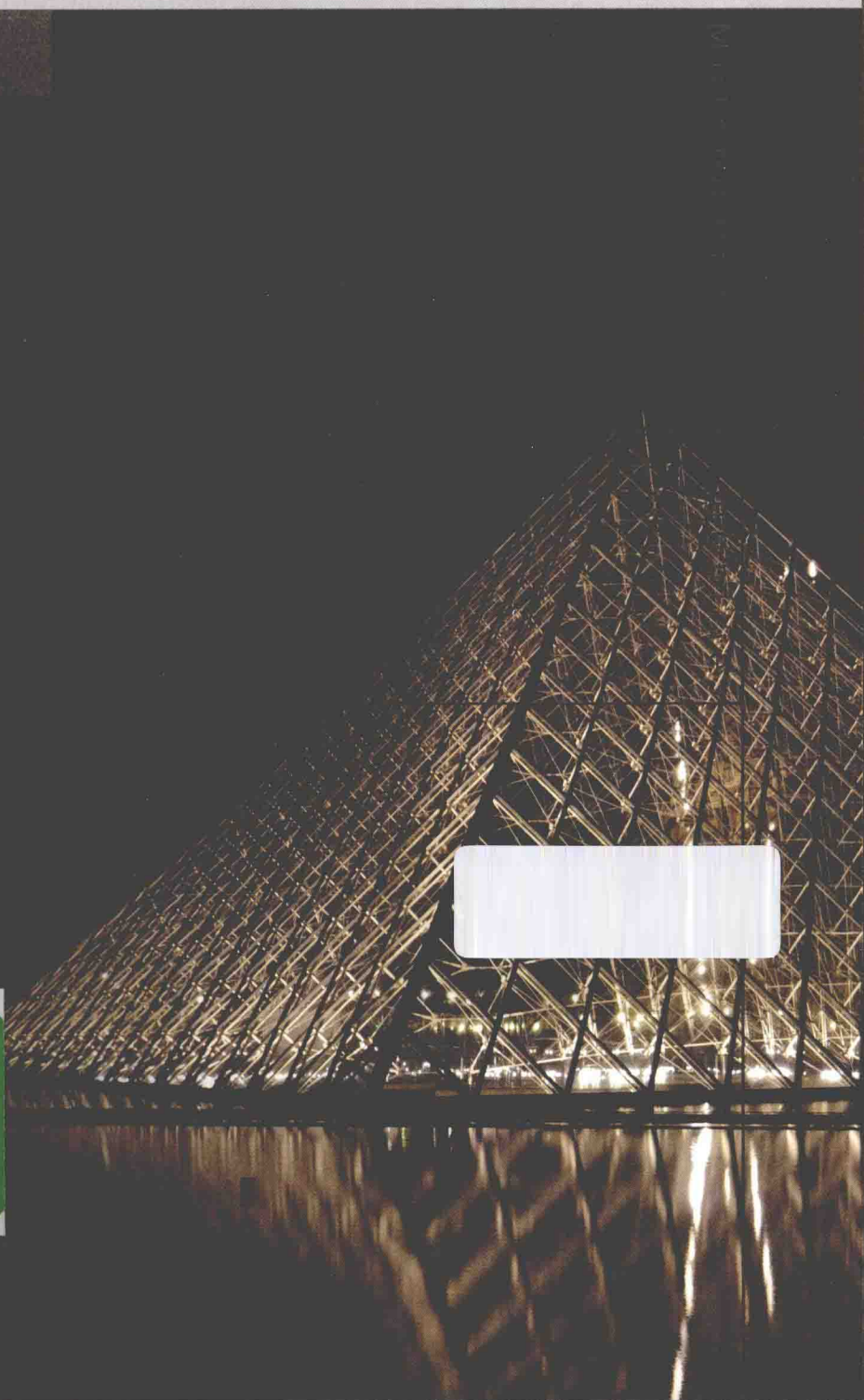


数学与人文

· 第十一辑

好的数学

主 编 丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真
副主编 曲安京



数学与人文 · 第十一辑
Mathematics & Humanities

好的数学

HAODE SHUXUE

主 编 丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真
副主编 曲安京



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

International Press

图书在版编目(CIP)数据

好的数学 / 丘成桐等主编. — 北京: 高等教育出版社, 2013.10

(数学与人文; 第 11 辑)

ISBN 978-7-04-038230-3

I. ①好… II. ①丘… III. ①数学-普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第 205488 号

Copyright © 2013 by

Higher Education Press Limited Company

4 Dewai Dajie, Beijing 100120, P. R. China, and

International Press

387 Somerville Ave., Somerville, MA 02143 U.S.A.

出品人 苏雨恒

总 监 制 吴 向

总 策 划 李冰祥

策 划 赵天夫

责任编辑 赵天夫

责任校对 王 雨

书籍设计 王凌波

责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市西城区德外大街 4 号

邮政编码 100120

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

开 本 787×1092 1/16

印 张 10.5

字 数 170 000

版 次 2013 年 10 月第 1 版

印 次 2013 年 10 月第 1 次印刷

定 价 25.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 38230-00

内 容 简 介

《数学与人文》丛书第十一辑将继续着力贯彻“让数学成为国人文化的一部分”的宗旨，展示数学丰富多彩的方面。

什么是“好的数学”？这可能是一个见仁见智的问题。本辑的主打栏目，通过著名数学家上野健尔先生、著名数学史家 Jeremy Gray、沃尔夫奖得主 V. I. Arnol'd 和波尔约奖得主 Yuri I. Manin 的文章，就这个有趣的问题谈了他们的看法。

张益唐教授在孪生素数猜想方面取得的突破性进展，在过去的几个月引起了数学界的极大关注。本辑开篇刊载齐雅格的文章，从一个音乐家朋友的角度讲述了张益唐“寂寞的求索，孤独的壮举”。据说去年夏天的某个下午，张益唐在齐雅格家的后院中抽烟时，有如神明启示般地想出了证明方案的主要思路。

“数学机构”栏目首先记述了浙江大学数学科学研究中心成立的相关情况，然后，全方位介绍了京都大学数理解析研究所、美国数学研究所以及高等研究院数学学院这三所世界知名数学研究机构的成立、发展以及运作等情况，同时也展示了这三所机构对 20 世纪数学的重要影响。“数学星空”栏目刊载了丘成桐先生追忆龚昇教授的悼念词、介绍其生平与主要数学成就的文章，以及纪念调和分析师亨利·赫尔森 (Henry Helson) 教授的系列文章。“数学科学”栏目专文介绍了青年数学家田野在数论领域的一项新的成就，以及意大利代数几何学家 Federigo Enriques 的生平与工作。

丛书编委会

主 编 (按姓氏笔画排序):

丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真

名誉编委 (按姓氏笔画排序):

丁夏畦 万哲先 王 元 石钟慈 齐民友 李大潜 吴文俊
张景中 陆启铿

编 委 (按姓氏笔画排序):

于 靖 马绍良 王仁宏 王则柯 王善平 井竹君 冯克勤
曲安京 朱熹平 刘献军 许洪伟 孙小礼 严加安 李文林
李 方 李建华 肖 杰 吴 杰 沈一兵 张英伯 张顺燕
张海潮 张奠宙 周 坚 郑方阳 郑绍远 胡作玄 姚恩瑜
袁向东 顾 沛 徐 浩 翁玉林 黄宣国 康明昌 蔡文端

责任编委:

李 方

丛书编辑部 (按姓氏笔画排序):

邓宇善 杨 静 赵春莉

特约撰稿人 (按姓氏笔画排序):

王则柯 冯克勤 纪志刚 李文林 张英伯 贾朝华

《数学与人文》丛书序言

丘成桐

《数学与人文》是一套国际化的数学普及丛书，我们将邀请当代第一流的中外科学家谈他们的研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔，通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽、同时也很重要的科学。从实用来讲，数学遍及物理、工程、生物、化学和经济，甚至与社会科学有很密切的关系，数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具；同时数学对于解释自然界的纷繁现象也具有基本的重要性；可是数学也兼具诗歌与散文的内在气质，所以数学是一门很特殊的学科。它既有文学性的方面，也有应用性的方面，也可以对于认识大自然做出贡献，我本人对这几方面都很感兴趣，探讨它们之间妙趣横生的关系，让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美，作为一种基本理论，物理学家和工程师也可以体会到数学的美。用一个很简单的语言解释很繁复、很自然的现象，这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。我们在中学念过最简单的平面几何，由几个简单的公理能够推出很复杂的定理，同时每一步的推理又是完全没有错误的，这是一个很美妙的现象。进一步，我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述大自然里面的所有现象。比如，面部表情或者衣服飘动等现象，我们可以用数学来描述；还有密码的问题、电脑的各种各样的问题都可以用数学来解释。以简驭繁，这是一种很美好的感觉，就好像我们能够从朴素的外在表现，得到美的感受。这是与文化艺术共通的语言，不单是数学才有的。一幅张大千或者齐白石的国画，寥寥几笔，栩栩如生的美景便跃然纸上。

很明显，我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学的重要性，在 1999 年，江泽民先生在澳门濠江中学提出一个几何命题：五角星的五角套上五个环后，环环相交的五个点必定共圆，意义深远，海内外的数学家都极为欣赏这个高雅的几何命题，经过媒体的传播后，大大地激励了国人对数学的热情，我希望这个丛书也能够达到同样的效果，让数学成为我们国人文化的一部分，让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美。

前言

曲安京

什么是“好的数学”？这可能是一个见仁见智的问题。作为本辑的主打栏目，我们邀请了几位国外学者就这个有趣的问题谈谈他们的看法。

著名数学家上野健尔先生结合其本人学习与研究的经历，提出无论学习、阅读抑或做研究，兴趣永远是最好的老师，也是指引数学进步的原因所在。从这个意义上讲，只有那些让你产生兴趣并深深吸引你的数学才是好的数学。著名数学史家 Jeremy Gray 通过介绍庞加莱对科学、数学以及二者之间关系的认识与观点，阐述了这位被称为最后一个数学全才的大师对“好的数学”的看法。沃尔夫奖得主 V. I. Arnol'd 通过概述庞加莱一些已发表和未发表的著作，介绍了以往被科学史家所忽略掉的庞加莱的工作，展现了庞加莱工作的全面性，同时也揭示了庞加莱对 20 世纪数学的展望；文中也提及庞加莱的一些错误以及未完成的工作，希望后代数学家能继续研究。波尔约 (Bolyai) 奖得主 Yuri I. Manin 探讨了数学与艺术、数学与文明的相似之处，从一个新颖的视角，为我们展示了好的数学的魅力所在。

张益唐教授在孪生素数猜想方面取得的突破性进展，在过去的几个月引起了数学界的极大关注，他的传奇故事激发了各种媒体的持续热议。很多数学家在做出自己最重要的工作过程中，都有“灵光闪现”的瞬间，据说去年夏天的某个下午，张益唐在齐雅格家的后院中抽烟时，有如神明启示般地想出了证明方案的主要思路。本辑开篇刊载齐雅格的文章，从一个音乐家朋友的角度讲述了张益唐“寂寞的求索，孤独的壮举”。

20 世纪以降，科学的专门化和建制化促进了科研机构的诞生，反过来科研机构的兴盛与发展也成为科学不断前进的动力所在。时至今日，绝大多数的数学研究者依附数学研究机构而存在，研究内容亦受研究机构影响，数学机构的兴盛亦成为一国数学能力之体现。本辑数学机构栏目首先记述了浙江大学数学科学研究中心成立的相关情况，然后，全方位介绍了京都大学数理解析研究所、美国数学研究所以及高等研究院数学学院这三所世界知名数学研究机构的成立、发展以及运作等情况，同时也展示了这三所机构对 20 世纪数学的重要影响。

1958 年，年仅 28 岁的龚昇协助华罗庚先生创办了中国科学技术大学数学系，随后的几十年时间，龚昇先生将自己奉献给了中国科大的数学教育事业，培养了一批又一批的数学才俊。本辑“数学星空”栏目刊载史济怀教授的纪念文章，介绍了龚昇教授的生平与主要数学成就。丘成桐先生给龚昇先生的悼念词，情深意切。本栏目中，献给调和与分析大师亨利·赫尔森 (Henry Helson) 教授的纪念文章，则回顾了他的数学生涯和重要贡献。

本辑的“数学科学”栏目刊发了两篇文章。“完备性定理——Federigo Enriques 的毕生追求”介绍了意大利代数几何学家 Federigo Enriques 的生平与工作，同时重点描述了他在双有理几何中的完备性基本定理的工作。Coates 的“同余数”一文，介绍了青年数学家田野在数论领域的一项新的成就。

数学不仅是一门学科，一种知识，也是人类几千年来所从事的一项活动。介绍人类在从事这项活动中所发生的各种或有趣或感人的故事正是《数学与人文》的目的所在，希望通过这些故事能让更多读者喜爱数学，并走上从事这项伟大活动的道路。

目 录

《数学与人文》丛书序言（丘成桐）

前言（曲安京）

张益唐与李生素数猜想

- 1 寂寞的求索 孤独的壮举（齐雅格）

好的数学

- 6 何为好数学？（上野健尔，译者：杨宝山、叶玲）
- 13 庞加莱对数学的认识和观点
（Jeremy Gray，译者：杨宝山、叶玲，校者：王仁宏）
- 29 庞加莱被遗忘和忽视的理论
（V. I. Arnol'd，译者：赵继伟，校者：王善平）
- 48 数学，艺术，文明
（Yuri I. Manin，译者：黄兆镇，校者：徐传胜、徐浩）

数学机构

- 63 丘成桐、汤永谦和浙大数学科学研究中心（胡捷）
- 67 京都大学数理解析研究所——一个日本的和世界性的研究所
（Allyn Jackson，译者：胥鸣伟，校者：陆柱家）
- 77 一个不一样的研究所：美国数学研究所
（Allyn Jackson，译者：王勃，校者：袁敏、刘献军）
- 88 高等研究院数学学院
（Allyn Jackson，译者：王昌，校者：姚恩瑜）

数学星空

- 101 忆江南·挽龚昇教授（丘成桐）
- 102 怀念龚昇教授（史济怀）

- 104 献给 Henry Helson
(Donald Sarason 等, 译者: 万建明、卢卫君, 校者: 郑方阳)

数学科学

- 132 完备性定理——Federigo Enriques 的毕生追求 (Donald Babbitt,
Judith Goodstein, 译者: 赵全庭, 校者: 郑方阳)
- 149 同余数 (John Coates, 译者: 张起帆, 校者: 胥鸣伟)

寂寞的求索 孤独的壮举

齐雅格

齐雅格，美籍华裔指挥家，指挥博士，音乐教授（科罗拉多州立大学普艾布罗分校，美国），音乐总监（科罗拉多州普艾布罗交响乐团，美国），首席指挥（密歇根州马凯特交响乐团，美国），首席客席指挥（武汉爱乐乐团，中国），前艺术音乐总监（奇瓦瓦州立爱乐乐团，墨西哥）。

一位当代的中国哲学家说过：“孤独不是一种状态，而是一种选择。”张益唐就是这少数选择孤独的人！他选择孤独并不是因为他愤世嫉俗，在象牙塔里自我感动，他不是在美国灯红酒绿的生活中独善其身的隐士，更不是不怕坐冷板凳、荣辱不惊的下岗士大夫。

他是一个人，一个普普通通的纯真无邪、正直善良的好人。在他深度的近视镜后面，我们不难发现他的眼神是如此坚定，同时又那么深邃，那么善良，有如那走向祭坛的圣徒。在他宽宽的额头上我们似乎能够看到那句笛卡儿的名言：cogito ergo sum¹⁾。

他选择孤独，是因为他愿意并且只愿意在思考和理性的平台上和永恒无限的上苍对话。他寂寞地在陡峭的山路上推动巨石上山，有如那永远不得安息的东西弗斯。他过去是，现在是，将来也是！

但张益唐不是苦行僧，不是除了对数学和逻辑之外一切都视若无睹的科学怪人。他今天的成就，绝不是什么二十载寒窗一夜成名的醒世恒言，也更不是什么范进中举的闹剧。他是孤独的征服者，人类在享受他的成就的时候，不能不仔细去看他能够对我们有所启迪的人格和经历。

张益唐的爱好十分广泛。他热爱文学艺术，尤其对俄罗斯文学情有独钟。

¹⁾ “我思故我在”的拉丁文。

他曾手持伏特加，成章节地背诵普希金的诗句，大谈他对肖洛霍夫、契科夫、托尔斯泰、陀思妥耶夫斯基名著的评价和理解，令他学校里的俄国访问教授们目瞪口呆。他对中国古典文学，唐诗宋词过目成诵的能力，让我们这些所有认识他的朋友们自愧不如，甘拜下风。他能把陶渊明的桃花源记倒背如流，也许他们这两位孤独者千百年后心有灵犀，能在他们自己的宇宙空间中对话。多次我们海阔天空地大摆武侠龙门阵。华山论剑之后，他对武侠小说的高论，令人忍俊不禁。虽然每次都是我虚晃一枪，败下阵来。能让张益唐打破他惯有沉默的高招，就是和他聊武侠，他也从来不挂免战牌。所以我屡败屡战，屡教不改。

张益唐在北京大学学习期间接触了西洋古典音乐，从一听钟情到一发不可收拾。他能用他那略带生涩的男高音，羞羞答答地一遍又一遍地吟唱勃拉姆斯 D 大调小提琴协奏曲的第二乐章主题，然后不无赞叹地说：“太美了，他（勃拉姆斯）怎么能写出这么隽永的旋律来！”去年在我家第一次听斯特拉文斯基的“春之祭”，在最后一个和弦嘎然而止之后，他老兄把杯中的苏格兰威士忌一饮而尽，大呼过瘾。

有一次他半夜打电话来说他那天把海菲兹和奥伊斯特拉赫演奏的柴可夫斯基 D 大调小提琴协奏曲听了 N 次，辗转反侧，夜不能寐，要和我聊音乐。说着说着就在电话里唱了起来。我对他开玩笑说：“老兄是个少有的音乐天才，当数学家真是委屈了阁下大才。有如孙猴子当了弼马温，一朵鲜花插在了牛粪上，当如是！”电话那边，长时间的沉默……

张益唐博闻强记，他对历史、哲学、政治有超乎常人的兴趣。最令人难忘的是他的惊人的理解力和记忆力。多少次在灯前月下，一杯波尔多红酒下肚，滔滔不绝地纵论古今中外、哲学历史、时事政治。他能把时间、地点、事件和人物，从起因到结果像百科全书般地展现在你面前，分毫不差。娓娓道来之时，不无自负地说：“怎么样，我的记忆力还好吧？”

但是张益唐对洞明世事人情文章的讨论毫无兴趣，每当朋友们聚会聊俗事的时候，他马上老僧入定，一个人默默地坐在一旁。他会把他自己约减成宇宙大爆炸之前的那个奇点，似乎时间空间对他都已不存在，所有面前发生的一切都失去了任何存在的理由和意义，如入无人之境。对他这种在芸芸众生看来无法原谅的孤傲不群，我也旁敲侧击地暗示过他。他马上就会把聚会中发生了什么，谁说了什么，以及每个人坐的位置全部给你说一遍。而且数年之后，只要你高兴，他可以再给说一遍。我一直也弄不懂史蒂芬·霍金的《时间简史》到底说了些什么。但有一点我是明白的，就是宇宙间有一种看不见摸不着的东西叫黑洞，其强大的吸引力使光都跑不出来。张益唐的记忆力，也是那看不见摸不着的该天杀的黑洞。

张益唐是一个不折不扣的美国篮球迷。对 NBA, NCAA 的经典战役, 他了若指掌。他能如数家珍般地说起每分钟发生的每个细节。他的忠义堂上排排坐的有飞人乔丹、大鸟伯德、天钩贾巴尔、魔术师约翰逊、大梦奥拉朱旺、刺客托马斯、邮差马龙、白煞斯托克顿、石佛邓肯……

他是杜克大学蓝魔球队的忠实粉丝, 他非常崇拜该队的 K 教头。每当杜克大学荣登榜首, 我一定会打电话去祝贺一番, 如果事与愿违, 蓝魔遭了天谴, 铩羽麦城, 我也会打电话假惺惺地唱一出卧龙吊孝。杜克大学比赛到关键时分, 他老兄是照例关上电视, 选择孤独, 然后第二天战战兢兢地看战报。数学家、数学奇才、数学大师、数学宗师张益唐, 童心未泯如此。

张益唐和我从来不谈他的私事, 但我知道他也曾几何时数度断肠。仅仅一次, 三杯老酒之后, 憨态可掬, 居然拍案而起地给我讲了一段伤心事, 然后愤愤不平地说: “谁说我张益唐不好色?”

张益唐和我也从来不谈钱财之事。但我知道他是个少有的慷慨的人。他不止一次地帮助过朋友。他不是宋押司, 给李逵银子是因为江州府上人人都怕黑旋风, 怕老大斧头砍他娘。他帮助朋友是因为朋友需要帮助。他请他的学生们吃饭, 沽酒宰羊, 亲自下厨烧八道江南名菜外带张记油炸花生米。他选择孤独, 但从来不是远庖厨的君子。

张益唐需要闭关, 需要和老天对话, 需要孤独, 需要自我放逐。我家就是他的选择之一。去年暑假请他到我家来给我上高中的儿子开蒙微积分, 这是他十几年前就说好了的。于是打电话给他: 老友无恙, 但小儿需要开蒙, 家中亦有葡萄陈酿需要开封。青梅煮酒, 洛矾山论剑, 顺便来给我每年一度的七月四日美国音乐会捧场。我和内子洒扫庭除, 恭候羽驾。益唐二话没说就答应了。我到丹佛机场去接他, 数年不见, 依然是青衣小帽, 无失书生本色。老友重逢, 寒暄一番, 不在话下。是夜秉烛长谈, 分享他的生活, 他的思索, 他的孤独, 他的(精神上的)富有。感受、嗅闻、收集、意犹未尽地谈到下半夜。

张益唐的妻子叫海伦, 印象中是个很活泼漂亮的女孩子。他们没有孩子, 但是他非常喜爱孩子。他对大部分中国父母对孩子的管制非常不以为然。他认为管教不是教育, 这种老式的方法只会摧残孩子的好奇心和创造力。而这是孩子们健康成长中最最不可缺的。

今年五月初, 他打电话给我说他对我的孩子有一种教育他们的责任感, 希望再到我这里来闭关。五月十四号我打电话给他, 我还不知道他已经十三号在哈佛大学演讲了他在孪生素数猜想这个困惑了人类两千多年的难题上做出的重大突破。他只对我说他有个研究要做, 很抱歉他不能来了。只字未提他这震撼世界的成就。

当另外一位多年老友十七号通知我益唐破译孪生素猜想这个震惊世界科学界的消息后，我不禁热泪盈眶，踊跃三百……我马上打电话去向他祝贺。他还是像以往那么淡定，说：“哦，你也知道了。”他告诉我他是在我家的时候把这个八卦阵破了的。那天是七月三号，他要去看我排练，我说我们二十分钟以后走，他到我们院子里去抽根烟，去看是否鹿又来了。（我们院子里经常会有不请自来的鹿群。去年院子里的杏树上果实累累，被这帮不速之客们吃了个一干二净。）这破解孪生素数的关键就是那二十分钟里，有如神明启示一般地想出来的。他到我这里来，身上没带一本书，没有任何资料，他也不用电脑。这似乎是个奇迹，但细细想来，这是张益唐多年求索的结果，西西弗斯的石头在光辉的顶峰上昂然屹立。这是上苍对他选择孤独的一次回报。



齐雅格家的后院，张益唐获得灵感的地方。

张益唐在哈佛的演讲，座无虚席，连过道上都站了人。请他的邀请信从世界各地有如过江之鲫，像雪片一样向张益唐——这个羞怯的孤独者飞来。正所谓：杏花红十里，状元马如飞。世界总是爱奖赏那些有幸的成功者，而对那些开始为伟大的工作而流血流泪流汗的多余人报以白眼，不屑一顾。在大多数缺乏信念和勇气的人群中，像张益唐这样敢于选择孤独面对孤独并且尊重孤独的少数，人们总是会以成败论英雄的。人们需要把这些成功者的事迹写成书，唱成戏，编成演义，变成传奇，好像不这样我们就不能获得对自

己的信心和对追求理念的勇气。我们可曾想过，当西西弗斯的石头再次从山头滚到山底，他的眼神该是多么怅然若失，我们是否能听到他内心的呼天抢地？我们不知道，但是否可以猜想，在这个相信“英雄出少年”的文化炒作中：张益唐，这个已过“知天命”的边缘数学天才，是否也曾对自己的“超凡脱俗”和“独立不群”的气质和选择怀疑过？对于命运的残酷捉弄，对于又滚到山下的石头，是否每天都会像圣者那么坦然？

人们崇拜成功，崇拜天才，但又对天才狂妄无礼。两年前，中国科学院邀请张益唐回国讲学。领馆官员无法理解这个离成功只有咫尺的人，为什么二十年没有回国，请张益唐做出一个书面解释。张益唐，这个从来不发脾气的老好人，拂袖而去！今天这些向张益唐发出热情的邀请函的大学，是否也曾几何时彬彬有礼地把张益唐拒之门外？

命运女神推崇成功，渺小的求索者们在她的节目单中是无关紧要的，他们似乎要被遗忘，有如西西弗斯一样，任何努力都是徒劳无功和枉费心机。但是你一旦成功，她就会在你成功的光环下奴颜婢膝。我相信张益唐也眺望、渴望成功，为解答那些迷惑人类千年的古老猜想，他选择了在孤独中、在默默无闻中上下求索。然而无论何等超凡努力绝不保证成功。但除此之外，别无他路。在地道打通之前，面前永远是一片黑暗。精疲力尽，死去活来。张益唐在美国的经历可以佐证。在这个世界上还有很多很多像张益唐这样的好人，选择孤独的好人。对他们，我希望：坚持孤独，必得正果！在我们为张益唐庆贺的同时，给选择孤独的求索者们一份应有的敬意和尊重。

何为好数学？

上野健尔

译者：杨宝山、叶玲

上野健尔 (Kenji Ueno)，著名代数几何学家，京都大学数学系名誉教授，日本数学协会会长，关孝和数学研究所所长。

引言

好数学之含义随数学之发展一直在变化着，此话题亦和好教科书与好老师相关。我想从以下几个观点来论述。

复数和复分析

何为好数学？可以分为两种不同类型：针对学习而言，何为好数学；以及针对研究而言，何为好数学。当然，此两种类型亦是彼此相关联的。好数学之概念随数学之发展一直在改变。例如，虚数是卡尔达诺 (Cardano, 1501—1576) 在其名著《大术》(*Ars Magna*) 中首次引入的。为了求解两个数，其和、其积依次为 10、40，而引入虚数（第 37 章，法则 2），这令当时数学家很困惑。卡尔达诺本人对于虚数的实际意义也很犹豫，他写道：

“虚数就是这样可以像通常一样进行算术运算，这些令人感到神秘的最后结果犹如其名，真是又精致又不中用。”

奇怪的是，虽然《大术》主要致力于 3 次方程和 4 次方程的解法，但是他却没有考虑 3 次方程的虚数解，从而使他错过了发现虚数的重要性和有用性。不久，邦贝利 (Bombelli, 1526—1572) 受卡尔达诺著作的激励，利用虚数完整地发展了 3 次方程理论。甚至，他用虚数还发现常用数的一些奇怪表

达式，譬如

$$4 = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i},$$

其中 i 是虚数单位。因为

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i, \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i,$$

两边开立方便知，上述等式成立。

邦贝利的著作《代数》(*L'Algebra*) 在整个欧洲数学家中受到广泛重视，其著作明确呈现出虚数在解代数方程中的重要性。但是，却没有多少数学家愿意接受虚数确实是数。

欧拉 (Euler, 1707—1783) 是个例外。他自由地使用复数并发现一些优美公式，譬如

$$e^{2\pi i} = 1.$$

即使欧拉已经发现许多关于复数的有趣结果，仍然很少有数学家认识到复数是数。因此，在 1799 年，高斯 (Gauss, 1777—1855) 写作他的关于代数基本定理的论文，此文陈述了任何具有复系数的方程在复数范围内均有一个根的理论，他避免了利用复数来陈述代数基本定理。取而代之，他将定理改写为，任何具有实系数的方程均可以分解为 1 次、2 次不可约多项式的乘积。

完全意识到复数之重要性是在柯西 (Cauchy, 1789—1857) 发现复变函数论 (复分析) 和黎曼 (Riemann, 1826—1866) 建立代数函数论以及黎曼曲面论之后的事。经过 300 余年，几乎所有数学家才认识到复数确实是数。

故事还在继续，在 20 世纪 30 年代量子力学诞生时，物理学家发现复数的使用是非常关键的。如此一来，复数不仅在数学的许多不同领域扮演着重要角色，在物理学依然如此。现在，复分析学已经成为最漂亮的数学学习课题之一。

可以想象，在高斯的时代就很难说，涉及复数的数学是好数学。你必须在数学上有好的直觉和鉴赏力才行。因此，历史上仅有柯西和黎曼才会深入研究复数。这告诉我们，可供研究的好数学实际上依赖于不同的人。只有随后的数学发展才能证明你当初的选择成功与否。这也告诉我们，只要你对某个课题非常感兴趣，它对你来说就是好数学。

好教科书

另一方面，可供学习的好数学就是学习时必须选择好课题。当然，找到相关的好教科书是非常重要的。我想强调一下，没有适合所有人的好教科书。