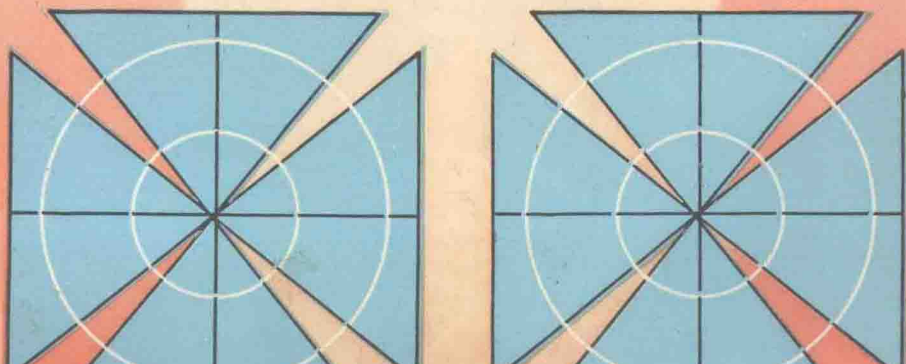
工程數學

編著者

楊精松　莊紹容　任如意

劉義斌　陳俊成



東華書局印行

工程數學

編著者

楊精松 莊紹容 任如意

劉義斌 陳俊成

東華書局印行

中華民國七十一年一月初版
中華民國七十四年四月增修二版

大專用書 **工程數學**

定價 新臺幣貳佰陸拾元整
(外埠酌加運費滙費)

編著者 楊精松 莊紹容 任如意
劉義斌 陳俊成

發行人 卓 鑫 淼

出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481

印刷者 合 興 印 刷 廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(71002)

序 言

本書乃依據民國 72 年部頒課程標準編輯而成，所有數學名詞均以部頒為準。只要是修完初等微積分課程的一般大專學生，欲學習工程數學者，皆可適用。全書對各項觀念的介紹，不但簡單明瞭而且準確。使學習者在嚴謹的數學方法要求下，能理解思路轉折處的關鍵，培養出推理，解題及演算能力。

由於數學在工程科學中日益重要，學習者本身應該對數學理論與實際應用兩者之間密不可分的關係有著深切的體會，進而了解如何應用數學方法於工程問題的解答，以求更大的發展與突破。

編者等對於工程數學皆有實際的教學經驗及心得，深知學生的心理及需要，故在編排上力求條理分明，循序漸進；並以豐富而具代表性的例題、習題相配合來強調與闡釋內容的重點，俾學習者能觸類旁通，事半功倍。

本書得以順利出版，除了要感謝許伯秋主任，熊華忠教授以及系上同仁的協助與指導，鼓勵與支持外；東華書局董事長卓鑫淼先生與總編輯徐萬善先生對本書的打字、印刷方面鼎力相助，使我們甚為感激。編者等才疏學淺，錯誤在所難免，敬祈各界學者先進大力斧正，以匡不逮。

編　者　謹識

中華民國73年

目　次

第一章　一階常微分方程式

1-1　引　言 …………………………………………………… 1
1-2　一般概念及定義 ……………………………………… 1
1-3　微分方程式之產生 …………………………………… 2
1-4　微分方程式之解和它的圖形 ………………………… 6
1-5　初期值問題，邊界值問題 …………………………… 9
1-6　分離變數法解微分方程式 …………………………… 19
1-7　齊次微分方程式 ……………………………………
1-8　含一次式之非齊次微分方程式 ……………………… 29
1-9　恰當（正合）微分方程式 …………………………… 34
1-10　積分因子 …………………………………………… 42
1-11　微分方程式積分因子之特殊求法 …………………… 46
1-12　一階線性微分方程式 ……………………………… 63
1-13　可化爲線性之微分方程式 ………………………… 72
1-14　一階微分方程式在幾何上之應用（正交軌曲線與斜交軌曲線）…………………………………………… 79
1-15　引起微分方程式之物理應用問題 …………………… 83

第二章　高階線性常微分方程式

2-1　微分算子符號D ……………………………………… 95
2-2　常係數齊次線性微分方程式 ………………………… 98
2-3　變係數齊次線性微分方程式 ………………………… 105
2-4　二階常係數齊次線性微分方程式之解法 …………… 111
2-5　高階常係數齊次線性微分方程式之解法 …………… 117

2-6 常係數非齊次線性微分方程式解的特性與特別積分 … 121
2-7 參數變換法求特別積分 ………………………… 129
2-8 反多項算子法求特別積分 ………………………… 136
2-9 二階微分方程式之應用 ………………………… 151

第三章 向量分析

3-1 向量代數 ………………………… 176
3-2 向量之微分 ………………………… 189
3-3 方向導數與梯度 ………………………… 200
3-4 向量之散度與旋度 ………………………… 206
3-5 向量之積分 ………………………… 212
3-6 散度定理及其應用 ………………………… 233
3-7 史托克定理及其應用 ………………………… 237

第四章 拉普拉斯變換

4-1 拉普拉斯變換與反變換 ………………………… 240
4-2 基本特性 ………………………… 250
4-3 部分分式法 ………………………… 257
4-4 拉氏變換的微分與積分 ………………………… 266
4-5 利用拉氏變換解微分方程式 ………………………… 271
4-6 t 軸上的移位 ………………………… 278
4-7 週期函數的變換 ………………………… 285
4-8 旋捲定理及其應用 ………………………… 291
4-9 拉氏變換在工程上的應用 ………………………… 296
4-10 拉氏變換表 ………………………… 307

第五章 符立爾級數

5-1 符立爾級數及歐勒公式 ………………………… 313

5-2 奇函數，偶函數及半幅展開式……………………………… 336
5-3 符立爾級數的應用……………………………………… 348
5-4 符立爾積分……………………………………………… 354

第六章 偏微分方程式

6-1 基本概念………………………………………………… 363
6-2 偏微分方程式的應用及其邊界值問題……………… 367
6-3 分離變數法……………………………………………… 374
6-4 拉普拉斯變換法………………………………………… 397

第七章 數值方法

7-1 誤差……………………………………………………… 407
7-2 非線性方程式的數值解法（疊代法）……………… 409
7-3 有限差分法……………………………………………… 417
7-4 內差法…………………………………………………… 421
7-5 值數微分與積分………………………………………… 429
7-6 常微分方程式的數值解法（一階及二階常微分方程式）
………………………………………………………………… 438
7-7 聯立線性方程式的解法………………………………… 445
7-7 最小平方法……………………………………………… 449

第八章 機率與統計

8-1 機率與統計……………………………………………… 453
8-2 隨機實驗，結果與事件………………………………… 454
8-3 機率的定義與基本定理………………………………… 457
8-4 條件機率與有關的定理………………………………… 465
8-5 排列與組合……………………………………………… 472

8-6 隨機變數，機率（密度）函數與累積分配函數……479
8-7 分配的期望值與變異數……497
8-8 二項分配與常態分配……506
8-9 樣本的圖示法與表示法，隨機抽樣……522
8-10 樣本平均值與樣本變異數……532
8-11 參數的估計……538
8-12 區間估計……550
8-13 假設的檢定……556

第 一 章

一階常微分方程式

1-1 引 言

在理工的應用上，微分方程式是最有效的工具之一。因爲在物理上，化學上，甚至於工程上，經常會碰見一些物理狀態，當我們將這些物理狀態轉換成數學方程式時，往往會發現在方程式中，含有一未知函數及其導函數，而非一般之代數方程式，於是就產生了微分方程式之觀念了。

1-2 一般概念及定義

若一方程式中含有未知函數的導函數或微分，則此方程式稱爲**微分方程式**（differential equation）。微分方程式可區分爲：

㈠僅包含一個自變數者，稱爲**常微分方程式**（ordinary differential equation）。例如：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+2y=\sin x \tag{1}$$

$$(xy-y^2)dx+x^2dy=0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+\frac{y}{x^2+1}=e^x \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\sin y=0 \tag{4}$$

$$y''' + xy'' + 2y(y')^3 + xy = 0 \tag{5}$$

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{6}$$

均為常微分方程式，其中 x 為**自變數**，y 為**因變數**。

(二)凡包含兩個以上之自變數者,稱為**偏微分方程式**（partial differential equation)，其中之導函數均為**偏導函數**（partial derivative）。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \tag{7}$$

$$x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + xy \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x^3 + y^3 \tag{8}$$

式中，x 與 y 為自變數，u 為因變數。

微分方程式之**次**（degree）係以該方程式中最高階導函數之乘**冪**（power）為基準。上例中，(1)，(2)，(4)，(5)皆為一次，(3)式則為二次。

微分方程式之**階**(order)係以該方程式中所包含之最高階導函數的階為基準。上例中(2)式為一階常微分方程式，(1)，(4)兩式為二階常微分方程式，(3)，(5)為三階常微分方程式，(6)式為 n 階常微分方程式，(7)式為二階之偏微分方程式，(8)式為三階之偏微分方程式。

形如 $b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \cdots\cdots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = R(x)$ 的微分方程式，稱為**線性微分方程式**（linear differential equation），如(1)式；否則，稱為**非線性微分方程式**(non-linear differential equation)。如(2)，(3)，(4)，(5)等皆屬之。

1-3　微分方程式之產生

㈠消去方程式中之任意常數產生微分方程式：

微分方程式可由**原函數**（primitive）利用微分而消去其中之常數而產生。因此，若想由原函數中消去一個任意常數，僅需作一次微分。欲消去兩個任意常數，則需作二次微分。當然，欲消去原函數中之任意 n 個常數，需作 n 次微分。因此，原函數中之任意常數之個數應與所產生之微分方程式之階數相等。

例題1：假設 a 爲任意常數，試從 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 中，導出一最低階微分方程式。

解：將原方程式對 x 微分得

$$2(x-a)+2yy'=0$$

解得 $a=x+yy'$，再代入原方程式，則求得

$$(yy')^2+y^2=(x+yy')^2$$

或

$$(x^2-y^2)dx+2xydy=0$$

例題2：假設 c_1 與 c_2 皆爲任意常數，試從 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ 中，導出一最低階微分方程式。

解：由連續微分二次得

$$y'=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}$$

或

$$-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}-y'=0$$

$$y''=c_1e^{-x}+4c_2e^{2x}$$

或 $$c_1e^{-x}+4c_2e^{2x}-y''=0$$

故得 $y''-y'-2y=0$ ，其爲所求之微分方程式。

㈡解析式產生微分方程式：

例題3：設過曲線 C 上任意點 $P(x,y)$ 之切線垂直於該點之動徑，試以解析式表示之。

解：過此曲線上任意點切線之斜率爲

$$m_1=\tan\tau=\frac{dy}{dx}$$

而同點動徑之斜率爲

$$m_2=\tan\theta=\frac{y}{x}$$

因二直線相互垂直，其斜率互爲倒數。故有

$$m_1=-\frac{1}{m_2}\ ,$$

即 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\ ,$$

或 $$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$$

此一階微分方程式爲表示曲線 C 之性質之解析式。以後我們學得此微分方程式之解法後，可得其解爲

$$x^2+y^2=k^2$$

其乃一以原點爲中心，半徑爲 k 之圓（見圖1-1）。

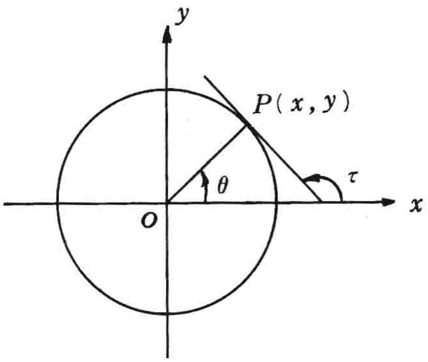


圖 1-1

例題 4：有一簡單擺錘，其長度爲 l ，與垂直線交角爲 θ（如圖 1-2 所示），當其前後擺動時，其運動方程式（忽略空氣阻力及摩擦）可表示爲一以時間 t 當自變數之二階微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

其中 g 爲重力加速度。

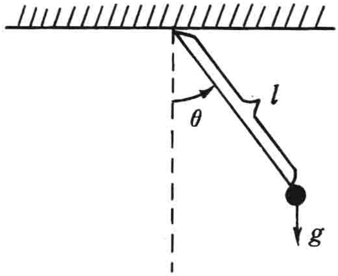


圖 1-2

例題 5：設一質量爲 m 之物體，受外力 F 作用沿一直線運動，其在 t 時刻之位置爲 x（如圖 1-3 所示），則按牛頓第二定律可寫出此物體運動之方程式爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

此爲未知數 x 之二階微分方程式。

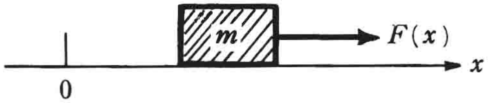


圖 1-3

1-4 微分方程式之解和它的圖形

由常微分方程式所求出原因變數與其自變數間之關係，可用**顯函數** $y=f(x)$ 表示，亦可以用**隱函數** $F(x, y)=0$ 表示，皆稱爲**微分方程式之解**。通常我們習慣以微分方程式之**顯函數解**或**隱函數解**稱之。一般而言，常微分方程式之解所包含任意常數之數目，應該等於該微分方程式之階數。一個 n 階常微分方程式的解若包含 n 個常數，則稱爲該微分方程式之**通解**（general solution）。若由通解中，指定任意常數的值，所求得之解，稱爲微分方程式之**特解**（particular solution)。有關一階常微分方程式之通解，一般可以寫成

$$y=f(x, c) \quad \text{或} \quad F(x, y, c)=0 \qquad (a)$$

c 爲任意常數。凡自通解求特解，需另外再加一個條件，例如：

$$y(x_0)=y_0 \quad \text{或} \quad y_0=f(x_0, c) \qquad (b)$$

式中 x_0 及 y_0 爲其特定已知值，(b) 式表示當 $x=x_0$ 時，$y=y_0$。利用 (b) 式，可由 (a) 式中，求得 c 之值，故 (b) 式稱爲**初期值條件**（initial condition）。有時，微分方程式之解除通解和特解之外，另外存在一種解，而此種解不能由初期值條件從通解中來確定，這樣的解稱爲微分方程式之**奇異解**（singular solution）。

我們由上面的討論知,常微分方程式之解是一函數，它的圖形我們

稱爲**積分曲線**，通常的圖形在坐標平面上是由無數曲線組成的，叫做**積分曲線族**。偏微分方程式的解，如果是兩個變數的函數，它的圖形將是三維空間的**曲面**。

例題1：試證明 $y=\ln x$ 爲微分方程式 $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0$ 在區間 $(0,\infty)$ 中之解，但在區間 $(-\infty,\infty)$ 中則不爲其解。

解：因 $y=\ln x$ 之定義域爲 $(0,\infty)$，故有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}$$

代入已知方程式之左端，得

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=x\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=0$$

因函數 $y=\ln x$ 可滿足微分方程式，故其爲微分方程式在區間 $(0,\infty)$ 中之解。又因對數函數在區間 $(-\infty,\infty)$ 爲無定義，故 $y=\ln x$ 在區間 $(-\infty,\infty)$ 中並非微分方程式之解。

例題2：若 c_1 與 c_2 爲任意常數，試證明 $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$ 爲微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ 之解。

解：因 $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$，對 x 連續微分二次得

$$\frac{dy}{dx}=2c_1\cos 2x-2c_2\sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4c_1\sin 2x-4c_2\cos 2x$$

代入微分方程式之左端，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=(-4c_1\sin 2x-4c_2\cos 2x)$$
$$+4(c_1\sin 2x+c_2\cos 2x)$$
$$=0$$

因此 $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$ 滿足已知之微分方程式，故爲其解。

例題 3：試求函數 $y=cx+c^2$，$y=x+1$ 及 $y=-\frac{x^2}{4}$ 與微分方程式 $(\frac{dy}{dx})^2+x\frac{dy}{dx}-y=0$ 之關係。

解：(i) 由 $y=cx+c^2$ 微分之，求得 $\frac{dy}{dx}=c$，代入已知方程式之左端，得

$$(\frac{dy}{dx})^2+x\frac{dy}{dx}-y=c^2+cx-(cx+c^2)=0$$

於是 $y=cx+c^2$ 滿足原微分方程式，且 c 爲任意常數，故 $y=cx+c^2$ 爲微分方程式之通解。

(ii) 由 $y=x+1$ 微分之，得 $dy/dx=1$，代入原方程式之左端，則 $y=x+1$ 能滿足原方程式，故知 $y=x+1$ 爲微分方程式之一解，但此解可由通解 $y=cx+c^2$ 中指定 $c=1$ 而得，故 $y=x+1$ 爲微分方程式之一特解。

(iii) 由 $y=-\frac{x^2}{4}$ 微分之，得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2}$，代入原方程式之左端，得

$$(\frac{dy}{dx})^2+x\frac{dy}{dx}-y=(-\frac{x}{2})^2+x(-\frac{x}{2})-(-\frac{x^2}{4})$$
$$=\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}=0$$

於是 $y=-x^2/4$ 滿足原微分方程式，故爲微分方程式之解。但此解因不含任意常數，且不能由其通解中指定一個 c 值而求得，故爲微分方程式之奇異解。

1-5　初期值問題，邊界值問題

㈠ **初期值問題**：在上一節中，我們已討論過什麼叫做微分方程式之初期值條件。現在我們想再來研究一下，什麼叫做**初期值問題**（initial-value problem）。

首先我們考慮一個一階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

(1) 式中之 $f(x,y)$ 爲在 xy 坐標平面上某一定義域 R 中連續之函數；且 (x_0,y_0) 爲 R 中之定點，所謂 (1) 式之初期值問題，即在求 (1) 式之解 $y=\phi(x)$，其定義於含 x_0 之某一區間中，且能滿足初期值條件 $\phi(x_0)=y_0$。一般而言，初期值問題爲一微分方程式附加一初期值條件，可寫爲下列之形式：

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{2}$$

但對於一個 n 階微分方程式，

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{3}$$

因 (3) 式之通解應包含 n 個任意常數，故初期值問題可寫爲