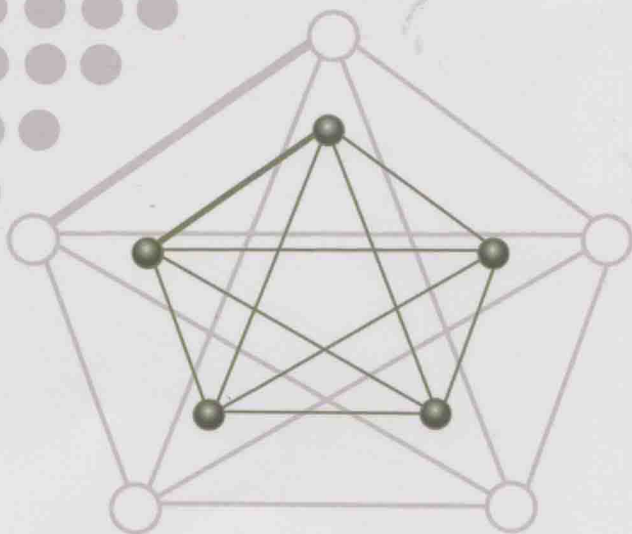


Introduction to Graph Theory

图论导引

郝荣霞 编著



北京交通大学出版社
<http://www.bjtu.com.cn>

图论导引

郝荣霞 编著

北京交通大学出版社

• 北京 •

内 容 简 介

本书系统讨论了图论的基本理论与方法,给出了一些基本算法及应用.书中除了包含树、欧拉图与哈密尔顿图、匹配、平面图、着色、Ramsey 数、有向图、网络流等内容外,为了读者更深层次地思考,还介绍了通常一般图论书不包括的双圈覆盖、整数流、随机图等内容.

本书的特点就是包括大量的实际例子.在大部分章节的开头都以实际应用为引例,引出本部分所讲内容,然后对所关联的知识点逐渐展开讨论,采用问题式教学的编写模式,目的是激发学生学习图论的积极性.

本书既可作为大学数学、信息与计算科学、计算机类等许多专业高年级本科生的图论教材,也可作为低年级研究生的图论教材或参考书.

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

图论导引/郝荣霞编著. —北京:北京交通大学出版社, 2013. 11
ISBN 978-7-5121-1715-0

I. ①图… II. ①郝… III. ①图论 IV. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 280100 号

责任编辑:王晓春

出版发行:北京交通大学出版社

电话:010-51686414

北京市海淀区高粱桥斜街 44 号

邮编:100044

印刷者:北京泽宇印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170×235 印张:11 字数:186 千字

版 次:2014 年 1 月第 1 版 2014 年 1 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5121-1715-0/O·127

印 数:1~1 000 册 定价:32.00 元

本书如有质量问题,请向北京交通大学出版社质监组反映。

投诉电话:010-51686043, 51686008; E-mail: press@bjtu.edu.cn。

前 言

经过 200 多年的发展，图论已经发展成为一个理论和应用兼容的新的研究领域。图论对学生数学思想的形成，对后继课程代数图论、拓扑图论、随机图论、化学图论等交叉学科的学习都有着重要的意义。图论具有深刻的应用背景。它在信息与计算科学、应用数学、计算机、交通运输、最优化等诸多方面都有很重要的应用。本教材把应用融入于图论理论中，具有内在的合理性及现实性。

本书是作者在给学生讲授多年的“图论及其应用”课程基础上，将授课体会和经验整理而成。本书的一大特点是包含了大量的实际例子。在每章甚至每节的开头都给出实际应用作为引例，引出本部分所讲内容，然后对所关联的知识点逐渐展开讨论，采用问题式教学的编写模式，激发学生学习本部分内容的积极性，克服了学生只知道理论不知道如何应用的弊端。有些实例是同学在日常工作学习中遇到的实际问题，把理论的教学与应用实践紧密结合起来，使得学生学有所用。

本书的另一个特点是在内容上尽量避免将图论只是作为一门知识，使人产生枯燥乏味的错觉。同时，根据图论本身的特点，不仅给出绝大多数定理的严密证明，而且在证明过程中，不拘泥于通常教科书所用的概念和结果，而是更强调方法论。某些定理不仅给出传统的证明方法，还增加了一些新的解释。书中除了重视图论的基本理论与技巧之外，还给出了一些算法及实际应用的例子。为了读者更深层次的思考，书中还介绍了通常一般图论书不包括的双圈覆盖、整数流、随机图等内容。

本书的编写过程中，得到了我的恩师刘彦佩教授的多次指点，在此深表感谢。

另外，本书的编写也得到数学系修乃华教授、常彦勋教授、冯衍全教授、于永光教授、王金亭教授、王周宏副教授、李岷珊副教授、何卫力副教授、余爱梅副教授、万良霞副教授、周进鑫副教授、李萍老师等许多同事的关心和帮助，得到了北京交通大学理学院和数学系领导的支持，特表

示感谢。在出版过程中，研究生刘建兵、张茹、尚怡洁、王培艳、才仁文毛、李甜甜、胡晓臣、谷梅梅和程冬琴等帮助进行了部分初稿的校对，在此一并致谢。感谢北京交大出版社对本书出版的支持。

本书可作为大学数学、信息与计算科学、计算机类高年级本科生的图论教材，也可作为低年级研究生的图论教材或参考书。虽然作者尽力完善本书，但限于水平和时间仓促，难免存在疏漏和错误，敬请读者批评指正。

编 者

2013 年 12 月

目 录

第 1 章 图的基本概念	1
1.1 图的发展简史	1
1.2 图的概念	2
1.3 顶点的度	6
1.4 连通性	9
1.5 图的矩阵表示	14
1.6 图的最短路问题	16
练习题	18
第 2 章 树	22
2.1 树和森林的概念	22
2.2 树的结构及 Cayley 公式	25
2.2.1 树的结构	25
2.2.2 Cayley 公式	27
2.3 图上的树	30
2.4 深探树和广探树	33
2.5 最优树	34
练习题	37
第 3 章 欧拉图和汉密尔顿图	40
3.1 欧拉图	40
3.2 汉密尔顿图	42
3.3 中国邮递员问题	46
3.4 货郎担问题	49
练习题	50

第 4 章 匹配与因子分解	54
4.1 二部图的匹配	54
4.2 因子分解	61
4.3 匈牙利算法	64
4.4 最优分派问题	67
练习题	71
第 5 章 平面图	75
5.1 欧拉公式	75
5.2 库拉托斯基定理、对偶图	80
5.3 平面性判别算法	82
5.4 图的曲面嵌入	86
5.4.1 唯一平面嵌入	86
5.4.2 曲面嵌入的基本概念和性质	87
练习题	91
第 6 章 着色	95
6.1 顶点着色	95
6.2 边着色	102
6.3 图的顺序着色算法	108
6.4 色多项式	109
6.5 图的双圈覆盖	111
6.5.1 偶子图的概念和性质	111
6.5.2 双圈覆盖	113
练习题	115
第 7 章 Ramsey 数	119
7.1 图的 Ramsey 数	119
7.2 Turán 定理	125
练习题	127

第 8 章 有向图	129
8.1 有向图的概念	129
8.2 有向图的矩阵	133
8.3 竞赛图	137
练习题	140
第 9 章 网络流	142
9.1 流的基本概念	142
9.2 最大流最小割定理	145
9.3 求最大流的标号法	147
9.4 整数流	150
练习题	153
第 10 章 随机图	156
10.1 随机图的概念	156
10.2 期望	157
10.3 方差	161
练习题	163
参考文献	165

第 1 章 图的基本概念

1.1 图的发展简史

图论是一门应用十分广泛的数学分支. 它的开拓者应归功于瑞士数学家欧拉 (Euler). 欧拉在 1736 年解决了格尼斯堡七桥问题, 发表了图论的第一篇文章. 而后他还研究了 Hamilton 问题、骑士旅行问题等. 基尔霍夫 (Kirchhoff) 在 1847 年引入了“支撑树”的概念, 解决了电网络中求解方程组的问题. 10 年后, 凯莱 (Cayley) 在研究碳水化合物时也独立地发现了树.

图论中还有一个著名的问题就是“四色问题”. 若一张地图按某种方式分成若干个区域, 则在保证相邻的区域染不同颜色的前提下, 最少需要多少种颜色? 四种颜色是否够用? 在 1852 年, Francis Guthrie, 一名刚从伦敦大学毕业的学生, 发现英国的郡可以用 4 种颜色染色, 但有些地图不能用 3 种颜色染色. 他尝试证明对所有的地图, 4 种颜色就够了. 他跟他的弟弟 Frederick 提到这个问题. 在 1852 年 10 月求教于他的导师 De Morgan, De Morgan 又转给了 Hamilton. 在 1878 年, Cayley 在伦敦数学会的一次会议上询问此问题是否解决. 次年 Kempe 宣布解决了此问题, 并将结果发表在美国数学杂志上. 后来 Tait 给出了他自己对四色问题的解决方法. 10 年后, Heawood 发现 Kempe 文章中的错误, 但可用 Kempe 文章的思路证明五色定理. 事实上, Tait 的解法也有些问题. 在 Heawood 的文章之后, 解决四色问题的进程似乎已经停滞了. 直到 1976 年, Appel 和 Haken 借助于计算机证明了四色猜想是正确的.

早期的图论和游戏有着密切的联系, 如 Hamilton 的周游世界问题、最短路问题. 但随着时代的发展, 图论渗透到许多其他学科领域, 如物理、

化学、分子生物、运筹学、计算机网络、程序设计、人工智能等. 图论作为组合数学的一个分支, 与群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析等数学分支也有密切的联系.

1.2 图的概念

现实中有许多具体问题都可转化为用点和边表示的图的问题.

【例 1.2.1】 如图 1.1 所示是 T 字形的交通车道. 当一辆车到达这个路口时, 它会在 6 条车道的一条上出现. 这 6 条车道分别记为 $L_1, L_2, \dots, L_6$. 在这个路口处有个交通灯, 它告诉不同车道上的司机何时可以通过这个路口. 为了保证某些处于不同车道上的车辆不会在同一时间进入路口 (如 L_1 和 L_5), 但 L_2 和 L_3 上的车辆同时进入是没有问题的, 如何用点和边来表示?

为了便于分析, 这种情形可用图 1.2 中的 G 表示, 即 $V(G) = \{L_1, L_2, \dots, L_6\}$. 当两条车道上的车辆不能同时进入路口时, 则这两个顶点之间连一条边.

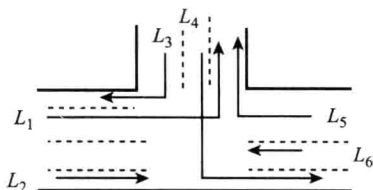


图 1.1

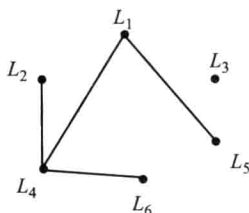


图 1.2

图是二元组 $G = (V, E)$, 其中 V 是顶点集, E 是边集. E 中的每一个元素可以对应 V 的一个二元无序元素对. 如果 $e \in E$, e 对应两个顶点 u 和 v , 则 e 常记作: uv 或 (u, v) (有的书上也记作 $\{u, v\}$), 同时称顶点 u 和 v 是相邻的, 也称 u (或 v) 与 e 是互相关联的. 与同一顶点关联的边称为是相邻的. 两个端点相同的边称为环. 关联于同一对顶点的两条及两条以上的边称为重边. 不含有重边和环的图称为简单图. $|V|$ 称为 G 的阶. 仅有一个顶点的图为平凡图.

【例 1.2.2】 在图 1.3 中, 顶点集 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 边集 $E = \{e_1,$

$e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. 图 1.3 中 $e_1 = v_1 v_2$, $e_2 = v_1 v_1$, $\dots$, $e_6 = v_4 v_1$. 故 E 也可写成 $E = \{v_1 v_2, v_1 v_1, v_2 v_3, v_3 v_4, v_3 v_4, v_4 v_1\}$. e_4, e_5 是重边, 边 e_2 是环.

图 1.3 仅仅是图 G 的一种画法, 它与顶点的位置、边的形状等无关. 所以, 图的画法有无穷多种. 不相邻的两个顶点 (或边) 称为**独立的**. 点 (或边) **独立集**是指这个集合中的任何两个点 (或边) 都是独立的. 点独立集常简称**独立集**. 如果图 G 的顶点集和边集都是有限集, 则称该图是**有限图**, 否则称为**无限图**. 本书仅讨论有限图. 如果图 G 是任何两个顶点都相邻的简单图, 则称 G 为**完全图**, n 个顶点的完全图记作 K_n . K_3 就是一个三角形.

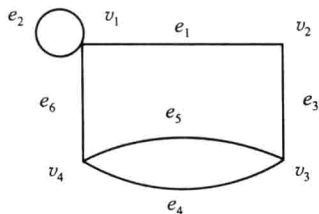


图 1.3

如果图 G 的顶点集 $V(G)$ 有一个 2-划分 (X, Y) (即 $X \cup Y = V$, 且 $X \cap Y = \emptyset$), 使 X 与 Y 都是独立集, 则称 G 是**二部图**, 也称**偶图**, 常记作: $G = (X, Y; E)$. 如果二部图 $G = (X, Y; E)$ 满足 X 和 Y 之间的每对顶点都相邻, 则称其为**完全二部图**. 如果 $|X| = m$, $|Y| = n$, 完全二部图可记为 $K_{m,n}$. 类似地可定义**完全 k 部图**. 如果 $V(G)$ 有一个 k -划分 $(V_1, V_2, \dots, V_k)$, 使得 uv 是 G 的边当且仅当 u 和 v 属于不同的划分块, 即 $V_1, V_2, \dots, V_k$ 都是独立集, 则称 G 是**完全 k 部图**. 设 $G = (V, E)$ 是简单图, G 的**补图**, 记作 $\bar{G}$, 是指和 G 有相同的顶点, 两个顶点在 $\bar{G}$ 中相邻当且仅当在 G 中不相邻.

设 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图, 如果存在从 V_1 到 V_2 的双射 $\theta: V_1 \rightarrow V_2$, 使得对任意 $x, y \in V_1$, $xy \in E_1$ 的充要条件是 $\theta(x)\theta(y) \in E_2$, 则称图 G_1 与 G_2 是**同构的**, 记为 $G_1 \cong G_2$. 其中 θ 称为**同构**.

【例 1.2.3】 在图 1.4 (1) 中, 图 G_1 和 G_2 是同构的, G_3 和 G_4 也是同构的.

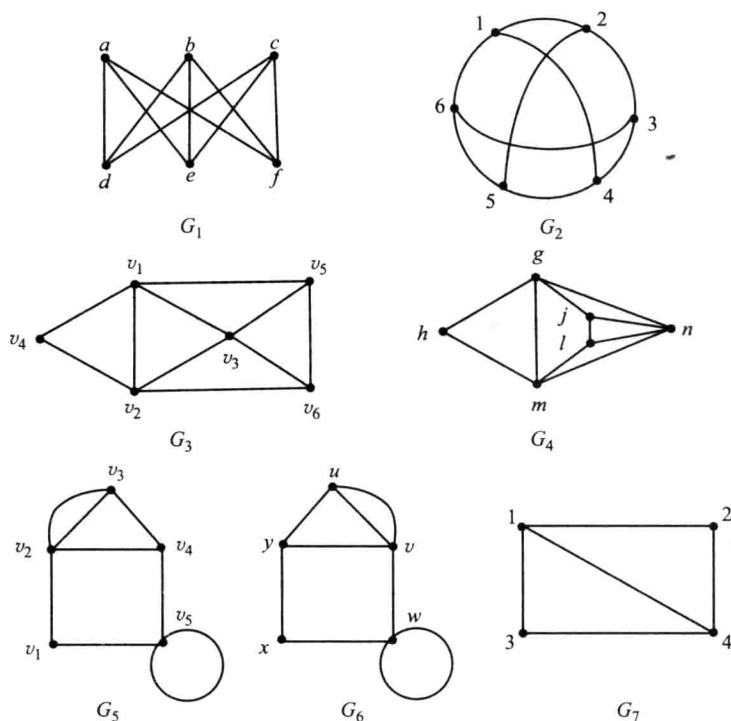


图 1.4 (1)

这是因为有 G_1 到 G_2 的同构映射 θ : $\theta(a)=1$, $\theta(b)=3$, $\theta(c)=5$, $\theta(d)=2$, $\theta(e)=4$, $\theta(f)=6$.

G_3 到 G_4 的同构映射 α 为: $\alpha(v_1)=g$, $\alpha(v_2)=m$, $\alpha(v_3)=n$, $\alpha(v_4)=h$, $\alpha(v_5)=j$, $\alpha(v_6)=l$.

一般地, 两个同构图是不加区别的. 通常要判断两个图是否同构是个很难的问题.

由图同构的定义可知, 如果两个图是同构的, 则这两个图的下列不变量均相同: 顶点个数、边数、度相同的顶点个数等. 但反过来不成立. 反例见图 1.4 (1) 的图 G_5 和 G_6 . G_5 和 G_6 是平面图 (平面图的定义见第 5 章), 它们的顶点个数、边数和面数均相同, 但容易验证这两个图不是同构的.

如果 $G = G_1 = G_2$, 则从图 G_1 到图 G_2 的同构 θ 称为 G 的自同构. 实际上, 图 G 的自同构 θ 是 $V(G)$ 的一个置换, 且满足对任意的 $u, v \in V(G)$, $uv \in G$ 当且仅当 $\theta(u)\theta(v) \in G$.

图 G 的所有自同构在复合运算下构成一个群, 该群称为 G 的自同构群, 记作 $\text{Aut}(G)$.

【例 1.2.4】 在图 1.4 (1) 中, G_7 的自同构群为 $\text{Aut}(G) = \{(1)(2)(3)(4), (14)(2)(3), (14)(23)\}$.

图的自同构群是衡量图的对称性的工具. 如果图 G 的自同构群 $\text{Aut}(G)$ 是单位元群, 即 $\text{Aut}(G)$ 中只含有一个元素单位元, 则图 G 称为非对称的. 与非对称图相反的另一个极端情况就是点传递图. 所谓点传递图, 是指对于图 G 的任何两个顶点 $u, v \in V(G)$, 都至少存在一个同构映射 $\theta \in \text{Aut}(G)$ 使得 $\theta(u) = v$. 图 G 的边传递图是指对于图 G 的任何两条边 $e_1, e_2 \in E(G)$, 都至少存在一个同构映射 $\theta \in \text{Aut}(G)$ 使得 $\theta(e_1) = e_2$. 如果图 G 既是点传递的又是边传递的, 则称 G 是一个对称图. 一个点传递图不一定是边传递的, 反过来, 边传递图也不一定是点传递图. 图 1.4 (2) (a) 是点传递的, 但不是边传递的; 而图 1.4 (2) (b) 是边传递的, 但不是点传递的.

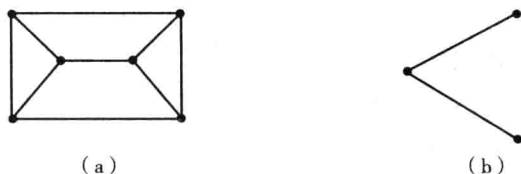


图 1.4 (2)

设 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图, 令 $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ 且 $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. 如果 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, 则称 G_1 和 G_2 是不相交的. 如果 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 则称 G_1 和 G_2 是边不相交的. 如果 $V_2 \subseteq V_1$ 和 $E_2 \subseteq E_1$, 则称 G_2 是 G_1 的子图, 记作 $G_2 \subseteq G_1$. 如果 $G_2 \subseteq G_1$ 且 $V_2 = V_1$, 则称 G_2 是 G_1 的生成子图.

设 $G = (V, E), U \subseteq V$, 则顶点为 U , 边恰包含了 G 的所有两个端点均在 U 中的边的图称为 G 的由 U 导出的导出子图, 记作 $G[U]$. 实际上 $G[U]$ 的边满足: 对任意 $x, y \in U$ 且 $xy \in E$ 都有 $xy \in G[U]$. 设 $E' \subseteq E$, 以 E' 为边集, 以 E' 中所有边的端点为顶点集的子图称为由边集 E' 导出的导出子图, 记作 $G[E']$.

除了上面定义的图的运算, 下面给出子图的两种常用基本运算.

设 $G = (V, E)$, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 用 $G - V'$ 表示 $G[V - V']$. 用 $G - E'$ 表示从 G 中去掉 E' 后所得的生成子图. 为简单计, 今后将 $G - \{e\}$ 简记为 $G - e$; $G - \{v\}$ 简记为 $G - v$.

注意 $G[E - E']$ 与 $G - E'$ 的区别: G 的这两个子图有相同的边集, 但两者不一定相等, 后者一定是生成子图, 而前者则不然.

1.3 顶点的度

【例 1.3.1】 证明: 在任意一群人中, 认识这群人中奇数个人的人数是偶数个.

分析: 用顶点表示这群人中的人, 两个人互相认识当且仅当它们所代表的点是相邻的, 这样得到的图记作 G . 这样此问题就转化为: 图 G 中关联奇数条边的顶点个数是偶数个. 要解决此问题, 就是下面要讲的定理 1.3.1.

设 $G = (V, E)$ 为非空图, $v \in V$, 与 v 相邻的顶点的集合称作 v 的邻集, 记作 $N_G(v)$ (或简记为 $N(v)$). 与顶点 v 相关联的边数 (每一环记为 2) 称为 v 的度, 记作 $d_G(v)$ 或 $d(v)$. 度数为 0 的点是孤立点. 数 $\delta(G) = \min\{d(v), v \in V\}$ 称为图 G 的最小度, 而数 $\Delta(G) = \max\{d(v), v \in V\}$ 称为图 G 的最大度. 如果图 G 的所有顶点都有相同的度 k , 则称 G 是 k -正则的. 数 $d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$ 称为图 G 的平均度. 显然, $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$. 度数为奇数的顶点称为奇点, 而度数为偶数的顶点称为偶点.

由于图中的任何一边在计算各顶点度数之和时均贡献了 2, 所以有下列定理.

定理 1.3.1 (握手定理) 设 $G = (V, E)$ 是一个图, 则 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, 即 $d(G)|V| = 2|E|$, 其中 $d(G)$ 是 G 的平均度, $|E|$ 和 $|V|$ 分别表示 G 边数和顶点的个数.

定理 1.3.2 任何图中, 度数为奇数的顶点的个数是偶数.

证明 由定理 1.3.1, $\sum_{v \in V} d(v)$ 是偶数, $\sum_{v \in V} d(v)$ 等于奇点度数之和与偶点度数之和这两部分的和, 显然偶点度数之和是偶数, 故奇点度数之和

是偶数, 这样推出度数为奇数的顶点的个数是偶数. $\square$

设 $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则称 $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ 为 G 的度序列.

推论 1.3.3 非负整数序列 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为某个图的度序列的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶数.

证明 由定理 1.3.1 知必要性成立.

下面证明充分性. 取 n 个相异顶点 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 如果 d_i 是偶数, 就在 v_i 处作 $\frac{d_i}{2}$ 个环, 如果 d_i 是奇数, 就在 v_i 处作 $\frac{d_i-1}{2}$ 个环. 由于 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶数, 故 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 中奇数项的个数是偶数, 将所有与奇数 d_i 相对应点 v_i 两两配对并连上一条边, 这样所得到的度序列是 $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. $\square$

【例 1.3.2】 有一个团体有 1 982 个人组成, 其中任意 4 个人都至少有 1 个人认识其他 3 个人. 问该团体中认识其他所有人的成员最少有多少?

解 先把问题翻译成图论语言. 把团体中的每个人当成一个顶点, 顶点集为 V . 对 $u, v \in V$, u 和 v 相邻当且仅当 u 和 v 代表的成员互相认识. 得到顶点个数 (阶) 为 1 982 的简单图. 问题转化为: 求 G 中度为 1 981 的顶点个数的最小值, 设其为 m .

由于求最小值, 所以设 G 不是完全图. (如果是完全图, 1 982 个顶点的度都是 1 981). 故 G 中至少有两个顶点 u 和 v 不相邻, $d(u) \leq 1\,980, d(v) \leq 1\,980$. 如果除 u 和 v 外, 另有两点 x 和 y 不相邻, 则 u, v, x, y 这 4 点中不存在和其他 3 点都相邻的顶点, 矛盾. 所以除 u 和 v 外, 任意其他两点都相邻, 即对任意其他点 x 的度都有 $d(x) \geq 1\,979$. 如果除 u, v 外任一 x 都和 u, v 相邻, 此时度为 1 981 的顶点个数为 1 980 个. 如果除 u, v 外存在一 x 和 u, v 都不相邻, 则对任意 $y \in V - \{x, u, v\}$, y 和 x 与 u, v 都相邻, 故 $d(y) = 1\,981$, 这时度为 1 981 的顶点个数为 1 979 个. 综上所述, $m = 1\,979$.

小结: 此题推广到人员个数是 n 的情况, 结果至少有 $n-3$ 个人认识其他所有的人.

注意 如果仅考虑简单图, 推论 1.3.3 就不成立了.

例如: 度序列为 3, 3, 3, 1 的简单图是不存在的, 尽管这 4 个数的和是 10. 这是因为: 假设以 3, 3, 3, 1 为度序列的简单图 G 是存在的, 不妨设其顶点集为 $\{u, v, w, x\}$ 且满足 $d(u) = d(v) = d(w) = 3, d(x) = 1$. 这

表示 u, v, w 和图 G 中任意其他顶点都相邻, 所以 x 的度应该是 3, 矛盾.

问题是: 如何判断一个非负序列是否是简单图的度序列? 下面给出递推的方法判别.

设 s 是给定的非负整数组成的序列, 如果它是某个简单图的度序列, 则称 s 是可图的.

定理 1.3.4 设序列 $s: d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$ 是非负整数非增序列, 则 s 是可图的充分必要条件是序列 $s_1: d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_p$ 是可图的.

证明 “充分性” 假设 s_1 是可图的, 则存在简单图 G_1 使得 G_1 的顶点集 $V(G_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_p\}$ 满足

$$d_{G_1}(v_i) = \begin{cases} d_i - 1, & \text{若 } 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i, & \text{若 } d_1 + 2 \leq i \leq p \end{cases}$$

我们在 G_1 中增加一个新的顶点 v_1 和 d_1 条边 $v_1 v_j (j = 2, 3, \dots, d_1 + 1)$, 得到的新图仍为简单图, 设为 G , 则 s 为 G 的度序列, s 是可图的.

“必要性” 设 s 是某个阶为 p 的简单图的度序列, 令 G 是以 s 为度序列的简单图, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ 和 $d(v_i) = d_i, 1 \leq i \leq p$, 且设 G 是满足在所有以 s 为度序列的简单图中与 v_1 邻接的顶点的度和为最大的图. 下面证明:

(*) v_1 的邻点集为 $\{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$.

如果证明了此结论成立, 则 $G - v_1$ 就是以 s_1 为度序列的简单图, 必要性成立.

用反证法证明 (*): 假设 $\{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\}$ 中至少有一个顶点不是 v_1 的邻点, 则必存在与 v_1 相邻的顶点 v_s , 使得 d_s 小于某个与 v_1 不相邻的顶点的度 d_r , 即 $d_s < d_r$. 由于 $d_s < d_r$, 故存在顶点 v_t 使得 v_t 与 v_r 相邻, 而与 v_s 不相邻. 把 G 中边 $v_1 v_s, v_r v_t$ 分别替换成 $v_1 v_r, v_s v_t$, 其他边不动, 所得到的图为 G' , 可以发现 G 和 G' 有相同的度序列, s 也是 G' 的度序列, 且 G' 中与 v_1 邻接顶点的度和大于 G 中与 v_1 邻接顶点的度和, 矛盾. $\square$

由定理 1.3.4, 我们给出下面的算法.

判断序列可图性的算法

给定含 $p (\geq 1)$ 个元素的非负整数序列

(1) 如果在此序列中的某个整数超过 $p-1$, 则此序列不是可图的; 否

则执行第(2)步.

(2) 如果序列中的所有整数都是0, 则此序列是可图的. 如果此序列中包含一个负数, 则此序列不是可图的; 否则执行第(3)步.

(3) 如果有必要的话, 对新的序列进行重新排列, 得到不增的序列.

(4) 删除序列中第一个数, 设为 n , 然后在得到的序列中的前 n 个数中分别减去1, 执行第(2)步.

下面用例子说明此算法的过程.

利用判断序列可图性的算法判别序列 $s: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ 是否为可图的.

删去首项5, 对其后的5项分别减1, 得到 $s'_1: 3, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1$;

重新排序得到 $s_1: 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$;

删去 s_1 的首项3, 对其后的3项分别减1, 得到 $s'_2: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$,
 $s_2 = s'_2$;

删去 s_2 的首项1, 对其后的1项减1, 得到 $s'_3: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1$;

重新排序得到 $s_3: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0$;

删去 s_3 的首项1, 对其后的1项减1, 得到 $s'_4: 0, 1, 1, 1, 1, 0$;

重新排序得到 $s_4: 1, 1, 1, 1, 0, 0$;

删去 s_4 的首项1, 对其后的1项减1, 得到 $s'_5: 0, 1, 1, 0, 0$;

重新排序得到 $s_5: 1, 1, 0, 0, 0$;

删去 s_5 的首项1, 对其后的1项减1, 得到 $s'_6: 0, 0, 0, 0$;

由第(2)步此序列是可图的.

1.4 连通性

前两节给出了图的基本概念, 在此基础上本节讨论图论中又一个重要的概念——连通性. 它是图论中许多概念和事实的基础, 它在计算机网、通信网和电力网等方面有着重要的应用. 在通信网络中, 通信站是顶点, 通信线路是边. 它们的失灵势必影响系统的通信. 所以, 网络图的“连通程度”越高, 通信网络越可靠. 下面要讲的连通度就是欲切断网络所需破坏的最少的通信站的数目; 边连通度就是欲切断网络所需破坏的最少的通信线数.

设 $G = (V, E)$ 是图, G 中从顶点 v_0 到 v_i 的途径或简称 v_0-v_i 途径