21世纪统计学系列教材

Statistics

21世纪统计学系列教材

Applied Stochastic Processes

应用随机过程

（第三版）

张波 商豪 编著

中国人民大学出版社

21世纪统计学系列教材

Statistics 21世纪统计学系列教材

Applied Stochastic Processes

应用随机过程

（第三版）

张 波 商 豪 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

应用随机过程/张波，商豪编著. —3版. —北京：中国人民大学出版社，2013.12
21世纪统计学系列教材
ISBN 978-7-300-18569-9

Ⅰ.①应… Ⅱ.①张… ②商… Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第307596号

21世纪统计学系列教材
应用随机过程（第三版）
张 波 商 豪 编著
Yingyong Suiji Guocheng

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电 话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网 址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经 销	新华书店		
印 刷	北京七色印务有限公司	**版 次**	2001年5月第1版
规 格	185 mm×260 mm 16开本		2014年1月第3版
印 张	15.5 插页1	**印 次**	2014年1月第1次印刷
字 数	330 000	**定 价**	32.00元

总　序

改革开放以来，高等统计教育有了很大的发展。随着课程设置的不断调整，有不少教材出版，同时也翻译引进了一些国外优秀教材。作为培养我国统计专门人才的摇篮，中国人民大学统计学系自1952年创建以来，走过了风风雨雨，一直坚持着理论与应用相结合的办学方向，培养能够理论联系实际、解决实际问题的高层次人才。随着新知识经济和网络时代的到来，我们在教学科研的实践中，深切地感受到，无论是自然科学领域、社会科学领域的研究，还是国家宏观管理和企业生产经营管理，甚至人们的日常生活，信息需求量日益增多，信息处理技术更加复杂，作为信息技术支柱的统计方法，越来越广泛地应用于各个领域。

面对新的形势，我们一直在思索，课程设置、教材选择、教学方式等怎样才能使学生适应社会经济发展的客观需要。在反复酝酿、不断尝试的基础上，我们决定与统计学界的同仁，共同编写、出版一套面向21世纪的统计学系列教材。

这套系列教材聘请了中科院院士、中国科技大学陈希孺教授，上海财经大学数量经济研究院张尧庭教授，中国科学院数学与系统科学研究所冯士雍研究员等作为编委。他们长期任中国人民大学的兼职教授，一直关心、支持着统计学系的学科建设和应用统计的发展。中国人民大学应用统计科学研究中心2000年已成为国家级研究基地，这些专家是首批专职或兼职研究人员。这一开放性研究基地的运作，将有利于提升我国应用统计科学研究的水平，也必将进一步促进高等统计教育的发展。

这套教材是我们奉献给新世纪的，希望它能促进应用统计教育水平的提高。这套教材力求体现以下特点：

第一，在教材选择上，主要面向经济类统计学专业。选材既包括统计教材也包括风险管理与精算方面的教材。尽管名为统计学系列教材，但并不求大、求全，而是力求精选。对于目前已有的内容较为成熟、适合教学需要、公认的较好的教材，并未列入本次出版计划。

第二，每部教材的内容和写作，注意广泛吸收国内外优秀教材的成果。教材力求简明易懂、内容系统和实用，注重对统计方法思想的阐述，并结合大量实际数据和实例说明统计方法的特点及应用条件。

第三，强调与计算机的结合。为着力提高学生运用统计方法分析解决问题的能力，教材所涉及的统计计算，要求运用目前已有的统计软件。根据教材内容，选择使用 SAS、SPSS、TSP、STATISTICA、EViews、MINITAB、Excel 等。

感谢中国人民大学出版社的同志们，他们怀着发展我国应用统计科学的热情和提高统计教育水平的愿望，经过反复论证，使这套教材得以出版。感谢参与教材编写的同行专家、统计学系的教师。愿大家的辛勤劳动能够结出丰硕的果实。我们期待着与统计学界的同仁，共同创造应用统计辉煌的明天。

易丹辉

于中国人民大学

前　言

近几十年来，随机过程无论在理论上还是在应用上都有蓬勃的发展。它的基本知识和方法，不仅是数学、概率统计专业所必需的，也是通信、控制、生物、社会科学、工程技术及经济等领域的应用与研究所需要的。高等院校的学生、工程技术人员、金融工作者更迫切需要学习和掌握随机过程的有关知识。随机过程所包含的内容丰富而深远，针对不同的读者所选取的内容和难度都会有所不同。因为本书的初衷是面向更广泛的非数学专业学生，故本书着重于对随机过程的基本知识和基本方法的介绍，特别是注重实际应用，尽量回避测度论水平的严格证明。一般读者只要具有高等数学及概率论的基础知识便可阅读和理解本书的大部分内容。本书各章都配有一些与社会、经济、管理以及生物等专业相关的例子和习题，以帮助学生加深对基本理论的理解，提高应用随机过程解决实际问题的能力。为了便于有兴趣的读者进一步学习，书后列出了一些参考文献。

在前两版的基础上，第三版增加了两章的内容，分别为随机过程在金融中的应用与随机过程在保险精算中的应用，充分体现随机过程理论的重要性与实用性。在新增的第 9 章中，我们介绍了金融数学的一些基本术语与原则、经典的 Black-Scholes 模型，给出并证明了欧式看涨期权及欧式看跌期权的定价公式。在新增的第 10 章中，我们介绍了保险精算中的利率、贴现率、利息力等基本概念，并详细介绍了 Lundberg-Cramer 经典破产模型的确切描述和主要结论，即用复合 Poisson 来描述索赔总额过程时，对应得到的 Lundberg 不等式和 Cramer 近似破产概率表达式。同时针对前两版中出现的一些印刷错误进行改正，并且更新了一些符号。

全书可分为三个部分。第一部分（1，2，3，5 章）是预备知识和随机过程最基本的内容，一般教材都包含这部分内容；第二部分是更新过程，这一内容在许多教材中都没有单独讨论，考虑到它在应用中的重要性，特别是在人口和保险论中的应用，将它放在第 4 章讲授；第三部分（6，7，8，9，10 章），考虑到在经济和金融方面应

用的需要，分别介绍鞅、Brown 运动与随机积分，最后介绍随机过程在金融和保险精算中的应用。书末附上了全部习题的详细解答，供读者参考。

笔者得以完成本书，首先要感谢许多同仁的鼓励、支持和帮助。特别是易丹辉教授、顾岚教授、张景肖教授和肖宇谷副教授在百忙之中审阅了初稿并提出了许多宝贵意见，纠正了一些不妥之处。徐美萍副教授为本书倾注了大量的心血，挑选新例题，反复验算习题，字斟句酌，在此亦表示诚挚的谢意！

目　录

第 1 章

Chapter 1 **预备知识**

随机过程通常被视为概率论的动态部分。在概率论中研究的随机现象，都是一个或有限多个随机变量的规律性。在讨论中心极限定理时也不过是对随机变量序列的讨论。但在实际问题中，我们还需要研究一些随机现象的发展和变化过程，即随时间不断变化的随机变量，而且所涉及的随机变量通常是无限多个，这就是随机过程的研究对象。随机过程以概率论作为其主要的基础知识，为此，我们首先对本书中经常用到的概率论基本知识作简要的回顾。

1.1 概率空间

随机试验是概率论的基本概念，试验的结果事先不能准确地预言，但具有如下三个特征：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但预先知道试验的所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现。

随机试验的可能结果称为样本点或基本事件，记为 ω。样本点的全体称为样本空间，记为 Ω。样本空间 Ω 称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件。Ω 的子集 A 由基本事件组成，通常称为事件。但是在实际问题中，人们通常不是对样本空间的所有子集都感兴趣，而是关心某些事件及其发生的可能性大小。我们用下面的概念来刻画这种事件。

定义 1.1.1 设 Ω 是一个样本空间（或任意一个集合），$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族。如果满足

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$；

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ 代数，$(\Omega,\mathscr{F})$ 称为可测空间。

如果 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数，则

(1) $\varnothing \in \mathscr{F}$；

(2) 若 $A_n \in \mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

以 Ω 的某些子集为元素的集合称为（Ω 上的）集类。对于 Ω 上的任一非空集类 $\mathscr{C}$，存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 代数，即 $\{\bigcap \mathscr{H} \mid \mathscr{H}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数$\}$，称为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 代数，记为 $\sigma(\mathscr{C})$。

定义 1.1.2 设 $\Omega=\mathbb{R}$。由所有半无限区间 $(-\infty,x)$，$x\in\mathbb{R}$ 生成的 σ 代数称为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ 代数，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为 Borel 集合。类似地，可定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$。

定义 1.1.3 设 $\{A_n, n=1,2,\cdots\}$ 为一集合序列。令

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k；\quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

分别称其为 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限（上极限有时也记为 $\{A_n$，i. o.$\}$）。显然有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{w \mid \forall n\in\mathbb{N}, \exists k\geqslant n, 使\ w\in A_k\}=\{w \mid w\ 属于无穷多个\ A_n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\{w \mid \exists n\in\mathbb{N}, \forall k\geqslant n, 有\ w\in A_k\}=\{w \mid w\ 至多不属于有限多个\ A_n\}$$

从而恒有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

若

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

则称 $\{A_n\}$ 的极限存在，并用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示，即令

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

特别地，若对每个 n，有 $A_n \subset A_{n+1}$（相应地，$A_n \supset A_{n+1}$），则称 $\{A_n\}$ 为单调增（相应地，单调降）。对单调增或单调降序列 $\{A_n\}$，我们分别令 $A=\bigcup\limits_n A_n$ 或 $A=\bigcap\limits_n A_n$，称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限，通常记为 $A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A$。

下面我们来看一个例子。

例 1.1.1

设某人反复地投掷硬币，观察硬币朝上的面是正面还是反面。$\Omega=\{$所有由投掷结果“正面”和“反面”组成的序列$\}$，$\mathscr{F}=\{\Omega$ 的所有子集$\}$，记 A_n 为第 n 次投掷的结

果是“正面”的事件，则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\{\text{有无限多个投掷结果是“正面”}\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\{\text{除有限多个外,投掷结果都是“正面”}\}$$

定义 1.1.4 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在$\mathscr{F}$上的实值函数。如果

(1) $P(\Omega)=1$；

(2) $\forall A\in\mathscr{F}$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(3) 对两两互不相容事件 A_1，A_2，…（即当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$），有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为概率空间，$\mathscr{F}$中的元素称为事件，$P(A)$ 称为事件 A 的概率。

由定义易知事件的概率有如下性质：

(1) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，则 $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$。

(2) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$（可减性）。

(3) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，且 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$（单调性）。

(4) 若 $A_n\in\mathscr{F}$，$n\geqslant 1$，则 $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right)\leqslant \sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$（次 σ 可加性）。

(5) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ 且 $A_n\uparrow A$，则 $P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$（从下连续）。

(6) 若 $A_n\in\mathscr{F}$ 且 $A_n\downarrow A$，则 $P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$（从上连续）。

如果概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的 P 零测集（即零概率事件）的每个子集仍为事件，则称为完备的概率空间。为了避免 P 零测集的子集不是事件的情形出现，我们把概率测度完备化。令 $\mathscr{N}$表示 Ω 的所有 P 零测集的子集的全体，由 $\{\mathscr{F},\mathscr{N}\}$ 生成的 σ 代数（即包含 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{N}$的最小 σ 代数）称为 $\mathscr{F}$ 的完备化，记为$\overline{\mathscr{F}}$。$\overline{\mathscr{F}}$中的每个集合 B 都可以表示为 $B=A\cup N$，其中 $A\in\mathscr{F}$，$N\in\mathscr{N}$，且 $A\cap N=\varnothing$。定义

$$\overline{P}(B)=\overline{P}(A\cup N)=P(A)$$

则 P 就被扩张到 $\overline{\mathscr{F}}$ 上。

容易验证，$\overline{P}$ 是 $\overline{\mathscr{F}}$上的概率测度，集函数 $\overline{P}$ 称为 P 的完备化。本书假定 P 是完备的概率测度。

1.2 随机变量与分布函数

定义 1.2.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是（完备的）概率空间，X 是定义在 Ω 上取值于实数集$\mathbb{R}$的函数，如果 $\forall x\in\mathbb{R}$，$\{w: X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 X 是 $\mathscr{F}$上的随机变量，简称随机变量。函数

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty$$

称为随机变量 X 的分布函数。

注：在上面的定义中，如果 X 是广义实值函数，即 X 可以取∞，则需要加上条件：X 是几乎处处有限的，即 $P\{\omega:|X(\omega)|=\infty\}=0$ 。否则，会出现按上面定义的分布函数是假分布的情况。

定义 1.2.2 两个随机变量 X 与 Y，如果满足 $P\{\omega\in\Omega:X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$ ，则称它们是等价的。

两个等价的随机变量可视为同一个。

定理 1.2.1 下列命题等价：

(1) X 是随机变量；

(2) $\{\omega:X(\omega)\geqslant x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$；

(3) $\{\omega:X(\omega)>x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$；

(4) $\{\omega:X(\omega)<x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$。

为简单起见，习惯上将 $\{\omega:X(\omega)\geqslant x\}$ 记为$\{X\geqslant x\}$，其他记号类似。

定理 1.2.2 (1) 若 X，Y 是随机变量，则 $\{X<Y\}$，$\{X\leqslant Y\}$，$\{X=Y\}$ 及 $\{X\neq Y\}$ 都属于 $\mathscr{F}$；

(2) 若 X，Y 是随机变量，则 $X\pm Y$ 与 XY 亦然；

(3) 若 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，则 $\sup\limits_n X_n$，$\inf\limits_n X_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty} X_n$ 和$\liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ 都是随机变量。

映射 $\boldsymbol{X}$：$\Omega\to\mathbb{R}^d$，表示为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$，若对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant d)$，$X_k$ 都是随机变量，则称 $\boldsymbol{X}$ 为随机向量。

复值随机变量 Z 定义为两个实值随机变量 X 和 Y 的线性组合 $X+iY$。

给定随机变量 X，可以生成 Ω 上的 σ 代数，即包含所有形如 $\{X\leqslant x\}$，$x\in\mathbb{R}$ 的最小 σ 代数，记为 $\sigma(X)$。类似地，可定义由随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 生成的 σ 代数 $\sigma(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。

在实际中，常用的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续型随机变量。

离散型随机变量 X 的概率分布用如下分布列描述：

$$p_k=P\{X=x_k\},\quad k=1,2,\cdots$$

其分布函数为：

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述，其分布函数为：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

对于随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$，它的联合分布函数定义为：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_d\leqslant x_d\}$$

这里 $d\geqslant 1$，$x_k\in\mathbb{R}(k=1,2,\cdots,d)$。

定理 1.2.3 若 $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 是随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合分布函数，则

(1) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是单调不减的；

(2) $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 对每个变量都是右连续的；

(3) 对 $i=1,2,\cdots,d$，$\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_d)=0$，$\lim\limits_{x_1,x_2,\cdots,x_d\to+\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=1$。

如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\dfrac{\partial^d F}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_d}$ 对所有的 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ 存在，则称函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数，并且

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_d}f(t_1,t_2,\cdots,t_d)\mathrm{d}t_d\cdots\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1$$

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 为 X_1，X_2，…，X_d 的联合分布函数，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant d$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_d$ 的边际分布函数定义为：

$$\begin{aligned}&F_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(x_{k_1},x_{k_2},\cdots,x_{k_n})\\=&F(\infty,\cdots,\infty,x_{k_1},\infty,\cdots,\infty,x_{k_2},\infty,\cdots,\infty,x_{k_n},\infty,\cdots,\infty)\end{aligned}$$

下面是一些常见的分布。

1. **退化分布**：若随机变量 X 只取常数 c，即

$$P\{X=c\}=1$$

则 X 并不随机，但我们把它看作随机变量的退化情况更为方便，因此称之为退化分布，又称单点分布。

2. **Bernoulli 分布**：在一次试验中，设事件 A 出现的概率为 $p(0<p<1)$，不出现的概率为 $1-p$，若以 X 记事件 A 出现的次数，则 X 的可能取值仅为 0，1，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1$$

这个分布称为 Bernoulli 分布，又称两点分布。

3. **二项分布**：在 n 重 Bernoulli 试验中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p $(0<p<1)$，以 X 记在 n 次试验中事件 A 出现的次数，则 X 的可能取值为 0，1，…，n，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称为以 n 和 p 为参数的二项分布，简记为 $X\sim B(n,p)$。

Bernoulli 分布可以看作 $n=1$ 时的二项分布，这对应于一次独立试验的情形。

4. **Poisson 分布**：若随机变量 X 可取一切非负整数值，且

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,\cdots$$

式中，$\lambda>0$，称 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布，记为 $X\sim P(\lambda)$。

5. **几何分布**：在 Bernoulli 试验序列中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p（$0<p<1$），以 X 记事件 A 首次出现的试验次数，则 X 的可能取值为 1，2，…，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

称为几何分布。

几何分布是一种等待分布，具有无记忆性。在离散型分布中，只有几何分布具有这种特殊的性质。

6. **Pascal 分布**：在 Bernoulli 试验序列中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 p（$0<p<1$），以 X 记事件 A 第 r 次出现的试验次数，则 X 的可能取值为 r，$r+1$，…，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

称为 Pascal 分布。

对 Pascal 分布略加推广，即去掉 r 是正整数的限制，就得到负二项分布。

7. **负二项分布**：对于任意实数 $r>0$，称

$$P\{X=k\}=\binom{k+r-1}{k}p^r(1-p)^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

为负二项分布。

负二项分布通常用于替换 Poisson 分布。同 Poisson 分布一样，它也在非负整数上取值，但因为它包含两个参数，所以相比 Poisson 分布其变化更灵活。Poisson 分布的方差和均值相等，但负二项分布的方差大于均值，这说明当某类数据集观测到的方差大于均值时，负二项分布要比 Poisson 分布更合适。

8. **离散均匀分布**：如果分布列为：

$$p_k=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n$$

则称为离散均匀分布。

9. **连续均匀分布**（简称均匀分布）：如果密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}(b-a)^{-1}, & 若\ a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

式中，$a<b$，则称为区间 $[a,b]$ 上的均匀分布。

10. **正态分布**：如果密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\},\quad x\in\mathbb{R}$$

则称为参数为 μ 和 σ 的正态分布，也称为 Gauss 分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

11. **d 维正态分布**：设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_d)$，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_d)$，$\boldsymbol{\Sigma}$ 是 d 阶正定矩阵，并且其行列式为 $|\boldsymbol{\Sigma}|$。如果联合密度函数为：

$$f(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

则称为 d 维正态分布，记为 $\boldsymbol{X}\sim N_d(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$。

12. **Γ 分布**：如果密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^s}{\Gamma(s)}x^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则称为以 $s>0$，$\lambda>0$ 为参数的 Γ 分布，其中 Γ 函数定义为：

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x,\quad s>0$$

13. **指数分布**：如果在 Γ 分布中令 $s=1$，即密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则称为指数分布。

14. **χ^2 分布**：如果在 Γ 分布中取 $s=\dfrac{n}{2}$，n 是正整数，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，即

$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},\quad x>0$$

则称为自由度是 n 的 χ^2 分布。

1.3　数字特征、矩母函数与特征函数

随机变量完全由它的概率分布描述，而确定分布函数一般来说是相当麻烦的。在实际问题中，有时只需知道随机变量的某些数字特征就够了。本节我们首先引入 Riemann-Stieltjes 积分。

1.3.1　Riemann-Stieltjes 积分

设 $g(x)$，$F(x)$ 为有限区间 $(a,b]$ 上的实值函数，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 为