高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 · 陈纪修、於崇华、金路等主编

数学分析

（第二版·上册）

同步辅导及习题全解

主 编 孙光亮

◆ 知识点窍 ◆ 逻辑推理 ◆ 习题全解

◆ 全真考题 ◆ 名师执笔 ◆ 题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

数学分析（第二版·上册）同步辅导及习题全解

主编　孙光亮

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社，陈纪修、於崇华、金路等主编的《数学分析（第二版·上册）》一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

本书共有八章，分别介绍集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括本章知识要点、知识点归纳、习题全解三部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《数学分析（第二版·上册）》课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析（第二版·上册）同步辅导及习题全解 / 孙光亮主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2013.11
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-1458-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①数学分析－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第288233号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 **数学分析（第二版·上册）同步辅导及习题全解**
作　者	主编　孙光亮
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　12.75 印张　314 千字
版　次	2013 年 11 月第 1 版　2013 年 11 月第 1 次印刷
印　数	0001—6000 册
定　价	19.80 元

前 言

陈纪修、於崇华、金路等主编的《数学分析(第二版·上册)》以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《数学分析(第二版·上册)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《数学分析(第二版·上册)》这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. **本章知识要点。** 每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

2. **知识点归纳。** 对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

3. **习题全解。** 教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2013 年 9 月

目录

contents

目 录

contents

第一章

集合与映射

本章知识要点

1. 了解集合的概念,掌握集合的运算;
2. 掌握无限集、有限集的概念,能证明集合可列;
3. 掌握映射和函数的概念,能证明简单函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性;
4. 掌握两个不等式的证明.

知识点归纳

集合

1. 集合的运算

(1)并:两个集合 S 和 T 的并是由 S 和 T 的元素组成的集合,记为 $S\cup T$,即

$$S\cup T=\{x\mid x\in S \text{ 或者 } x\in T\}.$$

(2)交:两个集合 S 和 T 的交是由 S 和 T 的公共元素组成的集合,记为 $S\cap T$,即

$$S\cap T=\{x\mid x\in T \text{ 并且 } x\in S\}.$$

(3)差:两个集合 S 和 T 的差是由属于 S 但不属于 T 的元素组成的集合,记为 $S\backslash T$,即

$$S\backslash T=\{x\mid x\in S \text{ 并且 } x\notin T\}.$$

(4)补集:S 是 X 的一个子集,则集合 S 关于 X 的补集定义为

$$S_X^C=X\backslash S.$$

2. 四则运算封闭性

(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A.$

(2)结合律　$A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D, A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D.$

(3)分配律　$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$. $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$.

(4)对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

映射与函数

1. 映射的定义

设 X,Y 是两个给定的集合，若按照某种规则 f，使得对集合 X 中的每一个元素 x，都可以找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，记为

$$f:X\to Y$$
$$x\to y=f(x).$$

其中 y 称为在映射 f 之下 x 的像，x 称为在映射 f 之下 y 的一个逆像(也称为原像). 集合 X 称为映射 f 的定义域，记为 D_f. 而在映射 f 之下，X 中元素 x 的像 y 的全体称为映射 f 的值域，记为 R_f，即

$$R_f=\{y\mid y\in Y\text{ 并且 }y=f(x),x\in X\}.$$

2. 单射与双射

设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，若 f 的逆像也具有唯一性，即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 y_1 与 y_2 也满足 $y_1\neq y_2$，则称 f 为单射；如果映射 f 满足 $R_f=Y$，则称 f 为满射；如果映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 是双射(又称一一对应).

3. 逆映射

设 f 是集合 X 到集合 Y 的单射，对应关系 $g:R_f\to X$，$y\to x(f(x)=y)$ 构成 R_f 到 X 上的一个映射，称之为 f 的逆映射，记为 f^{-1}，其定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，$R_{f^{-1}}=X$.

4. 函数的定义

若在定义 1.2.1 中特殊地取集合 $X\subset R$，集合 $Y=R$，则映射

$$f:X\to Y$$
$$x\to y=f(x)$$

称为一元实函数，简称函数.

5. 函数的简单特性

(1)有界函数

若存在两个常数 m 和 M，使函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in D.$$

则称函数 f 在 D 有界. 其中 m 是它的下界，M 是它的上界.

注意：当一个函数有界时，它的上界与下界不唯一. 由定义可知，任意小于 m 的数也是 f 的下界，任意大于 M 的数也是 f 的上界.

有界函数的另一定义是

存在常数 $M>0$，使函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in D$. 容易证明这两种定义是等价的.

(2)单调函数

对函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对任意 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时成立 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)<$

$f(x_2)$),则称函数 f 在 D 单调增加(或严格单调增加),通常记作 $f\uparrow$(或 f 严格 $\uparrow$);若对任意 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时成立 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 f 在 D 单调减少(或严格单调减少),通常记作 $f\downarrow$(或 f 严格 $\downarrow$).

(3)奇偶函数

设函数 f 的定义域 D 关于原点对称,即 $x\in D\Leftrightarrow -x\in D$. 若对一切 $x\in D$,成立 $f(-x)=f(x)$,则称函数 f 是偶函数;若对一切 $x\in D$,成立 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 f 是奇函数.

(4)周期函数

若存在常数 $T>0$,使得对一切 $x\in D$,成立 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 f 是周期函数,T 称为它的周期. 若存在满足上述条件的最小的 T,则称它为 f 的最小周期.

6. 两个常用不等式

(1)三角不等式

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

(2)平均值不等式

对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant n\Big/\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

等号当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全部相等时成立.

这就是说,算术平均值不小于几何平均值,几何平均值不小于调和平均值.

习题全解

习题 1.1 集合

1. 证明:由 n 个元素组成的集合 $T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 有 2^n 个子集

解题过程 由 k 个元素组成的子集的个数为 C_n^k,则 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=(1+1)^n=2^n$.

2. 证明:(1)任意无限集必包含一个可列子集;

(2)设 A 与 B 都是可列集,证明 $A\cup B$ 也是可列集.

解题过程 (1)设 T 是一个无限集,先取 $a_1\in T$. 由于 T 是无限集,必存在 $a_2\in T,a_2\neq a_1$. 再由 T 是无限集必存在 $a_3\in T,a_3\neq a_1,a_3\neq a_2$. 这样的过程可以无限地进行下去,于是得到可列集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,$S\in T$.

(2)设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$,则 $A\cup B$ 可表示为:

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}$$

3. 指出下列表述中的错误:

(1)$\{0\}=\varnothing$;

(2)$a\subset\{a,b,c\}$;

(3)$\{a,b\}\in\{a,b,c\}$;

(4)$\{a,b,\{a,b\}\}=\{a,b\}$.

解题过程 (1)$\{0\}$是由元素 0 构成的集合,不是空集.

(2)a 是集合$\{a,b,c\}$的元素，应表述为 $a\in\{a,b,c\}$.

(3)$\{a,b\}$是集合$\{a,b,c\}$的子集，应表述为$\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$.

(4)$\{a,b,\{a,b\}\}$是由 a,b 和$\{a,b\}$为元素构成的集合，所以$\{a,b,\{a,b\}\}\supset\{a,b\}$，但$\{a,b,\{a,b\}\}\neq\{a,b\}$.

4. 用集合符号表示下列数集：

(1)满足$\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$ 的实数全体；

(2)平面上第一象限的点的全体；

(3)大于 0 并且小于 1 的有理数全体；

(4)方程 $\sin x\cot x=0$ 的实数解全体.

解题过程 (1)$\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$.

(2)$\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$.

(3)$\{x\mid 0<x<1$ 且 $x\in Q\}$.

(4)$\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in z\}$.

5. 证明下列集合等式：

(1)$A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$；

(2)$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

解题过程 (1)设 $x\in A\cap(B\cup D)$，则 $x\in A$，并且或者 $x\in B$，或者 $x\in D$. 于是或者 $x\in A\cap B$，或者 $x\in A\cap D$.

即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，因此 $A\cap(B\cap D)\subset(A\cap B)\cup(A\cap D)$；

设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，则或者 $x\in A\cap B$，或者 $x\in A\cap D$. 于是 $x\in A$，并且或者 $x\in B$，或者 $x\in D$.

即 $x\in A\cap(B\cup D)$，因此 $A\cap(B\cup D)\supset(A\cap B)\cup(A\cap D)$.

所以 $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$.

(2)设 $x\in(A\cup B)^C$，则 $\overline{x}\in(A\cup B)$，即 $\overline{x}\in A$ 且 $\overline{x}\in B$，于是 $x\in A^C\cap B^C$，因此

$$(A\cap B)^C\subset A^C\cap B^C;$$

设 $x\in A^C\cap B^C$，则 $\overline{x}\in A$ 且 $\overline{x}\in B$，即 $\overline{x}\in A\cup B$，于是 $x\in(A\cup B)^C$，因此

$$(A\cup B)^C\supset A^C\cap B^C.\text{ 所以}(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

6. 举例说明集合运算不满足消去律：

(1)$A\cup B=A\cup C\not\Rightarrow B=C$；

(2)$A\cap B=A\cap C\not\Rightarrow B=C$.

其中符号“$\not\Rightarrow$”表示左边的命题不能推出右边的命题.

解题过程 (1)设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$.

(2)设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$.

7. 下述命题是否正确？不正确的话，请改正.

(1)$x\overline{\in}A\cap B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 并且 $x\overline{\in}B$；

(2)$x\overline{\in}A\cup B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 或者 $x\overline{\in}B$.

解题过程 (1)不正确. $x\overline{\in}A\cap B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 或者 $x\overline{\in}B$.

(2)不正确. $x\overline{\in}A\cup B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 并且 $x\overline{\in}B$.

习题 1.2 映射与函数

1. 设 $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. $T=\{a,b,c\}$. 问有多少种可能的映射 $f:S\to T$? 其中哪些是双射?

解题过程 有 $3^3=27$ 种可能的映射,其中有 $3!=6$ 种是双射,它们是

$$f:\begin{cases}\alpha\to a\\ \beta\to b\\ \gamma\to c\end{cases},f:\begin{cases}\alpha\to a\\ \beta\to c\\ \gamma\to b\end{cases},f:\begin{cases}\alpha\to b\\ \beta\to c\\ \gamma\to a\end{cases},f:\begin{cases}\alpha\to b\\ \beta\to a\\ \gamma\to c\end{cases},f:\begin{cases}\alpha\to c\\ \beta\to a\\ \gamma\to b\end{cases},f:\begin{cases}\alpha\to c\\ \beta\to b\\ \gamma\to a\end{cases}$$

2. (1)建立区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应;

(2)建立区间 $(0,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 之间的一一对应.

解题过程 (1) $f:[a,b]\to[0,1]$

$$x\to y=\frac{x-a}{b-a}.$$

(2) $f:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$

$$x\to\tan\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi=-\cot(\pi x).$$

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数,并指出定义域与值域:

(1) $y=f(u)=\log_a u$, $u=g(x)=x^2-3$;

(2) $y=f(u)=\arcsin u$, $u=g(x)=3^x$;

(3) $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u=g(x)=\sec x$;

(4) $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

解题过程 (1)定义域:$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$,值域 $(-\infty,+\infty)$;

(2)定义域:$(-\infty,0]$,值域:$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(3)定义域:$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,值域 $[0,+\infty)$;

(4)定义域:$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$,值域 $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; (2) $y=\dfrac{1}{3}\log_a{}^3(x^2-1)$.

解题过程 (1) $y=\arcsin u$, $u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$, $v=x^2+1$;

(2) $y=\dfrac{1}{3}u^3$, $u=\log_a v$, $v=x^2-1$.

5. 求下列函数的自然定义域与值域：

(1) $y=\log_a \sin x(a>1)$；

(2) $y=\sqrt{\cos x}$；

(3) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{x^2+1}{x^4}$.

解题过程 (1)定义域：$\bigcup\limits_{k\in Z}(2k\pi,(2k+1)\pi)$，值域：$(-\infty,0]$；

(2)定义域：$\bigcup\limits_{k\in Z}\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，值域：$[0,1]$；

(3)定义域：$[-4,1]$，值域：$\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$；

(4)定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域：$\left[\dfrac{3^3\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同？

(1) $f(x)=\log_a(x^2)$，$g(x)=2\log_a x$；

(2) $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$，$g(x)=1$；

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$.

解题过程 (1)不等同；(2)不等同；(3)等同.

7. (1)设 $f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$，求 $f(x)$；

(2)设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$，求 $f(x)$.

解题过程 (1)令 $x+3=t$，则 $x=t-3$，代入等式，得：

$f(t)=2(t-3)^3-3(t-3)^2+5(t-3)-1=2t^3-21t^2+77t-97$.

所以 $f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$；

(2)令 $\dfrac{x}{x-1}=t$，则 $x=\dfrac{t}{t-1}$，代入等式，得：

$$f(t)=\frac{\frac{3t}{t-1}-1}{\frac{3t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1}\text{，所以 } f(x)=\frac{2x+1}{4x-1}.$$

8. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f\circ f, f\circ f\circ f, f\circ f\circ f\circ f$ 的函数表达式.

解题过程 $f\circ f=\dfrac{x+1}{x+2}$；$f\circ f\circ f=\dfrac{x+2}{2x+3}$；$f\circ f\circ f\circ f=\dfrac{2x+3}{3x+5}$.

9. 证明：定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

解题过程 显然 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 是偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 是奇函数

而 $$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

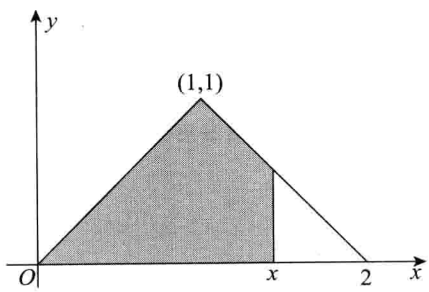
10. 写出折线$\overline{ABCD}$所表示的函数关系$y=f(x)$的分段表示，其中$A=(0,3)$，$B=(1,-1)$，$C=(3,2)$，$D=(4,0)$.

解题过程 $y=\begin{cases}-4x+3 & x\in(0,1)\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2} & x\in(1,3)\\ -2x+8 & x\in(3,4)\end{cases}$

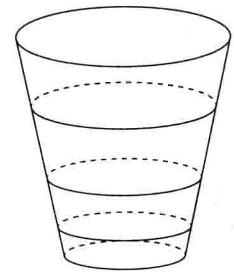
11. 设$f(x)$表示教材图 1.2.8 中阴影部分面积，写出函数$y=f(x)$，$x\in[0,2]$的表达式.

解题过程 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & x\in(0,1)\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-1 & y\in(1,2)\end{cases}$

12. 一玻璃装有汞、水、煤油三种液体，密度分别为 13.6 g/cm^3、1 g/cm^3、0.8 g/cm^3（教材图 1.2.9），上层煤油液体高度为 5 cm，中层水液体高度为 4 cm，下层汞液体高度为 2 cm，试求压强P与液体深度x之间的函数关系.



教材图 1.2.8



教材图 1.2.9

解题过程 当$x\in[0,5]$时，只有煤油，$P(x)=0.8\times980x=784x$，

当$x\in[5,9]$时，有水，$P(x)=0.8\times980\times5+1\times980\cdot(x-5)=980x-980$；

当$x\in[9,11]$时，有汞，$P(x)=0.8\times980\times5+1\times980\times4+13.6\times980\cdot(x-9)=13328x-112112$.

则：$P(x)=\begin{cases}784x & x\in[0,5]\\ 980x-980 & x\in[5,9]\\ 13328x-112112 & x\in[9,11]\end{cases}$

13. 试求定义在$[0,1]$上的函数，它是$[0,1]$与$[0,1]$之间的一一对应，但在$[0,1]$的任一子区间上都不是单调函数.

解题过程 $f(x)=\begin{cases}x & x\text{ 为有理数}\\ 1-x & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

第二章

数列极限

本章知识要点

1. 理解实数的连续性，上、下确界的概念，深刻理解确界存在原理；
2. 深刻理解数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义，能用定义证明此数列的极限，掌握数列极限的性质及运算；
3. 理解无穷小(大)量的概念，能用 Stolz 定理证明某些未定型极限；
4. 理解有关实数系连续性定理的内容；逐步掌握灵活运用这些定理的技巧.

知识点归纳

实数系的连续性

确界存在定理(确界存在定理——实数系连续性定理)

非空有上界的数集必有上确界；非空有下界的数集必有下确界.

数列极限

1. 数列极限的定义：

设 $\{x_n\}$ 是一给定数列，a 是一个实常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到正整数 $\mathbf{N}$，使得当 $n>\mathbf{N}$ 时，成立

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a(或 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限)，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

有时也记为

$$x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果不存在实数 a，使$\{x_n\}$收敛于 a，则称数列$\{x_n\}$发散.

2. 收敛数列的基本性质：

(1)唯一性：收敛数列的极限必唯一.

(2)有界性：收敛数列必有界，有界数列未必收敛.

(3)保序性：设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均收敛，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a<b$，则存在正整数为 N，当 $n>N$ 时，成立

$$x_n<y_n.$$

(4)夹逼性：若三个数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$从某项开始成立

$$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n, n>N_0,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

3. 四则运算：

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(i)$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta b$($\alpha$，$\beta$ 是常数)；

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=ab$；

(iii)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{a}{b}$($b\neq0$).

无穷大量

1. 无穷大量的定义：

若对于任意给定的 $G>0$，可以找到正整数 N，使得当 $n>N$ 时成立

$$|x_n|>G,$$

则称数列$\{x_n\}$是无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty.$$

2. 定理一：

设 $x_n\neq0$，则$\{x_n\}$是无穷大量的充分必要条件是$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量.

3. 定理二：

设$\{x_n\}$是无穷大量，若当 $n>N_0$ 时，$\{y_n\}\geqslant\delta>0$ 成立，则$\{x_n,y_n\}$是无穷大量.

4. 定理三：

设$\{x_n\}$是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$，则$\{x_n,y_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量.

5. Stolz 定理：

设$\{y_n\}$是严格单调增加的正无穷大量，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_n}{y_n-y_n}=a$，($a$ 可以为有限量，$+\infty$与$-\infty$)，

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a.$$

收敛准则

1. 单调有界数列收敛定理：

单调有界数列必定收敛.

2. 闭区间套定理：

如果$\{[a_n,b_n]\}$形成一个闭区间套，则存在唯一的实数ξ属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，且$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

3. Bolzano—Weierstrass 定理：

有界数列必有收敛子列.

4. Cauchy 收敛原理：

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：$\{x_n\}$是基本数列.

习题全解

习题 2.1 实数系的连续性

1. (1)证明$\sqrt{6}$不是有理数；

(2)$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数？

解题过程 (1)反证法. 若$\sqrt{6}=\dfrac{m}{n}$，由$m^2=6n^2$，可知m偶数，设$m=2k$，于是有$3n^2=2k^2$，从而得到n是偶数，这里$\dfrac{m}{n}$是既约分数.

(2)$\sqrt{3}+\sqrt{2}$不是有理数. 若$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$，

于是$3+2\sqrt{6}+2=\dfrac{m^2}{n^2}$，$\sqrt{6}=\dfrac{m^2}{2n^2}-\dfrac{5}{2}$，即$\sqrt{6}$是有理数，与(1)的结论矛盾.

2. 求下列数集的最大数、最小数或证明它们不存在：

$A=\{x\mid x\geqslant 0\}$；

$B=\{\sin x\mid 0<x<\dfrac{2\pi}{3}\}$；

$C=\left\{\dfrac{n}{m}\mid m,n\in\mathbf{N}^+\text{ 并且 }n<m\right\}$.

解题过程 $\min A=0$，因为$\forall x\in A$，有$x+1\in A$，$x+1>x$，所以$\max A$不存在.

$\max B=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$；因为$\forall x\in B$，$\exists\alpha\in\left\{0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，使得$x=\sin\alpha$，于是有$\sin\dfrac{\alpha}{2}\in B$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}<x$，所以$\min B$不存在.

$\max C$与$\min C$都不存在，因为$\forall\dfrac{n}{m}\in C$，有$\dfrac{n+1}{m+1}\in C$，$\dfrac{n}{m+1}<\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+1}{m+1}$，所以$\max C$与$\min C$都不存在.

3. A,B 是两个有界集，证明：

(1)$A\cup B$ 是有界集；

(2)$S=\{x+y|x\in A,y\in B\}$ 也是有界集.

解题过程 (1)设 $\forall x\in A$，有 $|x|\leqslant M_1$，$\forall x\in B$，有 $|x|\leqslant M_2$，则 $\forall x\in A\cup B$，有 $|x|\leqslant \max\{M_1,M_2\}$.

(2)设 $\forall x\in A$，有 $|x|\leqslant M_1$，$\forall x\in B$，有 $|x|\leqslant M_2$，则 $\forall x\in S$，有 $|x|\leqslant M_1+M_2$.

4. 设数集 S 有上界，则数集 $T=\{x|-x\in S\}$ 有下界；且 $\sup S=-\inf T$.

解题过程 设数集 S 的上确界为 $\sup S$，则对任意 $x\in T=\{x|-x\in S\}$，有 $-x\leqslant \sup S$，即 $x\geqslant \sup S$；同时对任意 $\varepsilon>0$，存在 $y\in S$，使得 $y>\sup S-\varepsilon$，于是 $-y\in T$，且 $-y<-\sup S+\varepsilon$. 所以 $-\sup S$ 为集合 T 的下确界，即 $\inf T=-\sup S$.

5. 证明有界数集的上、下确界唯一.

解题过程 $\sup S$ 既等于 A，又等于 B，且 $A<B$，取 $\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$，因为 B 为集合 S 的上确界，使得 $x>B-\varepsilon>A$，这与 A 为集合 S 的上确界矛盾，所以 $A=B$，即有界数集的上确界唯一. 同理可证有界数集的下确界唯一.

6. 对任何非空数集 S，必有 $\sup S\geqslant \inf S$. 当 $\sup S=\inf S$ 时，数集 S 有什么特点？

解题过程 对于任意的 $x\in S$，有 $\inf S\leqslant x\leqslant \sup S$，所以 $\sup S\geqslant \inf S$. 当 $\sup S=\inf S$ 时，数集 S 是由一个实数构成的集合.

7. 证明有下界的数集必有下确界.

解题过程 设 $\{x_n\}$ 是一给定数列，a 是一个实常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到正整数 $\mathbf{N}$，使得当 $n>\mathbf{N}$ 时，成立

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a（或 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限），记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

有时也记为

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

如果不存在实数 a，使 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

8. 设 $S=\{x|x\in \mathbf{Q}$ 并且 $x^2<3\}$，证明；

(1)S 没有最大数与最小数；

(2)S 在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界与下确界.

解题过程 (1) $\forall \dfrac{q}{p}\in S,\dfrac{q}{p}>0$，则 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^2<3,\dfrac{q}{p}<2$，取有理数 $\gamma>0$ 充分小，使得 $\gamma^2+4\gamma<3-\left(\dfrac{q}{p}\right)$

于是 $\left(\dfrac{q}{p}+\gamma\right)^2=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+\gamma^2+\dfrac{2q}{p}.\gamma<\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+\gamma^2+4\gamma<3$，即 $\dfrac{q}{p}+\gamma\in S$，所以 S 没有最大数.

同理可证 S 没有最小数.

(2)反证法. 设 S 在 $\mathbf{Q}$ 内有上确界，记 $\sup S=\dfrac{n}{m}$（$m,n\in \mathbf{N}^+$ 且 m,n 互质），则显然有 $0<\dfrac{n}{m}$