北京市海淀区重点中学特级高级教师编写

海淀题链

Haidian tilian

解题思维能力发散训练

高一数学

主编/邓均 蒋大凤

东师教辅

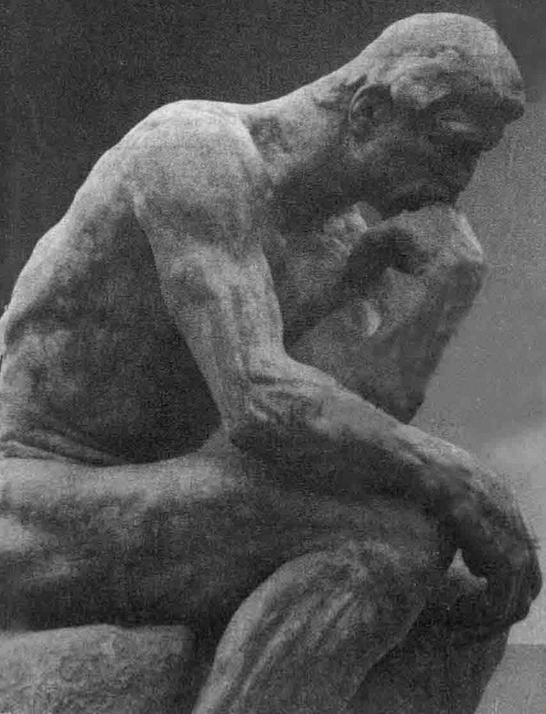
东北师范大学出版社

北京市海淀区重点中学特级高级教师编写

海淀题链

Haidian tilian

解题思维能力发散训练



高一数学

主编/邓 均 蒋大凤

东北师范大学出版社·长春

图书在版编目（CIP）数据

海淀题链——解题思维能力发散训练. 高一数学/邓　均
蒋大凤主编. —长春：东北师范大学出版社，2001.6
ISBN 7 - 5602 - 2777 - 5

Ⅰ. 海…　Ⅱ. ①邓…②蒋…　Ⅲ. 数学课－高中－解题
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 24236 号

□出 版 人：贾国祥
□责任编辑：张丽娟　□封面设计：李金锋
□责任校对：白金鹏　□责任印制：张文霞

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 138 号（130024）
销售热线：0431—5695744　5688470
传真：0431—5695734
网址：http：//www.nnup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
黑龙江新华印刷二厂印刷
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
开本：880 mm×1230 mm 1/32　印张：14.75　字数：535 千
印数：00 001 — 10 000 册

定价：16.50 元

在题的链接中寻求一种解题的大智慧

《海淀题链——解题思维能力发散训练》前言

《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书是以发散思维为主线而编写的一套重在揭示初高中数学、物理、化学等学科内在联系和规律的新书，目的在于通过对原型题及其变型题之间的无穷变化的解剖和训练，使得中学生能够掌握一种用联系的眼光去看待一个个看似孤单零散的题，从而学会用一种凌厉的思维去击穿每一个无从下手的难题，学会用灵活多变的方法优化解决每一个问题的方式。

一些高水平的教师在课堂教学过程中经常使用的有效方法是：充分利用发散思维，探索数、理、化学科内部规律的相互关联，在两个和两个以上的题目之间，寻求其中的内在的变化和发展，挖掘其间隐藏着的看不见的联系和规律。同时，这更是一些尖子生接受速度快、解题能力强的核心因素。实际上，这种做法的关键就在于把一个个看上去相对封闭的题目放到一个相对宽泛的视野中，目的在于寻求一种解题的质量，寻求一种在掌握学科内在规律之上的解题大智慧，从而摒弃了那种见题就解，就题论题，全然不顾题目之间的相互联系和变化的机械式做法。教学效果自然漂亮，学生的学习水平和解题能力也得到了大幅度的提高。

所谓“条条大路通罗马”，是说通往罗马的道路是完全不同的。但如果你只知道一条路，你又如何知道你走的这条路就是最佳的路径呢？所谓“知己知彼，百战不殆”，是在告诉你常胜将军的秘诀是：不仅仅要了解你自己，更要了解你的对手。对于学习数、理、化而言，如果你不了解它，你又如何能“百战不殆”呢？从这一点来说，《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书不仅仅能够帮助你快速提高自己的学习水平，更多地掌握解题技巧和方法，更重要的是能够真正提高你自己的素质和能力，也就是说《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书中所蕴涵着的思维可以使你受益一生，因为那是一种大智慧！

创造能力的形成有两个必要条件：一是扎实的基础；二是创造性思维。其中创造性思维的一个核心思维就是发散思维。

发散思维是一种以某一问题为发散源，从横向和纵向多方位地进行辐射状态的积极思考和联想，广泛地搜集与发散源有关的知识和方法，从而使问题得以解决、升华的思维方式。发散思维是一种不依赖常规寻找变异的思维，它具有三个互相联系的特征，即流畅性、变通性和独特性。

流畅性是指思维畅通，一个表面看似一般但内涵十分丰富的问题，一个可以发展的问题，只要深入地思考就能将其向纵深拓展得到更多、更巧妙的结果，得到新的发现，即达到一题多变的效果。

变通性是指思维灵活多变，从不同的角度去探索、开拓思路，打破消极思维定势的束缚，不拘泥于已有的范例和模式，使一题多解。

独特性是指思维超乎寻常，标新立异，对于一些构思巧妙、条件隐蔽的问题，在熟练掌握常规思维方法的同时，探索一些不同寻常的非常规解法，使解题过程简捷、明了。以数学为例，如“数形结合法”、“赋值法”、“代换法”、“构造法”等。

为了培养学生的发散思维能力和创新能力，我们组织了一批具有丰富教学经验和创新精神，具有较高编写水平的老师编写了这套《海淀题链——解题思维能力发散训练》丛书。丛书以国家初中、高中(数学、

物理、化学)新教学大纲的教学必修章节、篇目为依据,具体地说以数学、物理、化学教学大纲规定的知识点为统辖,选择了能够代表数、理、化学科知识网络中重要的知识点作为例题,以[核心知识大盘点]、[典型例题大剖析]、[巩固练习大提高]、[参考答案大揭底]四大栏目构筑丛书编写体例,指导学生通过纵横发散思维深入探索数、理、化概念的内涵和外延,认识不同概念、定理、定律的发展与联系;学会运用数、理、化公式、概念、定理、定律,用不同的观点、方法归纳出解决问题的一般途径、方法及技巧。

希望同学们通过阅读这套丛书,学会用新角度、新观点、多层次地思考问题,从而达到掌握知识、创新知识、提高能力的目的。

参加本书编写的有:于静、邓均、邓兰萍、王建民、王晓萍、王爱莲、付仑、田玉凤、卢青青、乐进军、刘鸿、刘天华、刘汉昭、刘志诚、刘建业、刘桂兰、刘宏军、刘爱军、刘树桐、刘继群、刘淑贤、闫达伟、闫梦醒、朱志勇、朱万森、孙家麟、李里、李公月、李若松、李新黔、何小泊、吴琼、吴建兵、张立雄、张兆然、张宝云、张绍田、张振来、张淑芬、陆剑鸣、陈恒华、陈继蟾、金仲鸣、庞长海、庞炳北、姜杉、姚桂珠、赵汝兴、赵茹芳、柯育璧、高书贤、贾秋荣、徐淑琴、黄万端、韩乐琴、蒋大凤、蒋金利、程秋安、谭翠江、管建新、樊福、霍永生、魏新华。

由于时间仓促,书中难免有一些差错和不足之处,望读者朋友不吝赐教。

编　者

2001年6月于北京

海　淀　题　链
解题思维能力发散训练

《海淀题链——解题思维能力发散训练》编委会

目 录

第一章　集合与简易逻辑

集　合

核心知识大盘点 ●●●

1. 集合的特性

(1)元素的确定性；

(2)元素的互异性；

(3)元素的无序性(不考虑元素间的顺序).

2. 集合的表示法

(1)字母表示法；

(2)列举法；

(3)描述法；

(4)图示法.

3. 集合与元素间的关系

元素与集合间的关系是“属于”或“不属于”的关系，即元素 $a\in A$ 或 $a\overline{\in}A$，二者必居其一.

4. 集合与集合间的关系

(1)子集. $A\subseteq B\Leftrightarrow A\subset B$ 或 $A=B$；

(2)真子集. $A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $A\neq B$；

(3)集合 A 与集合 B 相等. $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$；

(4)包含($\subseteq$,$\subset$)与相等的性质；

$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$；

$A\subset B$ 且 $B\subset C\Rightarrow A\subset C$；

$A=B$ 且 $B=C\Rightarrow A=C$.

5. 集合的运算及重要公式

(1)$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$(交换律);

(2)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$(摩根律);

(3)$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$,$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;

(4)$A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=I\Leftrightarrow A=\overline{B}$.

6. 特殊集合的性质

(1)$\varnothing\subseteq A$;$\varnothing\subset A$(非空);$A\cap\varnothing=\varnothing$;$A\cup\varnothing=A$;

(2)$A\cap A=A$;$A\cup A=A$;$A\cap\overline{A}=\varnothing$;$A\cup\overline{A}=I$;$\overline{\overline{A}}=A$.

7. 有限集合的计数公式

(1)$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$;

(2)$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

在利用公式解决实际问题时,要区分 $A\cap B$ 与 $A\cup B$ 的实际含义,并注意集合间的公共元素.

典型例题大剖析 ●●●

例 1 数集 $A=\{(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(4n\pm1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $A\supset B$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

[**通法⇨通解**]

解法 1

因为 $2n+1(n\in\mathbf{Z})$表示奇数,而 $4m\pm1(m\in\mathbf{Z})$也表示奇数. 若令 $m=0,\pm1,\pm2\cdots$由不完全归纳法可知:$4m\pm1(m\in\mathbf{Z})$也表示全体奇数,故选 C.

解法 2 排除法.

由题意知 C,B 中必有且仅有一个正确,由答案惟一可知 A,B 不正确,否则 D 也正确,与答案惟一矛盾. 同时特殊化,令 $m=0,1$ 得 $4m\pm1$ 为 $-1,1,3,5$ 等,知 C 正确.

解法 3 定义法.

任取$(2n+1)\pi\in A$,当 $n=2m$ 时,$2n+1=4m+1\in B$,令 $n=2m-1$,则有 $2n+1=2(2m-1)+1=4m-1\in B$,$\therefore A\subseteq B$;任取$(4m\pm1)\pi\in B$,当令 $n=2m$ 时,有 $2n+1\in A$,又当 $n=2m-1$ 时,有 $4m-1=2n-1\in A$,$\therefore B\subseteq A$,综上有 $A=B$.

点评 解法 1 利用观察法来确定 A,B 关系. 解法 3 直接利用定义判定 $A=B$. 解法 2 使用了间接法(排除法),这是几种基本方法.

[巧思⇨巧解]

解法 1　利用单位圆.

在单位圆中，分别画出$(2n+1)\pi$与$(4m\pm1)\pi$所表示的角的终边，它们都表示终边位于x轴负半轴上的角的集合，故$A=B$，∴选 C.

解法 2　分类讨论.

按余数分类，被 2 除余 1 的整数是全体奇数$2n+1(n\in\mathbf{Z})$，被 4 除余 1 或 3（或-1）的整数也是全体奇数. ∴选 C.

点评　解法 1 是利用"形"来说明$A=B$的，解法 2 是从"数"的方面进行推理论证的，此法简明而严谨.

[变换⇨引申]

1. 不改变问题的本质，将条件改变，得

变题 1　数集$A=\{2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$，试判断$A$与$B$的关系（包含与相等）.

变题 2　已知全集$I=N$，集合$A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x=4n,n\in\mathbf{N}\}$. 则（　　）.

A. $N=A\cup B$　　B. $N=\overline{A}\cup B$　　C. $N=A\cup\overline{B}$　　D. $N=\overline{A}\cup\overline{B}$

2. 变更命题的形式，得

变题 3　已知全集$I=\{$不大于 10 的自然数$\}$，且$\complement_I A\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{4,6,8\}$，求$A$，$B$.

变题 4　已知$A=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求$a$的取值范围.

变题 5　设$A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若$A\cap B\subsetneqq B$，求$a$的值.

点评　①要从集合的特点看交、并、补的实质；②注意转化思想的运用：$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subsetneqq A$；$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subsetneqq A$；③空集是非空集合的真子集.

例 2　已知全集$I=\{x|x<10,x\in\mathbf{N}\}$，且$\complement_I A\cap B=\{3,5,7\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{4,6,8\}$，求$A$和$B$.

[通法⇨通解]

解法 1

由$\complement_I A\cap B=\{3,5,7\}$知：$3,5,7\notin A$，且$3,5,7\in B$.

由$A\cap B=\{2\}$知：$2\in A$，$2\in B$.

由$\complement_I A\cap\complement_I B=\{4,6,8\}$知：$4,6,8\notin A$，且$4,6,8\notin B$.

下面考虑 1，9 是否在A，B中.

若$1\in B$，但因$1\notin A\cap B$，∴$1\notin A$，∴$1\in\complement_I A$.

$\therefore 1\in\complement_I A\cap B$，这与$\complement_I A\cap B=\{3,5,7\}$矛盾，故$1\notin B$，即$1\in\complement_I B$.

同理可得$9\in A,9\notin B$.

$\therefore A=\{1,2,9\},B=\{2,3,5,7\}$.

解法 2　利用文代图来解.

如图 1 - 1 所示，A,B 将全集 I 分成四个部分①，②，③，④.

由条件$\complement_I A\cap B=\{3,5,7\}$知④中含有 3，5，7(如图 1 - 2).

由条件 $A\cap B=\{2\}$ 知③中含有 2，由条件$\complement_I A\cap\complement_I B=\complement_I(A\cup B)$(摩根律)$=\{4,6,8\}$，

知①中含有 4，6，8. 余下的 1，9 只能在②中，

$\therefore A=\{1,2,9\},B=\{2,3,5,7\}$.

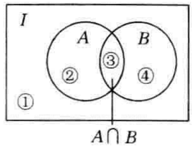


图 1 - 1

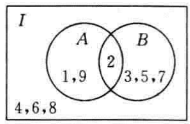


图 1 - 2

点评　解法 1 中利用了集合的交、并、补的概念进行判断. 解法 2 中利用文代图的直观性来判定集合与元素关系.

[巧思⇨巧解]

解法 1　利用集合的运算求解(如图 1 - 3).

$\because\complement_I A=(\complement_I A\cap B)\cup(\complement_I A\cap\complement_I B)$

$=\{3,5,7\}\cup\{4,6,8\}=\{3,4,5,6,7,8\}$，

$\therefore A=\{1,2,9\}$.

$B=(A\cap B)\cup(\complement_I A\cap B)=\{2\}\cup\{3,5,7\}=\{2,3,5,7\}$.

解法 2　用列表法求解.

将$\complement_I A\cap B,A\cap B,\complement_I A\cap\complement_I B$ 中的元素分别填入表格，再由第二行得$\complement_I A=\{3,5,7,4,6,8\}$.

于是可得 $A=\{2,1,9\},B=\{2,3,5,7\}$.

$\cap$	B	$\complement_I B$
A	2	1，9
$\complement_I A$	3，5，7	4，6，8

图 1 - 3

点评　解法 1，2 本质相同，但解法 1 突出了集合的运算，而解法 2 更简捷明快. 上、下两行为 $A,\complement_I A$；左、右两列为 $B,\complement_I B$.

[变换⇨引申]

1. 改变部分已知条件，可得

变题 1　已知$\complement_I A\cup\complement_I B=\{x\mid x<10,x\in\mathbf{N}$ 且 $x\neq 2\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_I A\cap B=\{4,6,8\}$，$A\cap\complement_I B=\{3,5,7\}$.

求$\complement_I(A\cup B)$，A,B.

变题 2　已知 $A\cap B=\{1,2\}$，$\complement_I B=\{3,4,7,8\}$，$\complement_I A=\{5,6,7,8\}$，求全集 I 和集合 A,B.

2. 将元素由整数改为实数，可得

变题 3　已知全集 $I=\mathbf{R}$，$A\subsetneqq I$，$B\subsetneqq I$.

$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<5\}$，$\complement_I B\cap A=\{x\mid x>8\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{x\mid 5\leqslant x\leqslant 8\}$，求 A，B.

点评　集合的元素有无穷多个解，可以用列表法求解，或利用数轴来求解更方便.

巩固练习大提高 ●●●

1. 数集 $A=\{2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{4k\pm 1,k\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是(　　).
   A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$
2. 已知$\complement_I A\cup\complement_I B=\{x\mid x<\mathbf{N},x\in\mathbf{N}$，且 $x\neq 2\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\complement_I A\cap B=\{4,6,8\}$，$A\cap\complement_I B=\{3,5,7\}$，求$\complement_I(A\cup B)$，$A$，$B$.
3. 已知 $A\cap B=\{1,2\}$，$\complement_I B=\{3,4,7,8\}$，$\complement_I A=\{5,6,7,8\}$，$\complement_I B\cap A=\{x\mid x>8\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{x\mid 5\leqslant x\leqslant 8\}$，求 A，B.
4. 已知全集 $I=\mathbf{R}$，$A\subsetneqq\mathbf{R}$，$B\subsetneqq\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x\mid -2\leqslant x<5\}$. $\complement_I B\cap A=\{x\mid x>8\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{x\mid 5\leqslant x\leqslant 8\}$，求 A，B.
5. 设 a，b 是两个实数，且 $A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$都是坐标平面内的点集，讨论是否存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 与$(a,b)\in C$ 同时成立?

参考答案大揭底 ●●●

1. 解法 1

$\because A$ 表示奇数集，B 表示被 4 除余 1 或 3 的数集，也是奇数集，$\therefore A=B$.

解法 2

定义法.

令 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$，则 $2n+1=4k+1(k\in\mathbf{Z})$，

又令 $n=2k-1(k\in\mathbf{Z})$，则 $2n+1=4k-1(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore A=B$.

解法 3

$\because k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0,1,2,3$，则 $4k\pm 1$ 分别表示$-1,1,3,5,7,9,11,13$，

于是可猜得 $A=B$.

解法 4

在$(0,5)$内，集合 A 中的元素是 1，3，而 B 中的元素也是 1，3，可猜得 $A=B$.

2. 解法 1

$\complement_I A\cup\complement_I B=\complement_I(A\cap B)=\{1,3,4,5,6,7,8,9\}$,

由 $A\cap B=\{2\}$,知:$2\in A$ 且 $2\in B$,

由 $\complement_I A\cap B=\{4,6,8\}$,知 $4,6,8\in\complement_I A$,$\therefore 4,6,8\overline{\in}A$,

且 $4,6,8\in B$.

由 $A\cap\complement_I B=\{3,5,7\}$,知 $3,5,7\in A$ 且 $3,5,7\overline{\in}B$,即 $3,5,7\in B$.

综上可知 $A=\{2,3,5,7\}$,$\complement_I A=\{1,4,6,8,9\}$.

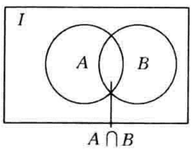
若 $1\in A$,则 $1\in A\cap B$,但 $1\overline{\in}A\cap B$.

$\therefore 1\in A\cap B$,这与 $A\cap B=\{2\}$矛盾,$\therefore 1\overline{\in}A$,同理 $9\overline{\in}A$.

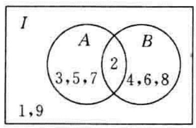
$\therefore\complement_I(A\cup B)=\{1,9\}$,$B=\{2,4,6,8\}$.

解法 2

利用文代图求解.首先明确答图1-1中各个集合所代表的不同意义,然后再按条件将各元素依次填入它所属于的集合(见答图 1-2).



答图 1-1



答图 1-2

解法 3 用列表法求解(见答图 1-3).

根据条件,可依次填入集合 $A\cap B$,$\complement_I A\cap B$,$A\cap\complement_I B$ 的元素,最后分析得$\complement_I A\cap\complement_I B$ 中元素.

注意:第一行中是 A 的全部元素,第二行为$\complement_I A$中元素,而上、下两行元素为全集 I 中元素.第一列元素为 B 中元素,第二列元素是$\complement_I B$ 中元素,两列元素是全集 I 中元素.

$\cap$	B	$\complement_I B$
A	2	3,5,7
$\complement_I A$	4,6,8	1,9

答图 1-3

解法 4

$\complement_I A\cup\complement_I B=\{1,3,4,5,6,7,8,9\}=\complement_I(A\cap B)$

$A=(A\cap B)\cup(A\cap\complement_I B)=\{2\}\cup\{3,5,7\}=\{2,3,5,7\}$,

$B=(A\cap B)\cup(\complement_I A\cap B)=\{2\}\cup\{4,6,8\}=\{2,4,6,8\}$,

$\complement_I(A\cup B)=\{1,9\}$.

3. 解法 1

$I=(A\cap B)\cup(\complement_I(A\cap B))=(A\cap B)\cup(\complement_I A\cup\complement_I B)$

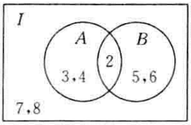
$=\{1,2\}\cup\{5,6,7,8\}\cup\{3,4,7,8\}$

$=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,5,6\}$.

解法 2　利用文代图标出各个集合中元素(答图1 - 4).

解法 3　列表求解(答图1 - 5).



答图 1 - 4

	B	$\complement_I B$
A	1,2	3,4
$\complement_I A$	5,6	7,8

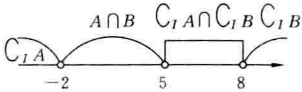
答图 1 - 5

	B	$\complement_I B$
A	$-2\leqslant x<5$	$x>8$
$\complement_I A$	$x<-2$	$5\leqslant x\leqslant 8$

答图 1 - 6

4. 解法 1　列表求解(答图1 - 6).

解法 2　用数列求解(答图1 - 7).



答图 1 - 7

5. 解法 1　利用二次函数性质求解.

由条件知：若存在 a,b 使 $A\cap B\neq\varnothing$.

则有 $\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15\end{cases}$ 有整数解，消去 m 得

$b=3n^2-an+15$，　①

又由条件知：$(a,b)\in C$，即有 $a^2+b^2\leqslant 144$.　②

联立①②得 $\begin{cases}b=3n^2-an+15, & ③\\ a^2+b^2\leqslant 144. & ④\end{cases}$

将③代入④得

$a^2+(3n^2-an+15)^2\leqslant 144$.

即 $(n^2+1)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$.　⑤

此式为关于 a 的一元二次函数，由 $n^2+1>0$，

且 $\Delta=[2n(3n^2+15)]^2-4(n^2+1)(-144)\times[(3n^2+15)^2-144]$

$=-36(n^2-3)^2<0$，

∴⑤式左边恒大于零，这与⑤矛盾.

解法 2　配方法.

由条件 $A\cap B\neq\varnothing$ 得 $\begin{cases}n=m,\\ na+b=3m^2+15\end{cases}$ 有整数解，

消元 m 得 $b=3n^2-an+15$，　①

$\because 0\leqslant(6n-a)^2=a^2+12b-180$

$$=a^2+b^2-b^2+12b-180$$
$$=a^2+b^2-144-(b-6)^2$$
$$\leqslant-(b-6)^2\leqslant 0.$$

$\therefore\begin{cases}b-6=0,\\6n-a=0,\\a^2+12b-180=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{108}=6\sqrt{3},\\b=6,\\n=\pm\sqrt{3}.\end{cases}$

$\because n=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$，$\therefore$ 满足条件的 a,b 不存在.

解法 3

利用基本不等式 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

由解法 2 得出 $an+b-(3n^2+15)=0$.

两边同乘 12，得 $12an+12b-(36n^2+180)=0$，

即 $36n^2-12an-12b+180=0$，

配方得 $(6n-a)^2-a^2-12b+180=0$，

$$\because 0\leqslant(6n-a)^2=a^2+12b-180$$
$$=a^2+6\sqrt{2}\cdot b\sqrt{2}-180$$
$$\leqslant a^2+\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}b\right)^2}{2}-180$$
$$=a^2+\frac{72+2b^2}{2}-180$$
$$=(a^2+b^2)-144\leqslant 0,$$

得 $6\sqrt{2}=\sqrt{2}b$ 且 $6n-a=0,a^2+12b-180=0$.

以下同解法 2.

解法 4

利用基本不等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$.

由条件得出 $na+b-(3n^2+15)=0$，

$$\because 0=na+b-(3n^2+15)\leqslant\sqrt{(n^2+1)(a^2+b^2)}-(3n^2+15)$$
$$\leqslant\sqrt{(n^2+1)\cdot 144}-(3n^2+15)$$
$$=12\sqrt{n^2+1}-(3n^2+15)$$
$$=-3\left(\sqrt{n^2+1}-2\right)^2\leqslant 0,$$

$\therefore\sqrt{n^2+1}-2=0$ 解得 $n=\pm\sqrt{3}\notin\mathbf{Z}$.

故满足条件的 a,b 不存在.

解法 5　利用判别式法求解.

由 $y=na+b$ 得 $b=y-na$，代入 $a^2+b^2\leqslant 144$.

得关于 a 的方程：

$(n^2+1)a^2-2nya+(y^2-144)=0$，

或关于 a 的不等式：

$(n^2+1)a^2-2nya+(y^2-144)\leqslant 0$ 总有实数解，

其判别式 $\Delta\geqslant 0$，即 $4[144(n^2+1)-y^2]\geqslant 0$.

解得 $|y|\leqslant 12\sqrt{n^2+1}$，　①

又由 $y=3n^2+15\geqslant 15$.　②

∴满足①②的 n 不存在(以下略).

解法 6　利用解析法.

对集合 B 中点的纵坐标有
$$\begin{aligned} y_B &= 3m^2+15 \\ &= 3[(m^2+1)+4] \\ &\geqslant 12\sqrt{m^2+1}（利用 a^2+b^2\geqslant 2ab）. \end{aligned}$$

当且仅当 $m^2+1=4$ 即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时取等号，但 $m\in\mathbf{Z}$，

∴等号取不到. ∴$y_B>12\sqrt{m^2+1}$.　①

当 $(a,b)\in C$，即存在整数 n，使得关于 a,b 的方程组 $\begin{cases} na+b=y, \\ a^2+b^2=144 \end{cases}$ 有实数解，

其充要条件是圆 $C: a^2+b^2=144$ 的圆心到直线 $l: na+b=y$ 的距离不大于圆的半径，即 $12\geqslant d=\dfrac{|y|}{\sqrt{n^2+1}}$，即 $|y|<12\sqrt{n^2+1}$.　②

若 $A\cap B\neq\varnothing$，必存在 $m=n=x$，使得①②中的 y 同时成立，但①②不可能同时成立.

解法 7　解析法(三角换元).

要使直线 l 与圆 C 有公共点，那么充要条件是圆 C 至少有一点在直线 l 上.

取一点 $(12\cos\theta, 12\sin\theta)$ 代入直线 l 方程，
$$\begin{aligned} |y| &= |12n\cos\theta+12\sin\theta| \\ &= 12\sqrt{1+n^2}\,|\sin(\theta+\varphi)| \\ &\leqslant 12\sqrt{n^2+1}. \end{aligned}$$

以下同解法 6.

解法 8　解析法.

由 $\begin{cases} y=ax+b, \\ y=3x^2+15 \end{cases}$ 中消去 y 得

$3x^2-ax+15-b=0$.

∵$A\cap B\neq\varnothing$，

∴$\Delta=a^2-4\times 3(15-b)\geqslant 0$.