

混合算學教科書

第四冊

新 學 制

混合算學教科書

第 四 冊

初 級 中 學 用

編 輯 者 段 育 華

校 閱 者 胡 明 復

商 務 印 書 館 發 行

書 科 教 學 中 級 初 制 學 新

混合編輯的初中用書

手圖	唱風	樂理	註音	英文	混合	自然	自然	人生	地理	歷史	公民	國語
工畫	歌琴	教教	文讀	本本	算學	科學	科學	地理	教科	教科	教科	教科
教科	教科	教科	法本	編編	教科	教科	教科	教科	教科	教科	教科	教科
書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書	書書
三冊	六冊	六冊	一冊	六冊	三冊	三冊	六冊	四冊	四冊	三冊	二冊	二冊

◀ 寄 即 索 承 本 樣 目 書 有 印 ▶

元1746(二)

25-3-15

New System Series
Correlated Mathematics
For Junior Middle Schools
The Commercial Press, Limited
All rights reserved

中華民國十五年九月 初版

(初級中學用)

制(新學)混合算學教科書六冊

(第四冊定價大洋陸角)
(外埠酌加運費匯費)

編輯者 段 育 華

校閱者 胡 明 復

發行者 商務印書館

印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館

總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館

分售處 商務印書館分館
北京天津保定奉天吉林龍江
濟南太原開封西安南京杭州
蕪湖安慶蕪湖南昌漢口長沙

★此書有著作權翻印必究★
常德衡州成都重慶廈門福州
廣州潮州香港梧州雲南貴陽
張家口 新嘉坡

初 級 中 學 教 科 書

算 學

編 輯 大 意

一這部書完全是按照新學制同新學制課程綱要編輯出來的。全書共分六冊，每學期一冊，適合初中三年每星期五小時之用。

一根據初中課程綱要所規定，採用混合方法，全書用代數幾何為主，算術三角爲輔，合一爐而冶，不拘門類，循數理自然的次序，編法特出心裁，和一切舊本，迥然不同。

一象數通名，在西文本是 Mathematics，從前沿用日本名詞，譯做“數學”，現在照新學制課程會議改正了，譯做“算學”。

一這書對於名詞初見的地方，附註西文，可爲學生將來研究西書的幫助，并且免去逐譯失真的毛病。

一這冊是全書的第四冊，繼續第三冊代形參伍並授，結構天成：從乘積引起因子分解；從因子分解引起二次方程；從二次方程與面積的關係引起平行四邊形及幾何求面積；從面積的幾何引起畢達哥拉定理；從畢達哥拉定理引起根式運算；從根式引起線段比與無理數；從線段比引起比例線段；從比例線段引起相似形；從相似形裏的線段比引起三角學的正餘弦切；從三角學的應用算法引起近似算與誤差，以爲收束。

一全書共插有算學名人肖像三十幅，并附載小傳，藉以引起學生崇拜學者的觀念，立高尚的志向，同時也可知道些算學發達的歷史。

一這書純用白話講解，並加新式標點；使學生沒有文字上的糾紛，才有學算的興趣。

一這書爲便於初學閱讀起見，不令一段文字或一套算式分跨在兩頁上面。

民國十四年一月

編者識

高斯的小傳 (1777—1855)

十八世紀，歐洲同時有三個大算學家，高斯是當中最年輕的一個。高斯生在不倫瑞克 *Brunswick*，他父親是個泥水匠，本不願意給他讀書，但他生來有驚人的算學天才，地方有一公爵特別注意他。十五歲時，公爵出資送他到加羅林大學 *Caroline*。後來高斯對人演講，常常當作笑話的說道：“我在還不會說話以前，便能計算，”他的天才可以想見了。

高斯在加羅林大學進步之快，真是無比，不到三年，全校的教授與學生個個都承認那教授所能教的，他都早已知道了。高斯在做學生的時代，就有許多發明，譬如“最小二乘法（一種誤差最少的近似算法）”“圓內正十七角形的作法”等等都是。後來年紀加長，發明愈多，後人同他整理起來，竟有十幾厚冊。

高斯在算學上研究最深的要算整數論，他有一部傑作，叫理論數學 *Disquisitiones Arithmeticae*，在1801年出版，其中大半是他所發見的整數性質定理。這書至今還是數論 *Theory of Number* 的標準書。高斯在算學的分析 *Analysis* 上貢獻也很多很多，不勝枚舉。

高斯不但是大算學家，並且是大天文家同物理學家。做格丁根 *Göttingen* 天文台長，差不多有半個世紀；在物理中光學同電學的理論上也有許多重大的發明。

高斯的小傳 (1777—1855)

十八世紀，歐洲同時有三個大算學家，高斯是當中最年輕的一個。高斯生在不倫瑞克 *Brunswick*，他父親是個泥水匠，本不願意給他讀書，但他生來有驚人的算學天才，地方有一公爵特別注意他。十五歲時，公爵出資送他到加羅林大學 *Caroline*。後來高斯對人演講，常常當作笑話的說道：“我在還不會說話以前，便能計算，”他的天才可以想見了。

高斯在加羅林大學進步之快，真是無比，不到三年，全校的教授與學生個個都承認那教授所能教的，他都早已知道了。高斯在做學生的時代，就有許多發明，譬如“最小二乘法（一種誤差最少的近似算法）”“圓內正十七角形的作法”等等都是。後來年紀加長，發明愈多，後人同他整理起來，竟有十幾厚冊。

高斯在算學上研究最深的要算整數論，他有一部傑作，叫理論數學 *Disquisitiones Arithmeticae*，在1801年出版，其中大半是他所發見的整數性質定理。這書至今還是數論 *Theory of Number* 的標準書。高斯在算學的分析 *Analysis* 上貢獻也很多很多，不勝枚舉。

高斯不但是大算學家，並且是大天文家同物理學家。做格丁根 *Göttingen* 天文台長，差不多有半個世紀；在物理中光學同電學的理論上也有許多重大的發明。



Gauss

高斯的肖像

初級中學算學教科書

第四冊目次

第一章 二項乘積及因子……………1-28

Binomial Product and Factors

(1) 冪的冪, (2) 積的冪, (3) 倒數, (4) 商的因子, (5) 商的冪, (6) 因子與積, (7) 二項因子, (8) 含兩項相同兩二項因子的代數式, (9) 含兩項相異兩二項因子的代數式, (10) 含首項相同兩二項因子的代數式, (11) 含首項相似兩二項因子的代數式, (12) 二項式的立方 (13) 二項立方和較的因子, (14) 用因子化簡分式, (15) 分式方程, (16) 倒數聯立方程.

第二章 二次方程……………29-60

Quadratic Equation

(1) 什麼叫二次方程, (2) 方程的整理法, (3) 一次方程與二次方程通式, (4) 二次方程解法, (5) 代數式與函數, (6) 二次方程解法一(格欄幅解法), (7) 二次函數與拋物線, (8) 0 的運算, (9) 0 的因子定律, (10) 二次方程解法二(因子解法), (11) 二次方程解法三(湊方解法), (12) 三種解法的討論, (13) 公式解法, (14) 湊方解法的圖解, (15) 缺項二次方程, (16) 二次方程應用問題.

第三章 平行四邊形.....61-88

Parallelogram

(1) 平行四邊形定義, (2) 平行四邊形用途, (3) 平行四邊形活動性, (4) 平行四邊形作法, (5) 平行四邊形性質定理一(對角線平分全形), (6) 平行四邊形性質定理二(兩對角線互相平分), (7) 平行四邊形性質定理三(鄰角互為補角), (8) 平行四邊形判定定理一(對邊相等), (9) 平行四邊形判定定理二(一對對邊平行相等), (10) 作正方法, (11) 三線平行定理, (12) 平行線內等線段定理, (13) 等分線段法, (14) 有向線段表示力, (15) 合力, (16) 力的平行四邊形定律, (17) 分力, (18) 速度的平行四邊形定律.

第四章 面積與二次根.....89-112

Area and Quadratic Surds

(1) 兩長方面積的比一(同底或同高), (2) 兩長方面積的比二(高底都不同), (3) 單位面積, (4) 長方面積定理, (5) 平行四邊形面積定理, (6) 三角形面積定理, (7) 畢達哥拉定理, (8) 等積三角形作法, (9) 等積正方作法, (10) 二次根的線段表示, (11) 二次根的最簡式, (12) 二次不盡根的保留, (13) 二次根的加減, (14) 二次根的乘積, (15) 共軛二次根, (16) 共軛二次根的特性, (17) 分母裏二次根的化去法.

第五章 比例線段.....113-134

Proportional Line-segments

(1) 線段比, (2) 線段比與單位線段, (3) 公共單位, (4) 沒有公共單位的線段, (5) 有公度量與無公度量, (6) 有理數與無理數, (7) 比例線段, (8) 三角形裏的比例線段定理, (9) 作第四比例線段法, (10) 比例的加法定律, (11)

比例的減法定律, (12) 比例的加減定律, (13) 線段的內分與外分, (14) 三角形的內分比例線段定理, (15) 三角形的外分比例線段定理, (16) 調和分割, (17) 線段的內分法, (18) 線段的外分法。

第六章 相似三角形與多角形……………135-156

Similar Triangles and Polygons

(1) 相似多角形定義, (2) 相似形的實用, (3) 相似三角形的特性, (4) 相似三角形定理一(兩角), (5) 相似三角形與比例線段, (6) 相似三角形定理二(兩邊夾一角), (7) 相似三角形定理三(三邊), (8) 比例分線規, (9) 對角線尺, (10) 圖形縮放器, (11) 直角三角形母子相似定理, (12) 畢達哥拉定理的別證, (13) 相似多角形定理, (14) 相似多角形作法, (15) 連比例, (16) 連比例定理, (17) 相似多角形緣邊比定理, (18) 相似三角形對應高的比定理, (19) 相似三角形面積比定理, (20) 相似多角形面積比定理。

第七章 三角比與直角三角形……………157-186

Trigonometric Ratios and Right Triangle

(1) 相似直角三角形, (2) 斜邊, 對邊, 倚邊, (3) 角裏的線段比, (4) 線段比與角度的關係, (5) 三角比, (6) 三角函數, (7) 三角函數的求法, (8) 三角函數表, (9) 特別角的三角函數, (10) 45° 的函數, (11) 30° 和 60° 的函數, (12) 三角函數的冪的記法, (13) 同角各函數的關係, (14) 同角各函數互求法, (15) 餘角的三角函數, (16) 三角形的解法, (17) 直角三角形邊角的關係, (18) 直角三角形的解法, (19) 測角儀, (20) 水平線與豎垂線, (21) 視線, (22) 仰角與俯角, (23) 三角學的簡易應用問題。

第八章 近似算與誤差 187-204

Approximation and Error

(1)直接量法的限度,(2)近似數值,(3)有效數字,(4)小數前後的0,(5)誤差,絕對誤差,(6)近似數和較的誤差定律,(7)準確度與相對誤差,(8)近似數商積的誤差定律,(9)有效數字與百分誤差,(10)近似數的運算,(11)省略乘法,(12)省略除法,(13)近似算常用公式,(14)累次近似算開平方,(15)用方格求近似面積。

算學家的肖像同小傳

1. 高斯 *Gauss* 1章前
2. 達達烈 *Tartaglia* 2章前
3. 迦但 *Cardan* 3章前
4. 韓莫敦 *Hamilton* 5章前
5. 巴羅 *Barrow* 7章前

初級中學教科書

算 學

第四冊

第一章 二項乘積及因子

Binomial Product and Factors

(1) **冪的冪** A Power of a Power 冪的冪就是乘方的乘方。假如已經有了 a 的二次冪如 a^2 ，再要去找這個 a^2 的三次冪如 $(a^2)^3$ ，依指數的定義和指數相加的定律，我們便知道：

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \times 3} = a^6$$

推廣起來，設這兩個指數是隨便兩個正的整數，譬如說 m 和 n ，就有

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots \text{一直到 } n \text{ 個因子}$$

$$= a^{m+m+m+\cdots \text{一直到 } n \text{ 個 } m} = a^{mn}$$

可見要找冪的冪，只要把兩指數相乘便是。

推論 從乘法互換定律，容易知道： $(a^m)^n = (a^n)^m$ 。

(2) 積的冪 A Power of a Product 假如有兩數的乘積如 ab , 要找這乘積的三次冪如 $(ab)^3$, 依指數定義, 定律和乘法互換定律, 便有

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3$$

推廣到隨便什麼正整數的指數, 就有

$$\begin{aligned} (ab)^n &= ab \times ab \times ab \times \cdots \cdots \text{一直到 } n \text{ 個因子} \\ &= (a \cdot a \cdot a \cdots \cdots n \text{ 個 } a) (b \cdot b \cdot b \cdots \cdots n \text{ 個 } b) \\ &= a^n b^n. \end{aligned}$$

再推廣得: $(abc \cdots \cdots)^n = a^n b^n c^n \cdots \cdots$

練習一

求出下列各冪的數值:——

$$1. (12^2)^3 = ? \quad 2. (-2^4)^2 = ? \quad 3. (11^3)^2 = ?$$

去下面各式的括號:——

$$4. (2^3)^2 \times (2^2)^3$$

$$5. (3a^2x^3)^4$$

$$6. (ax^2 \times bx^3)^4$$

$$7. [(-3)^3 \cdot (2x)^2]^4$$

$$8. (-7ab^2xy^3)^5$$

$$9. (7a^nb^{2n})^3$$

$$10. (2mx^2)^m \cdot (3nx^3)^n$$

$$11. (-5a^3b^2x^7y^4)^{2n}$$

證明下面兩個恆等式:——

$$12. (a^2)^3 = (a^3)^2$$

$$13. (x^m)^n = (x^n)^m$$

(3) 倒數 Reciprocal 一個數除1的商, 稱為這個數的倒數.

例如: 1. 8 的倒數是 $\frac{1}{8}$ 就是 .125;

2. $x+2$ 的倒數是 $\frac{1}{x+2}$;

3. $\frac{2}{3}$ 的倒數是 $\frac{3}{2}$;

4. $\frac{x}{x-a}$ 的倒數是 $\frac{x-a}{x}$.

倒數的性質: 設 R 是 N 的倒數, 依定義: $R = \frac{1}{N}$
從這式可得; $RN=1$ 又 $N = \frac{1}{R}$.

(一) 一數若是他數的倒數, 那麼他數也是原數的倒數, 換句話說: 倒數與原數互做倒數.

(二) 兩數互做倒數, 他的相乘積總是 1.

(4) 商的因子 有了倒數這個觀念, 一個商的式至少可分做兩個因子的積.

例一. $\frac{a}{b} = a \times \left(\frac{1}{b}\right)$

例二. $\frac{37}{1.25} = 37 \times .8 = 29.6$

(注意) 利用倒數, 凡算術的除法, 都可以用乘法來代替. (有些算學表, 載有從 1 到萬各整數的倒數可以直接檢查).

練習二

求下列各數的倒數：——

1. 8

2. 5

3. 12

4. .33333.....

5. 2^4

6. $x-1$

7. $x - \frac{1}{x}$

8. $\frac{x+1}{x-1}$

9. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

先求 16 的倒數，再求下面各分數的數值：——

10. $\frac{3}{16}$

11. $\frac{11}{16}$

12. $\frac{15}{16}$

13. 已經知道 4 的倒數是 .25, 又 8 的倒數是 .125; 不用除法求 32 的倒數。

14. 已經知道 16 的倒數 .0625, 又 8 的倒數是 .125; 不用除法求 $\frac{24}{128}$ 的數值。

15. 依倒數理, 說明分數除法與分數乘法的關係。

(5) 商的冪 A Power of a Quotient 假如有兩數的商如 $\frac{a}{b}$, 要找他的三次冪如 $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, 依指數的定義, 定律, 和分式乘法的規則, 便有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

推廣起來得到

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots \cdots \text{一直到 } n \text{ 個因子} = \frac{a^n}{b^n}.$$

再推廣得: $\left(\frac{abc\cdots}{pq\cdots}\right)^n = \frac{a^n b^n c^n \cdots}{p^n q^n \cdots}.$

練習三

去下列各式的括號：——

$$1. \left(\frac{2^3}{3^4}\right)^5 \quad 2. \left(\frac{7a^2b}{2x^3}\right)^4 \quad 3. \left(\frac{2x^my^{2m}}{a^2b^3}\right)^n$$

$$4. \text{證明：} \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

$$5. \text{已知} 8 \text{的倒數是} .125, \text{不用除法求} \frac{73}{64} = ?$$

(6) 因子與積 Factors and Product 從因子連

乘得積，從積分解得因子；前一個是正運算，後一個是反運算；正運算自然可能，反運算却就不一定時時可能了。譬如有各處的人來到北京，再叫他回去，有的人原來生在北京，便用不着要回到那裏去。——代數式有的有因子，有的沒有因子，也就是這個道理。

沒有因子的固然不能分解，就是有了因子的，也因為他的來路很多，變化無定，不容易尋出；所以我們分解因子，不但沒有普遍的方法，便是有幾種特殊的方法，也都要枝枝節節的先查明從因子發生乘積的來歷，再看他構造上有什麼關係，才能着手。