条件,则 $w(x)$ 应满足定解问题为________________________.

三、计算题(本题共 7 小题,每小题 9 分,共 63 分)

1. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z^2+1)}$ 在 $0<|z-\mathrm{i}|<1$ 内展开为罗朗级数.

2. 用留数定理计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$.

3. 求积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z$ 的值,从而证明定积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\pi$.

4. 设 $mn\neq 0$, $ab\neq 0$,试用拉普拉斯变换求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}\cos bt-\mathrm{e}^{-mt}\cos nt}{t}\mathrm{d}t$.

5. 用拉普拉斯变换求解微分方程(ω, a, b 是常数,u 是单位阶跃函数)

$$y''-\omega^2 y=au(t-b),\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$$

6. （1）设 $u(x,t)=g(t)\sin x$ 是一维波动方程初始值问题 $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(t)\sin x,\\u(x,\,0)=0,\\u_t(x,\,0)=A\sin x\end{cases}$ 的解. 证明：$g(t)$ 是下列常微分方程初值问题 $\begin{cases}g''(t)+a^2g(t)=f(t),\\g(0)=0,\ g'(0)=A\end{cases}$ 的解；

（2）求 $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=t\sin x,\\u(x,\,0)=0,\\u_t(x,\,0)=\sin x\end{cases}$ 的解.（提示：可以利用(1)的结论.）

7. 长为 l，杆身与外界绝缘的均匀细杆，杆的两端保持零度，已知其初始分布为 $u(x,\,0)=\varphi(x)$.

（1）写出求上述杆的温度分布的定解问题；

（2）用分离变量法求 $\varphi(x)=lx$ 时，杆上的温度分布.

四、证明题（本题 7 分）

试证：复变函数 $f(z)=\cos\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ 的罗朗级数展开式 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n$ 的系数为

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

试卷 3

一、单项选择题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 用分离变量法求解偏微分方程,特征问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0,\ 0<x<l, \\ X(0)=X'(l)=0 \end{cases}$ 的解是(　　).

(A) $\lambda=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, $X=\cos\dfrac{n\pi}{l}x$;

(B) $\lambda=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, $X=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$;

(C) $\lambda=\left[\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2$, $X=\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x$;

(D) $\lambda=\left[\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2$, $X=\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x$.

2. 下列结论**不正确**的是(　　).

(A) ∞ 是函数 $\sin\dfrac{1}{z}$ 的可去奇点;　　(B) ∞ 是函数 $\sin z$ 的本性奇点;

(C) ∞ 是函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点;　　(D) ∞ 为函数 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$ 的孤立奇点.

3. 设函数 $f(z)=y^2-x^2+ax+by+\mathrm{i}(cxy+3x+2y)$ 在复平面上处处解析,则 $(a, b, c)=$(　　).

(A) $(2, 3, 2)$;　(B) $(2, -3, 2)$;　(C) $(2, 3, -2)$;　(D) $(2, -3, -2)$.

4. 已知像函数 $F(p)=\dfrac{1}{p+2}+\dfrac{1}{p-2}$,则其拉普拉斯逆变换 $L^{-1}[F(p)]=$(　　).

(A) $2\sinh 2t$;　(B) $2\cosh 2t$;　(C) $2\sin 2t$;　(D) $2\cos 2t$.

5. 设 $u(x)=\begin{cases}0,\ x\leqslant 0, \\ 1,\ x>0,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=u(x)\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的傅里叶变换为(　　).

(A) $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i}\omega)^2+1}$；　　(B) $\dfrac{1}{(1-\mathrm{i}\omega)^2+1}$；

(C) $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i}\omega)^2-1}$；　　(D) $\dfrac{1}{(1-\mathrm{i}\omega)^2-1}$.

二、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 复数$\sqrt[4]{-16}$的所有值分别为____________________.

2. 积分 $\oint\limits_{|z|=2}\sin\dfrac{1}{z-1}\mathrm{d}z=$__________.

3. $f(z)=\tan z+\dfrac{z}{1+z}$ 在 $z=2$ 处的泰勒级数的收敛半径为________.

4. 若 $z=z_0$ 分别为函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点，则 $z=z_0$ 是函数 $f_1(z)f_2(z)$ 的________________阶极点.

5. 函数 $f(t)=t(\sin 2t+3)$ 的拉普拉斯变换 $L[f(t)]=$__________.

三、计算题(本题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分)

1. 计算积分 $I=\oint_{|z|=C}\dfrac{\sin^2 z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z$，其中：

(1) C 为正向圆周 $|z|=\dfrac{1}{2}$；

(2) C 为正向圆周 $|z|=2$.

2. 已知函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$，按题意要求求解：

(1) 试计算函数 $f(z)$，$\dfrac{f(z)}{z}$，$\dfrac{f(z)}{z^2}$ 在 $z=0$ 处的留数；

(2) 设函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内罗朗级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n$，求 c_n，其中 $n=-\infty,\cdots,0,1$.

3. 利用留数计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{5+4\cos x}\mathrm{d}x$.

4. 利用拉普拉斯变换求常微分方程初始值问题 $\begin{cases}ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=2\sin t,\\ y(0)=-1,\ y'(0)=0\end{cases}$ 的解.

5. 用分离变量法解 $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0, & t > 0, \\ u(x,\ 0) = \sin\dfrac{\pi}{l}x + 3\sin\dfrac{2\pi}{l}x, & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$.

6. 求波动方程初始值问题 $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \mathrm{e}^x,\ t > 0, \\ u(x,\ 0) = 0,\ u_t(x,\ 0) = x \end{cases}$ 的解.

四、证明题(本题共 2 小题,每小题 5 分,共 10 分)

1. 设函数 $f(z) = u(x,\ y) + \mathrm{i}v(x,\ y)$ 在区域 D 内解析,且 $v = u^2$. 证明:$f(z)$ 在 D 内是常数.

2. 设函数 $f(z)$ 在区域 $|z - z_0| < R\ (R > r > 0)$ 内除二阶极点 z_0 外均解析,且 $f(z) \neq 0$. 证明:

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = -4\pi\mathrm{i}.$$

试　卷　4

一、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 解析函数 $f(z)$ 的实部为 $e^x\sin y$,则其虚部为(　　).

(A) $-e^x\cos y+C$;　　(B) $e^{-x}\sin y+C$;

(C) $e^{-x}\cos y+C$;　　(D) $e^x\cos y+C$.

2. 设 $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ 是方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的解,λ_1, λ_2 为任意常数,c_1, c_2 为 (x,t) 的任意两函数,则以下组合中一定也为方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 解的是(　　).

(A) $c_1u_1+c_2u_2$;　　(B) $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$;

(C) $c_1c_2u_1u_2$;　　(D) $\lambda_1\lambda_2u_1u_2$.

3. 设 C 为正向闭曲线,则以下曲线中,使积分 $\oint_C\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}dz=\pi i$ 的曲线 C 是(　　).

(A) C: $|z|=\dfrac{1}{2}$;　　(B) C: $|z-1|=1$;

(C) C: $|z-3|=1$;　　(D) C: $|z|=4$.

4. 设函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $L[f(t)]=F(p)$,则以下公式不正确的是(　　).

(A) $f'(t)=L^{-1}[pF(p)-f(0)]$;　　(B) $\int_0^t f(s)ds=L^{-1}\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]$;

(C) $f(t)e^{at}=L^{-1}[F(p+a)]$;　　(D) $f(t)=\dfrac{(-1)^n}{t^n}L^{-1}[F^{(n)}(p)]$.

5. 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析,给出如下的命题:

(1) 如果在区域 D 内,$f'(z)=0$,则 $f(z)$ 为常数;

(2) 如果 $u(x,y)$ 在区域 D 为常数,则 $f(z)$ 为常数;

(3) 如果在区域 D 内,$u(x,y)=v(x,y)$,则 $f(z)$ 为常数. 以上命题正确的共有(　　).

(A) 0 个;　　(B) 1 个;

(C) 2 个;　　(D) 3 个.

二、填空题(本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 已知 $|e^{i\theta}-1|=2$，则 $\theta=$ ____________.

2. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 在区域 D 内展开为形如 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$ 的级数，则区域 D 为__________________.

3. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)=x^2-y^2$，则 $f(z)$ 的导数在 $z=\mathrm{i}$ 处的值 $f'(\mathrm{i})=$ __________.

4. 对一维热传导方程混合初边值问题 $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\\ u_x(0, t)=A,\ u_x(l, t)=-A,\ t>0,\\ u(x, 0)=B,\ 0\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$ (其中：$A\neq 0$) 进行边界齐次化，可令 $u(x, t)=v(x, t)+w(x)$，使得 $v(x, t)$ 满足齐次边界条件，则 $w(x)=$ ________.

5. 函数 $f(t)=\delta(t-1)\ (t-2)^2\sin t$ 的傅里叶变换 $F[f(t)]=$ ________________________.

三、计算题(本题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分)

1. 将函数 $f(z)=\dfrac{4}{z^2-6z+5}$ 在以 $z=2$ 为心的邻域内展开成幂级数或罗朗级数.

2. 按题意要求求解：

(1) 求方程 $\cos 2z=0$ 的全部根；

(2) 计算积分 $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{z}{1-2\sin^2 z}\mathrm{d}z$.

3. 设 $f(x, t)=\dfrac{x\sin tx}{1+x^2}$，$t>0$，按题意要求求解：

(1) 求函数 $f(x, t)$ 关于变量 t 的拉普拉斯变换 $F(x, p)=L[f(x, t)]$；

(2) 计算积分 $\int_0^{+\infty}F(x, a)\mathrm{d}x$，其中 $a>0$，$a\neq 1$.

4. 利用拉普拉斯变换解下列常微分方程边值问题

$$\begin{cases}y''(t)+y(t)=10\sin 2t,\ 0<t<\dfrac{\pi}{2},\\ y(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.\end{cases}$$