

初級混合算學

新 中 學 教 科 書

初級混合法算學

第 四 冊

編 者
江 寧 張 鵬 飛

校 者
無 錫 華 襄 治

中 華 書 局 印 行

幾何學史略

幾何學創於埃及，成於希臘；埃人希人，均爲發明斯學者也。

埃人築室量地，頗具幾何學之思想；惟恃經驗，不尚推理，造詣淺而進步微耳。希臘七賢之一Thales(西元前640—548)，受之於埃及僧侶；始依科學方法研究，創演繹證法，並發明諸直線要理：如(1)二等邊三角形之底角相等，(2)對頂角相等，(3)底邊及兩底角已知，則三角形可定，(4)互等角三角形之對應邊成比例，皆出於Thales者也。Pythagoras(約西元前580—500)，

Hippocrates(約西元前五世紀)，Plato(西元前429—348)，Eudoxus(西元前408—355)諸大家，復承Th-

ales後,悉心闡發,不遺餘力;斯學遂日有進步矣。

Hippocrates首撰 Elements,爲幾何學教科書之鼻祖;其後 Leon, Thedius, 皆有此種著作,名亦相同。 Euclid (西元前三四世紀)之 Elements, 晚出而最完備,全書皆合邏輯;前出者均廢,惟此書獨步至今。 當 Euclid 之時,立體幾何學尙未發達,原書十三卷中,平面部居五之四;明徐光啟清李善蘭所譯之幾何原本十五卷,其後二卷續自他人,所以補立體部之缺者也。 西校刪改此書,增補符號,沿用二千餘年,稱爲善本;我國亦賴其傳入,斯學始有專書;故全球皆視爲至寶焉。

新中學教科書

初級混合法算學第四冊

目次

第一編 公式集

	頁數
第一章 恒等公式	1—3
第二章 相等公式	3—8

第二編 析約式法

第一章 依配分公理之析法	9—11
第二章 依特積公式之析法	11—18

第三編 有理分式演算法

第一章 四則	19—23
第二章 方根	23—25
第三章 分方程式	25—31

第四編 比例綫段

第一章 綫段之比率	32—36
第二章 比例綫段及等綫段	36—43

第五編 似三角形及倚數

第一章	似三角形.....	44—50
第二章	代數倚數.....	50—59
第三章	三角倚數.....	59—63

第六編 不等式

第一章	不等式之加減	64—69
第二章	不等式之乘除	69—71
第三章	不等方程式	71—76

第七編 代數方程式組之各解法

第一章	一元一次方程式解法	77—80
第二章	一元二次方程式解法	80—84
第三章	二元一次方程組解法	84—89
第四章	應用問題解法	89—95

第八編 解及證之推求

算學史略 疇人小傳

複利表 三角倚數表

新中學教科書

初級混合法算學

第四冊

第一編

公式集

第一章 恒等公式

1. 加減公式.

(甲) $a + b \pm c = a \pm c + b$. (甲') $a - b \pm c = a \pm c - b$.

(乙) $a + b \pm c = a + (b \pm c)$. (乙') $a - b \pm c = a - (b \mp c)$.

【注意一】 凡表若干個數公同關係之式，皆曰公式。

【注意二】 各公式任何字母，皆可以他式代之，

第一習題 A.

1. 上四公式各表何節之理？
2. 試以 $-b$ 代(甲)(乙)式之 b ，與(甲')(乙')式比較。
3. 若(甲)(乙)(甲')(乙')四式之 $a=0$ ，則若何？
4. 試舉此四公式之效用。

2. 乘除公式一.

$$\begin{aligned}
 (\text{甲}) \quad a \times b \div c &= a \div c \times b. & (\text{甲}') \quad a \div b \div c &= a \div c \div b. \\
 (\text{乙}) \quad a \times b \div c &= a \times (b \div c). & (\text{乙}') \quad a \div b \div c &= a \div (b \times c). \\
 (\text{丙}) \quad (a \pm b \pm c) \times d &= ad \pm bd \pm cd. \\
 (\text{丙}') \quad (a \pm b \pm c) \div d &= \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} \pm \frac{c}{d}.
 \end{aligned}$$

【注意】 $\div$ 表 $\times$ 或 $\div$.

第一習題 B.

1. 上六公式,各表何節之理?
2. 若 $a=0$,則此六式若何?
3. 若 $b=0$,則此六式若何?
4. 試舉此六公式之效用.

3. 乘除公式二.

$$(\text{甲}) \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(\text{甲}') \quad \frac{a^2 \pm 2ab + b^2}{a \pm b} = a \pm b.$$

$$(\text{乙}) \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$(\text{乙}') \quad \frac{a^2 - b^2}{a \pm b} = a \mp b.$$

$$(\text{丙}) \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

$$(\text{丙}') \quad \frac{x^2 + (a+b)x + ab}{(x+a) \text{ 或 } (x+b)} = (x+b) \text{ 或 } (x+a).$$

$$(\text{丁}) \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(\text{丁}') \quad \frac{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}{a \pm b} = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(\text{戊}) \quad (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3.$$

$$(\text{戊}') \quad \frac{a^3 \pm b^3}{(a \pm b) \text{ 或 } (a^2 \mp ab + b^2)} = (a^2 \mp ab + b^2) \text{ 或 } (a \pm b).$$

第一習題 C.

1. 上十公式試以文言表之。
2. 若 $a=0$, 則此十式若何? 又 $a=1$, 則若何?
3. 若 a 及 b 皆等於 0 或 1, 則此十式若何?
4. 以 $-a$ 代 a , 則(丙)(丙')二式若何? 又以 $-b$ 代 b , 則若何?
5. 以 $-a$ 代 a , $-b$ 代 b , 則(丙)(丙')二式若何?
6. 試舉此十公式之效用。
7. $\frac{a^3+b^3}{a \pm b}, \frac{a^5+b^5}{a \pm b}, \frac{a^7+b^7}{a \pm b}, \frac{a^9+b^9}{a \pm b} = ?$
8. $\frac{a^2-b^2}{a-b}, \frac{a^4-b^4}{a-b}, \frac{a^6-b^6}{a-b}, \frac{a^8-b^8}{a-b} = ?$
9. 試由 7, 8 二題之答, 造二乘除公式。
10. 若 a 或 $b=1$, 則前二公式若何?

第二章 相等公式

4. 面積及體積之公式.

若 b = 正方形, 長方形, 平行四邊形, 三角形
底長尺數,

b, b' = 梯形二底長之尺數,

h = 上各形高之尺數,

r = 圓半徑或直圓柱底半徑長之尺數,

$\pi = 3.1416$ 或 $3\frac{1}{2}$,

$A_s, A_r, A_p, A_t, A_c, A_o$ = 上各形面積之平方尺數,

e = 正方體稜長尺數,

e, e', e'' = 長方體稜長尺數,

H = 正方體, 長方體, 直角柱, 直圓柱高之尺數,

P = 上各體底周長之尺數,

B = 上各體底面積之平方尺數,

L_o, L_r, L_p, L_s = 上各體側面積之平方尺數,

S_o, S_r, S_p, S_s = 上各體全表面積之平方尺數,

V_o, V_r, V_p, V_s = 上各體體積之立方尺數,

則(甲) $A_s = bh = b^2;$

(乙) $A_r = bh;$

(丙) $A_p = bh;$

(丁) $A_t = \frac{1}{2}bh;$

(戊) $A_d = \frac{1}{2}(b + b')h;$

(己) $A_o = \pi r^2;$

(庚) $L_o = PH = 4e^2;$

(辛) $L_r = PH = 2(e' + e'')e$ 或 $2(e'' + e)e'$ 或 $2(e + e')e'';$

(壬) $L_p = PH;$

(癸) $L_s = PH = 2\pi rH;$

(子) $S_o = PH + 2B = 6e^2;$

(丑) $S_r = PH + 2B = 2(ee' + ee'' + e'e'');$

(寅) $S_p = PH + 2B;$

(卯) $S_s = PH + 2B = 2\pi r(H + r);$

(辰) $V_o = BH = e^3;$

(巳) $V_r = BH = ee'e'';$

(午) $V_p = BH;$

(未) $V_s = BH = \pi r^2H.$

【注意】 諸公式中之諸字母，亦可表他長準量數面準量數體準量數。

第二習題 A.

1. 上列十八公式，試以文言表之。
2. 依此公式求實物之底面積，側面積，全表面積及其體積容積。
3. 設 $A_s = 38.5$, $b = 22$. 求 h .
4. 設 $S_r = 1306$, $e' = 11$, $e'' = 25$. 求 e .
5. 設 $L_s = 75\frac{3}{7}$, $B = 12\frac{4}{7}$, $r = 2$. 求 H . ($\pi = 3\frac{1}{7}$)
6. 設 $V_s = 75.3984$, $H = 6$. 求 r . ($\pi = 3.1416$)
7. 若 e, e' = 正方柱底稜，側稜長之寸數， L_s, S_s = 此方柱側面積，全表面積之平方寸數， V_s = 此方柱體積之立方寸數，則 L_s, S_s, V_s 與 e, e' 之關係式若何？
8. 若 a, b, c = 直角三角形二腰及斜邊長之分數，則 a, b, c 之關係式若何？
9. 圓柱形萬花筒一底半徑長 2 公分，高 6 公分。今以花紙糊其側面及一底面，需紙若干平方公分？ ($\pi = 3\frac{1}{7}$)
10. 繞正方田行 50 步，盡其一邊。每步長 2 尺。此田周長若干？對角線長若干？又二對角線所分之四份各若干？

5. 比及單利之公式.

$$(\text{甲}) \text{比率} = \frac{\text{前項}}{\text{後項}}$$

$$(\text{乙}) \text{分率} = \frac{\text{子數}}{\text{母數}}$$

$$(\text{丙}) \text{母子和} = \text{母數} \times (1 + \text{分率}).$$

(丁)母子差 = 母數 $\times$ (1 - 分率).

(戊)利銀圓數 = 本銀圓數 $\times$ 利率 $\times$ 期數.

(己)本利和圓數 = 本銀圓數 $\times$ (1 + 利率 $\times$ 期數).

【注意】 本利亦可不以圓計.

第二習題 B.

1. 存銀 1000 圓, 年利率 6 釐, 每期 1 年. 第 1 年終之單利銀及其本利和各若干圓? 第 1 年終之複利銀及其本利和各若干圓?

2. 前題第 2, 3, 4, 5, 6 年終之複利銀及其本利和各若干圓?

3. 試作求複利銀及其本利和之公式.

4. 試以公式表下各事:

(1) 由靜止下墜之物體, 其所行之公分數 (s), 等於 490 與所經秒數平方 (t^2) 之相乘積;

(2) 由靜止下墜之物體, 其所行之英尺數, 等於 16 與所經秒數平方之相乘積;

(3) 溫度不變時, 受 P 氣壓壓力之物體, 其體積數 V_p 與 P 之積等於受 P' 氣壓壓力時, 其體積數 $V_{p'}$ 與 P' 之積;

(4) 壓力不變時, t 度氣體之體積數 V_t , 等於其 0 度時體積數 V_0 之 $(1 + \frac{t}{273})$ 倍.

【注意】 體積數為體積所含體準量數之略, 其餘仿此.

5. 牛乳之重, 為其同體積水之 M 倍, 即其比重為 M .

原重 P 磅之牛乳,今因攪水,體積增 8% ,共重若干?

6. 火油之重,爲其同體積水之 $L\%$,即其比重爲 $\frac{L}{100}$.

原重 P 斤之火油,今因攪水,體積增 5% ,共重若干?

7. 山高 1020 英尺. 山巔有樹,高 4 英尺. 樹頂之葉墜至平地,須在若干秒後?

8. 1 立方尺空氣,自 60 度升至 70 度,其體積增至若干倍? 又自 60 度降至 50 度,則若何?

6. 三種溫度之關係式.

若 F =華氏表度數, C =攝氏表度數, R =列氏表度數,

$$\text{則(甲)} \quad F = \frac{9}{5}C + 32 = \frac{9}{4}R + 32;$$

$$\text{(乙)} \quad C = \frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{4}R.$$

第二習題 C.

化下攝氏表度數爲華氏表及列氏表度數:[1-4]

1. 水銀沸點 357 度,冰點 -39 度.
2. 酒精沸點 79 度,冰點 -131 度.
3. 氮之沸點 -181 度.
4. 氮之沸點 -194 度.

化下華氏表度數爲攝氏表及列氏表度數:

5. 番禺一月氣溫 55 度,七月 82 度.
6. 上海一月氣溫 36 度,七月 81 度.
7. 北京一月氣溫 24 度,七月 74 度.
8. 伊爾庫次克一月氣溫 -5 度,七月 66 度.

7. 經度與時刻之關係式.

若 L_a, L_m, L_s = 地方向東或西移之經度數, 分數, 秒數,

T_h, T_m, T_s = 時刻向前或後移之時數, 分數, 秒數,

則(甲) $L_a = 15T_h$, (乙) $L_m = 15T_m$, (丙) $L_s = 15T_s$.

第二習題 D.

1. $T_h = ? L_a, T_m = ? L_m, T_s = ? L_s$.

2. $L_a = ? T_h, L_m = ? T_m$.

3. $T_h = ? L_a, T_m = ? L_m$.

4. 赤道圈半徑約長 11458 里. 今在赤道圈上, 行 ±30 經度, 有若干里? 時刻較原地若何?

5. 若前題行至時刻移 ±1 時 30 分 45 秒之地, 距原地若干里?

6. 詳言公式之諸效用.

第二編

析約式法

第一章 依配分公理之析法

1. 析單項約式法.

先化欲析之式成 $(ad \pm bd \pm cd \pm \dots)$ 之形,後析出約式 a .

第一習題 A.

析下各式之質約式:[1-6]

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $3x^2 + 12x$. | 2. $a^2b - ab^2$. |
| 3. $bcs^3 - abcs$. | 4. $8x^3 - 4x^2 + 6x$. |
| 5. $a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)$. | 6. $ax(ax + by) - by(ax + by)$. |

求下諸式和,列成 x 降幂式,且併其同次項:[7-14]

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------|----------------|
| 7. ax, bx . | 8. $ax, -bx$. | 9. $-ax, bx$. |
| 10. $ax, bx + c$. | 11. $ax + b, -cx + d$. | |
| 12. $x^2 + ax, bx + ab$. | 13. $-ax + x^2, bx - ab$. | |
| 14. $bex + abx^2, -adx - cd$. | | |

求下諸式積,列成 x 降幂式,且併其同次項:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 15. $x + a, x + a, x + a$. | 16. $x + a, x + b, x + c$. |
| 17. $x + a, x + b, x + c, x + d$. | 18. $ax + b, cx + d, ex + f$. |

2. 析多項約式法一.

先化欲析之式成 $Ax \pm B$ 之形，後用 1 節法析之。

例題一：析 $x^2 + (a+b)x + ab$ 之質約式

$$\begin{aligned} x^2 + (a+b)x + ab &= (x+a)b + (x^2+ax) \\ &= (x+a)b + (x+a)x \\ &= (x+a)(x+b). \end{aligned}$$

$x+a, x+b$ 皆爲原式之質約式

例題二：析 $cx^2 + (a+b)cx + abc$ 之質約式

$$\begin{aligned} cx^2 + (a+b)cx + abc &= c[x^2 + (a+b)x + ab]. \\ &= c(x+a)(x+b). \end{aligned}$$

$c, x+a, x+b$ 皆爲原式之質約式

【注意】 凡析一式之質約式，宜先析出其單項者。

第一習題 B.

析下各式之質約式：

1. $x^2 - (a+b)x + ab.$
2. $y^2 + (c-d)y - cd.$
3. $y^2 - (c-d)y - cd.$
4. $z^4 - (c-d)z^2 - cd.$
5. $(z+h)^2 - (c-d)(z+h) - cd.$
6. $acx^2 \pm (bc+ad)x + bd.$
7. $acx^2 \pm (bc-ad)x - bd.$
8. $acx^2 \pm (bc-ac)x - bc.$
9. $(ab+cd)^2 + (ac-bd)^2$
10. $(ab+cd)^2 - (ac+bd)^2.$

3. 析多項約式法二.

先分欲析之式爲數部，後用 1 節法析之。

例題一：析 $a^2 + 2ab + b^2$ 之質約式

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a^2 + ab) + (ab + b^2) \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= (a+b)^2. \end{aligned}$$

$a+b, a+b$ 皆爲原式之質約式

例題二：析 a^2-b^2 之質約式

$$a^2-b^2=(a^2+ab)-(ab+b^2)$$

$$=a(a+b)-b(a+b)$$

$$=(a+b)(a-b).$$

$a+b, a-b$ 皆爲原式之質約式

例題三：析 $a^4+a^2b^2+b^4$ 之質約式

$$a^4+a^2b^2+b^4=[(a^4+a^2b^2)+(a^2b^2+b^4)]-a^2b^2$$

$$=[a^2(a^2+b^2)+b^2(a^2+b^2)]-a^2b^2$$

$$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$$

$$=[(a^2+b^2)^2+(a^2+b^2)ab]-[(a^2+b^2)ab+a^2b^2]$$

$$=(a^2+b^2)(a^2+b^2+ab)-ab(a^2+b^2+ab)$$

$$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).$$

a^2+ab+b^2, a^2-ab+b^2 皆爲原式之質約式

第一習題 C.

析下各式之質約式：

1. $a^3+a^2+a+1.$

2. $a^3-2a^2b+ab^2.$

3. $a^2b-2ab^2+b^3.$

4. $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$

5. $xy(a^2+b^2)-ab(x^2+y^2).$

6. $ab(x^2-y^2)-xy(a^2-b^2).$

7. $10x^2+(5+42)x+21.$

8. $5x^2+(5-2)x-2.$

9. $a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3.$

10. $a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3.$

11. $x^2\pm 1, x^3\pm 1, x^4\pm 1, x^6\pm 1, x^8\pm 1.$

12. $x^4+x^2y^2+y^4, a^4x^4+a^6x^2y^2+a^8y^4.$

第二章 依特積公式之析法