线性代数教学札记

刘景麟　邹清莲

内蒙古大学出版社
INNER MONGOLIA UNIVERSITY PRESS

线性代数教学札记

刘景麟　邹清莲

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教学札记 / 刘景麟，邹清莲著. —呼和浩特：内蒙古大学出版社，2013.5

ISBN 978-7-5665-0390-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… ②邹… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 107638 号

书　　名	线性代数教学札记
编　　者	刘景麟　邹清莲
责任编辑	杨雪梅
封面设计	张燕红
出　　版	内蒙古大学出版社 呼和浩特市大学西路 235 号(010021)
发　　行	内蒙古新华书店
印　　刷	内蒙古爱信达教育印务有限责任公司
开　　本	787×960 1/16
印　　张	14
字　　数	251 千字
版　　期	2013 年 6 月第 1 版　2013 年 6 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5665-0390-9
定　　价	30.00 元

如有印装质量问题，请与出版社联系

前　　言

线性化是处理非线性问题的一个重要方法,所以研究线性关系的线性代数便显得很重要。作为代数的一个独立分支,线性代数直到20世纪初才形成。

求解多项式方程作为代数的基本问题,一直到19世纪前期都还占据着代数的中心地位,是Abel、Galois的代数方程根式解可解性理论,Hamilton创立四元数理论,Maxwell、Gibbs、Heaviside提出向量概念,建立向量代数、向量分析,Sylvester、Cayley引进行列式、矩阵语言,这些新观念彻底改变了古老代数的面貌,从此,对遵从某些运算规律的抽象元素组成的集合的研究,取代了方程式论,变成了代数领域的主旋律。

上世纪五十年代,线性代数就进入数学、物理等理科专业的教学计划。由于计算机的广泛使用,线性代数更进入了工科大多数专业的教学计划。近三十多年以来,课程建设取得了长足的进步。线性代数的主题是有限维线性空间及其上的线性算子,在通过基引进坐标系以后,元素的向量表示和线性算子的矩阵表示便成为我们研究问题、进行具体计算的工具。时下仍有一些线性代数课程、教材未能走出解方程的阴影,把内容侧重在行列式和解线性方程组,避开了矩阵语言,特别是初等变换方法,避开讨论抽象的线性空间与线性变换,使得学生学了课程以后,领略不到近代代数观念更新后与初等代数截然不同的清新气息,也不能掌握有限维线性空间的线性技术。看来,怎样去看这门课程,如何建设它,还有待进一步的探讨。俄罗斯几何大家Postnikov院士在谈到前苏联的几何、代数教学时曾提到,只是到了20世纪50年代后期,当最后一位反对向量的权威逝世以后,向量才在几何和代数里有了应有的位置。对这段历史,他很恰当地引了Planck的一段话,“新思想只有在它们的反对者由于自然的更新换代而退下来时才能胜利。”现在已经到了21世纪,希望线性代数的主题能很快在我们的课程中得到确立。

教育的进步、教学改革的成功关键在教师,只有教师们不断地更新观念,提高业务水平,才能持续提高教学质量。

本书是对讲授线性代数若干年积累的教学资料的整理,包括两个部分。第一部分是六篇读书笔记,内容涉及线性变换的结构,广义特征向量与Jordan标准形计算,重线性代数,辛线性空间,有限维空间线性算子谱理论。第二部分收集了100多道有一定难度习题的详解。

刘景麟　　邹清莲

2012年12月

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分　读书笔记

一、复数域上非平凡有穷维线性空间线性算子的结构

§1　已知事实

1. 有穷维线性空间存在基且任何两个基有相同数目的基向量,基向量的个数就称为有穷维线性空间的维数.

2. 有穷维线性空间中任一组线性无关的向量都可以扩充成一个基.

3. 设 U_1、U_2 是有穷维线性空间 V 的两个子空间,则 $\dim(U_1+U_2)=\dim U_1+\dim U_2-\dim U_1\cap U_2$.

4. 设 U、V 是线性空间,其中 U 为有穷维,$T\in L(U,V)$ 是 $U\to V$ 的线性映射,则 $\dim U=\dim\ker T+\dim\operatorname{ran}T$.

5. 设 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 和 $\{v_1,\cdots,v_m\}$ 分别是有穷维线性空间 U 和 V 的基,$T\in L(U,V)$,若

$$Tu_j=a_{1j}v_1+\cdots+a_{mj}v_m,j=1,\cdots,n$$

称

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 T 在这两个基下的矩阵表示,记为 $M(T,\{u_1,\cdots,u_n\},\{v_1,\cdots,v_m\})$ 或 $M(T)$.

(1)$M(\lambda T)=\lambda M(T),\lambda\in\mathbf{C}$,

(2)$M(ST)=M(S)M(T)$,

(3) $\forall u\in U,u=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j u_j,Tu=\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k v_k$,

记 $M(u)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},M(Tu)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$,则 $M(Tu)=M(T)M(u)$.

6. 设 $T \in L(U)$ 是 $U \to U$ 的线性算子,则 T 可逆、T 一对一、T 映上三者等价.

§2　不变子空间、本征值、本征子空间

设 $T \in L(U)$,如果 $U = \sum_{j=1}^{\tau} \oplus U_j$,则由于 $\dim U_j < \dim U$,研究 T 在子空间 U_j 上的限制 $T|_{U_j}$,当然会比研究 T 要来得容易些,但是对 $u \in U_j$,Tu 不一定还在 U_j 里,为了便利地研究 $T|_{U_j}$,也许我们有时要考虑$(T|_{U_j})^2$,这就要求 $T|_{U_j}u \in U_j$, $\forall u \in U_j$,具有这种性质的子空间 U_j 称之为 T 的不变子空间,所以为了在低维的子空间上去研究 T,我们实际上是需要将 U 分解成 T 的一些不变子空间的直和.

定义 1　U 的子空间 W 称为是线性算子 $T \in L(U)$ 的不变子空间,如果 $\forall w \in W$ 都有 $Tw \in W$.

因为$\{0\}$ 和 U 都是 T 的平凡的不变子空间,所以,最简单的不变子空间应是一维的不变子空间.

定义 2　数 λ 称为是线性算子 $T \in L(U)$ 的本征值,如果存在 $u \neq 0$ 使得 $Tu = \lambda u$. 显然有

引理　λ 是 $T \in L(U)$ 的本征值的充分必要条件是 $T - \lambda I$ 不可逆或 $T - \lambda I$ 不是一对一的或 $T - \lambda I$ 不是映上的.

定义 3　若 λ 是 T 的本征值,称 $\ker(T - \lambda I)$ 为 T 的本征子空间,$\ker(T - \lambda I)$ 中的向量都称为 T 的对应于本征值 λ 的本征向量.

定理　设 $T \in L(U)$,$\lambda_j, j = 1,\cdots,r$ 是 T 的不同的本征值,对应的非零本征向量分别是 $u_j, j = 1,\cdots,r$,则$\{u_1,\cdots,u_r\}$ 线性无关.

证明: 若$\{u_1,\cdots,u_r\}$ 线性相关,则存在 k 使得 k 是最小的正整数且 $u_k \in \operatorname{span}\{u_1,\cdots,u_{k-1}\}$,于是有

$$u_k = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{k-1} u_{k-1},$$

两边作用算子 T 得

$$\lambda_k u_k = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} u_{k-1},$$

那么

$$0 = \alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) u_1 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) u_{k-1}.$$

可是根据 k 的选取,$\{u_1,\cdots,u_{k-1}\}$ 是线性无关的,故 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$,从而 $u_k = 0$,矛盾!故$\{u_1,\cdots,u_r\}$ 线性无关.

推论　线性算子 $T \in L(U)$ 至多有 $\dim U$ 个不同的本征值.

§3　线性算子多项式、本征值存在定理

例　设 $\dim U = 2, T \in L(U)$ 定义如下：当 U 的基为标准基 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}、\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$时，$\forall \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} \in U, T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_2\\u_1\end{pmatrix}$，这时

$$M(T) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

当 U 是实线性空间 $\mathbf{R}^2$ 时，T 是一个绕原点逆时针方向$\frac{\pi}{2}$ 角度的旋转.

$$T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},$$

$$-u_2 = \lambda u_1, u_1 = \lambda u_2.$$

故

$$-u_2 = \lambda^2 u_2,$$

$$\lambda \text{ 是本征值} \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

所以当 U 是实线性空间 $\mathbf{R}^2$ 时，T 无本征值. 当 U 是复线性空间 $\mathbf{C}^2$ 时，T 有本征值 $\pm i$，对应的本征子空间是 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}\right\}$和 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$.

定义　设 $T \in L(U)$ 记 $T^0 = I, T^j = \underbrace{TT\cdots T}_{j个}, j \geqslant 1$，则对任何多项式 $p(x) = \sum_{j=0}^{\tau} a_j x^j$，称

$$p(T) = \sum_{j=0}^{\tau} a_j T^j$$

为算子多项式.

当然 $p(T) \in L(U)$. 不难验证，对任何两个多项式 p 和 q，有

$$(pq)(T) = p(T)q(T).$$

定理　设 U 是非平凡的复有穷维线性空间，$T \in L(U)$，则 T 有一个本征值.

证明：设 $\dim U = n$，取 $u \in U$ 使 $u \neq 0$，则 $\{u, Tu, \cdots, T^n u\}$ 线性相关，存在不全为零的 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 使得

$$\alpha_0 u + \alpha_1 Tu + \cdots + \alpha_n T^n u = 0.$$

设 $k = \max\{j \mid \alpha_j \neq 0\}$,因为 $u \neq 0$,所以 $n \geqslant k > 0$. 那么

$$\alpha_0 u + \alpha_1 Tu + \cdots + \alpha_k T^k u = 0$$

$\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_k z^k$ 是一个 k 阶多项式,由代数基本定理

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_k z^k = \alpha_k \prod_{j=1}^{k} (z - \lambda_j).$$

于是

$$\alpha_k (T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_k I) u = 0,$$
$$(T - \lambda_I) \cdots\cdots (T - \lambda_k I) u = 0,$$

所以必存在某个 $j, 1 \leqslant j \leqslant k$,使得 $T - \lambda_j I$ 是不可逆的,因而 λ_j 是 T 的本征值.

§4　上三角形矩阵标准形

线性代数的一个中心目的就是对任何 $T \in L(U)$,去寻找 U 的一个基,使得该基下 T 的矩阵表示最简单. 所谓简单即矩阵里含有更多的零!

定理 1　设 $T \in L(U)$, $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 是 U 的基,则以下三条等价:

(ⅰ) T 关于 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 的矩阵是上三角形矩阵;

(ⅱ) $Tu_j \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}, j = 1, \cdots, n$;

(ⅲ) $\operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}, j = 1, \cdots, n$ 都是 T 的不变子空间.

证明:

ⅰ ⇒ ⅱ

因为 T 在 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 下的矩阵是上三角形矩阵,所以

$$Tu_j = \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}, j = 1, \cdots, n$$

ⅱ ⇒ ⅲ　$\forall u \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}, u = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k u_k$,于是

$$Tu = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k Tu_k,$$

可是当 $1 \leqslant k \leqslant j$ 时

$$Tu_k \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_k\} \subset \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\},$$

故

$$Tu \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}$$

$\operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}$ 是 T 的不变子空间.

ⅲ ⇒ ⅰ

由 $Tu_j \in \operatorname{span}\{u_1, \cdots, u_j\}$ 知

$$Tu_j = a_{1j}u_1 + \cdots + a_{jj}u_j, j = 1, \cdots, n.$$

所以 T 在 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 下的矩阵是上三角形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定理 2　$\forall T \in L(U)$ 都存在 U 的基使 T 在该基下的矩阵是上三角形矩阵.

证明:我们对 U 的维数作归纳法.

(1) $\dim U = 1$ 时显然成立.

(2) 假设定理对 $\dim U < k$ 均成立,则定理对 $\dim U = k$ 也成立.

T 有一个本征值 λ,因而 $T - \lambda I$ 不是映上的,记 $\mathrm{ran}(T - \lambda I) = V$,则 $m = \dim V < k$.

由于 $\forall u \in V$ 有

$$Tu = (T - \lambda I)u + \lambda u \in V,$$

所以 V 是 T 的不变子空间. 由归纳法假定,存在 V 的一个基 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 使得 $T|_V$ 在这个基下的矩阵是上三角形矩阵,即

$$Tv_j = (T|_V)v_j \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots v_j\}, j = 1, \cdots, m$$

扩充 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 而得 U 的基 $\{v_1, \cdots, v_m, u_{m+1}, \cdots, u_k\}$, $\forall j = m + 1, \cdots, k$,因为

$$Tu_j = (T - \lambda I)u_j + \lambda u_j,$$

而

$$(T - \lambda I)u_j \in V = \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_m\},$$

故

$$Tu_j \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_m, u_j\} \subset \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_m, u_{m+1}, \cdots, u_j\},$$

于是由定理 1 知 T 在基 $\{v_1, \cdots, v_m, u_{m+1}, \cdots, u_k\}$ 下的矩阵是上三角形矩阵.

归纳法步骤完成.

定理 3　设线性算子 $T \in L(U)$ 在 U 的某个基下的矩阵表示是上三角形矩阵,则 T 可逆的充分必要条件是该矩阵对角线上的元素均不为零.

证明:设 $T \in L(U)$ 在基 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(1) 条件的必要性　用反证法. 设 $\lambda_k = 0$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

①$k=1$,即 $Tu_1=0$,所以 T 不可逆.

②$k>1$,则

$$Tu_1,\cdots,Tu_k\in \mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{k-1}\}.$$

令 $S=T|_{\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_k\}}$,由于

$$\mathrm{ran}S\subset \mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{k-1}\},$$

$\mathrm{dimran}S<k$,所以 S 不是映上的,因而存在 $u\in \mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{k-1}\}$,$u\neq 0$,使 $Su=0$,即 $Tu=0$,所以 T 不可逆.

(2) 条件的充分性　也用反证法. 设 T 不可逆,则 T 不是一对一的,存在 $u\neq 0$ 使 $Tu=0$,假定 u 有线性表示

$$u=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j.$$

设

$$k=\max\{j\mid \alpha_j\neq 0\},$$

则

$$0=Tu=T\Big(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j u_j\Big)=(\alpha_1 Tu_1+\cdots+\alpha_{k-1}Tu_{k-1})+\alpha_k Tu_k.$$

因为 T 在 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 下的矩阵是上三角形矩阵,故

$$\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j Tu_j\in \mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{k-1}\},$$

于是

$$Tu_k\in \mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{k-1}\},$$

故 $\lambda_k=0$,矛盾!

定理 4　设线性算子 $T\in L(U)$ 在 U 的某个基下的矩阵是上三角形矩阵,则 T 的本征值就是该矩阵对角线上的那些元素.

证明:

$$M(T,\{u_1,\cdots,u_n\})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则

$$M(T-\lambda I,\{u_1,\cdots,u_n\})=\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n-\lambda\end{pmatrix}.$$

于是由定理 3

$$T-\lambda I \text{ 不可逆} \Leftrightarrow \text{某个 } \lambda_j-\lambda=0,$$

所以,

$$\lambda \text{ 是 } T \text{ 的本征值} \Leftrightarrow \lambda \text{ 是某个 } \lambda_j.$$

§5 对角形矩阵标准形

显然,由线性算子的矩阵表示定义可知,线性算子 $T\in L(U)$ 在 U 的基 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 下的矩阵表示为对角形矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 的充分必要条件是

$$Tu_j=\lambda_j u_j,\ j=1,\cdots,n$$

即 U 有一个由 T 的本征向量组成的基.

并不是每个线性算子都能有对角形矩阵表示的.

例 设 $T\in L(\mathbf{C}^2)$,当 $\mathbf{C}^2$ 以 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}、\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ 为基时,$\forall\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^2$,$T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2\\0\end{pmatrix}$.

由 $T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ 有 $\begin{pmatrix}u_2\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$,所以 $u_2=0$. 若 λ 为本征值,对应的非零本征向量 $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ 必然 $u_1\neq 0$,于是由 $u_2=\lambda u_1, u_2=0$ 知 $\lambda=0$,对应于本征值 0 的非零本征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,所以 T 只有一个线性无关的本征向量,因此 T 在 $\mathbf{C}^2$ 的任何基下的矩阵都不是对角形矩阵.

哪些线性算子能有对角形矩阵表示呢?

定理 设 $T\in L(U)$,$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是 T 的不同的本征值. 以下五条等价:

(ⅰ) T 在 U 的某个基下的矩阵表示为对角形矩阵;

(ⅱ) U 有一个由 T 的本征向量组成的基;

(ⅲ) 存在 T 的一维不变式空间 $U_1,\cdots,U_n$ 使得 $U=\sum_{j=1}^{n}\oplus U_j$;

(ⅳ) $U=\sum_{j=1}^{r}\oplus\ker(T-\lambda_j I)$;

(ⅴ) $\dim U=\sum_{j=1}^{r}\dim\ker(T-\lambda_j I)$.

证明:

由线性算子的矩阵表示定义知 i 与 ii 等价.

ii ⇒ iii

设 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 是 U 的由 T 的本征向量组成的基,令

$$U_j = \text{span}\{u_j\},j = 1,\cdots,n$$

则 U_j 都是 T 的不变子空间,由于 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 是基,任何 $u \in U$ 都可以由它们唯一地线性表示,所以 $U = \sum_{j=1}^{n} \oplus U_j$.

iii ⇒ ii

设 $U = \sum_{j=1}^{n} \oplus U_j$,$U_j$ 都是 T 的一维不变子空间. 任取 $u_j \in U_j, u_j \neq 0, j = 1,\cdots,n$,则 $u_j, j = 1,\cdots,n$ 都是 T 的非零本征向量,因为任何 $u \in U$ 都可以由 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 唯一地线性表示,所以 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 是 U 的基.

ii ⇒ iv　设 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 是 U 的由 T 的本征向量组成的基,则任何 $u \in U$ 都可以写成 T 的本征向量的线性组合,于是

$$U = \sum_{j=1}^{r} \ker(T - \lambda_j I).$$

我们证明这个"和" 实际上是"直接和":设 $w_j \in \ker(T - \lambda_j I), j = 1,\cdots,r$ 且 $\sum_{j=1}^{r} w_j = 0$,这里 $w_1,\cdots,w_r$ 是对应于不同本征值的本征向量,因为对应于不同本征值的非零本征向量是线性无关的,所以

$$w_j = 0,\ j = 1,\cdots,r$$

于是

$$U = \sum_{j=1}^{r} \oplus \ker(T - \lambda_j I).$$

iv ⇒ v

$$\begin{aligned}
\dim U &= \dim\Big(\sum_{j=1}^{r} \oplus \ker(T - \lambda_j I)\Big) \\
&= \dim\Big(\Big(\sum_{j=1}^{r-1} \oplus \ker(T - \lambda_j I)\Big) \oplus \ker(T - \lambda_r I)\Big) \\
&= \dim \sum_{j=1}^{r-1} \oplus \ker(T - \lambda_j I) + \dim\ker(T - \lambda_r I)
\end{aligned}$$

$$= \cdots = \sum_{j=1}^{r} \dim\ker(T - \lambda_j I)$$

v $\Rightarrow$ ii

若 $\dim U = \sum_{j=1}^{r} \dim\ker(T - \lambda_j I)$，我们取 $\ker(T - \lambda_j I), j = 1, \cdots, r$ 的基，将它们放到一起便得到 n 个非零的本征向量 $\{u_1, \cdots, u_n\}$，若有

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j = 0.$$

我们记

$$w_l = \sum_{u_j \in \ker(T-\lambda_l I)} \alpha_j u_j, l = 1, \cdots, r$$

则 $w_l, l = 1, \cdots, r$ 是 T 的对应于不同本征值的本征向量，由 $\sum_{l=1}^{r} w_l = 0$ 知

$$w_l = 0, l = 1, \cdots, r$$

即

$$\sum_{u_j \in \ker(T-\lambda_l I)} \alpha_j u_j = 0, l = 1, \cdots, r$$

但 u_j 是 $\ker(T - \lambda_l I)$ 的基，所以

$$\alpha_j = 0, j = 1, \cdots, n$$

这表示 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 是线性无关的，故 $\{u_1, \cdots, u_n\}$ 是 U 的基.

§6　广义本征向量与广义本征子空间

上节的例子表明某些线性算子的本征向量不足以组成空间的基，所以须要考虑比本征向量更广些的向量.

定义 1　$T \in L(U)$，λ 是 T 的本征值，u 称为是 T 的对应于 λ 的广义本征向量，如果存在 $j \in \mathbf{N}$ 使得 $(T - \lambda I)^j u = 0$.

容易证明所有 T 的对应于本征值 λ 的广义本征向量组成一个子空间，我们称它为对应于本征值 λ 的广义本征子空间.

例　$T \in L(\mathbf{C}^3)$，当取 $\mathbf{C}^3$ 的基为标准基时，$\forall \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3, T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

(1) 求本征值与本征子空间

$$Tz = \lambda z$$

即

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_2 = \lambda z_1 \\ 0 = \lambda z_2 \\ z_3 = \lambda z_3 \Rightarrow (\lambda - 1) z_3 = 0 \end{cases}$$

①$z_3 = 0$　若 $\lambda \neq 0$,则 $z_2 = 0$,从而 $z_1 = 0$,这时 λ 不是本征值. 若 $\lambda = 0$,则 $z_2 = 0$ 而 $z_1 \neq 0$,所以 $\lambda = 0$ 是本征值,对应的非零本征向量是$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

②$z_3 \neq 0$　这时 $\lambda = 1$,于是 $z_2 = 0, z_1 = 0, \lambda = 1$ 也是本征值,对应的非零本征向量是$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) 考虑广义本征向量与广义本征子空间

对 $\lambda = 0$,因为 $T^2\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}$,这表明$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$是对应于 $\lambda = 0$ 的广义本征向量,而$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $z_3 \neq 0$ 则不是.

因为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$组成了 $\mathbf{C}^3$ 的基,所以对应于 $\lambda = 0$ 的广义本征子空间是 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$,而对应于 $\lambda = 1$ 的广义本征子空间是 $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\mathbf{C}^3 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \oplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ = 对应于 $\lambda = 0$ 的广义本征子空间与对应于 $\lambda = 1$ 的广义本征子空间的直接和.

下面我们将证明对任何线性算子 $T \in L(U)$，U 都可以分解成 T 的对应于不同本征值的广义本征子空间的直接和.

引理 1 $\{0\} = \ker T^0 \subset \ker T \subset \ker T^2 \subset \cdots \subset \ker T^j \subset \ker T^{j+1} \subset \cdots$.

证明: 由零空间的定义即得.

引理 2 如果 $\ker T^m = \ker T^{m+1}$，其中 m 是非负整数，则

$$\ker T^0 \subset \ker T \subset \ker T^2 \subset \cdots \subset \ker T^m = \ker T^{m+1} = \ker T^{m+2} = \cdots$$

证明: 只须证明 $\ker T^{m+1} = \ker T^{m+2}$ 即可.

(1) $\ker T^{m+1} \subset \ker T^{m+2}$，显然.

(2) $\ker T^{m+2} \subset \ker T^{m+1}$：若 $u \in \ker T^{m+2}$，则 $T^{m+2}u = 0$，$T^{m+1}(Tu) = 0$，所以 $Tu \in \ker T^{m+1}$，由 $\ker T^{m+1} = \ker T^m$ 知 $Tu \in \ker T^m$，即 $T^{m+1}u = 0$，$\therefore u \in \ker T^{m+1}$.

引理 3 $\ker T^{\dim U} = \ker T^{\dim U+1}$

证明: 若不然，则

$$\{0\} = \ker T^0 \subsetneqq \ker T \subsetneqq \ker T^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \ker T^{\dim U} \subsetneqq \ker T^{\dim U+1}$$

于是

$$\dim\ker T \geqslant 1$$
$$\dim\ker T^2 \geqslant 2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\dim\ker T^{\dim U+1} \geqslant \dim U + 1$$

与 $\dim\ker T^{\dim U+1} \leqslant \dim U$ 矛盾！

推论 设 $T \in L(U)$，λ 是 T 的本征值，则对应于 λ 的 T 的广义本征子空间是 $\ker(T-\lambda I)^{\dim U}$.

证明: $\forall$ T 的对应于 λ 的广义本征向量 u，都存在 $j \in \mathbf{N}$ 使得 $(T-\lambda I)^j u = 0$，可是

$$\ker(T-\lambda I) \subset \ker(T-\lambda I)^2 \subset \cdots \subset \ker(T-\lambda I)^{\dim U} = \ker(T-\lambda I)^{\dim U+1} = \cdots$$

所以不管 $j \leqslant \dim U$ 或 $j > \dim U$，总有 $u \in \ker(T-\lambda I)^{\dim U}$.

对于任何线性算子 $T \in L(U)$，集合

$$\{Tu \mid u \in U\}$$

是一个 U 的子空间，记为 $\operatorname{ran} T$，称之为 T 的值空间.

显然，由定义可得

引理 4 $U = \operatorname{ran} T^0 \supset \operatorname{ran} T \supset \operatorname{ran} T^2 \supset \cdots \supset \operatorname{ran} T^j \supset \operatorname{ran} T^{j+1} \supset \cdots$

引理 5 $\operatorname{ran} T^{\dim U} = \operatorname{ran} T^{\dim U+1} = \operatorname{ran} T^{\dim U+2} = \cdots$

证明:

(1) 若 $\operatorname{ran} T^m = \operatorname{ran} T^{m+1}$，则 $\operatorname{ran} T^{m+1} = \operatorname{ran} T^{m+2} = \cdots$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com