理工社®

海天教育
HAITIAN EDUCATION

张宇考研数学黄皮书系列丛书
全国著名考研辅导机构推荐用书

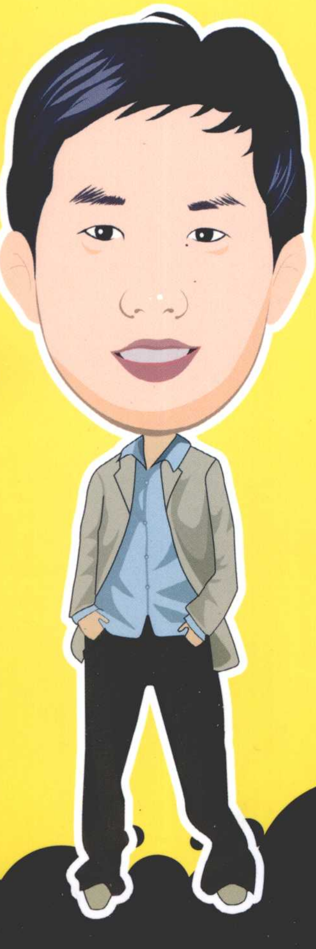
考研数学

2015

概率论与数理统计8讲

8 courses on Probability Theory and Math Statistics

组 编：海天鲲鹏数学研究院
主 编：张新 张宇



人生重要的
不是所站的位置，
而是所努力的方向！

@宇哥考研

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学
概率论与数理统计8讲

组　编　海天鲲鹏数学研究院
主　编　张　新　张　宇
副主编　姜晓千　方　浩　吴　睿

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学概率论与数理统计 8 讲 / 张新，张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2014.3
ISBN 978-7-5640-8885-9

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①张… ②张… Ⅲ. ①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 033987 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
82562903（教材售后服务热线）
68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京旺鹏印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米 × 1000 毫米　1/16
印　　张 / 15.5
字　　数 / 390 千字
版　　次 / 2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 22.80 元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

考研之路似苍茫
俱向往 深思量
甚嚣尘上 请君莫
彷徨
北风啸杀掠考場
身似铁 心如鋼
雄关不惧 成败自
含香

张宇 二零一四年春
与考研学子共勉

【注】有一考研学生将苏轼《江城子》的词句改写为：“考研成败两茫茫，不思量，自难忘，寒窗孤影，无处话凄凉。北风啸杀掠考场，纵使十年八年也不惧，身似铁，心如钢。”文采极好，但略显悲观，于是，我也改词一首，送给考研学子，希望同学们雄关不惧，因为成败自含香。

总　　序

2014 年 1 月 6 日上午 11:30，考研数学尘埃落定. 随后，我便穿梭于各大教育门户网站接受采访，第一时间给广大考生详细解析这份考研数学试卷——我所解析的，并不是一个一个具体的题目，而是 2013 年的卷子所反映出的命题特点，并指出 2015 年考研复习的方向. 下面我就如何做好考研复习与考生朋友们作如下交流.

第一，考研数学复习一定要把握命题的风格与趋势.

考研数学命题一直以来**“重基础、轻技巧”**，而我们广大考生往往在一些不正确的引导下，“以题型为核心，以技巧为灵魂”，导致基本概念的理解不透彻、基本定理的使用不正确、基本方法的使用不恰当，即使再认真努力，方向错了，结果也不会理想.

我主编的这套教材严格依据教育部考试中心《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》(以下简称《考试大纲》)编写，与《考试大纲》无缝接轨，科学、严谨地进行内容设计，**对《考试大纲》的知识点进行了正确的诠释，不贪多、不过度、不烂笔，把握住“火候”**，这一点是很有讲究的.

第二，考研数学复习一定要贯彻数学思维的训练和数学思想方法的研习.

一般认为，数学题型很重要. 给出一种题型，掌握这种题型的解题步骤，然后去套这个步骤就可以了. 这种按部就班的学习习惯和方法，对于考试来说，我不否认它有一定的合理之处，但是我却不完全赞同.

要想真正掌握数学知识，达到较高的数学素养并形成较强的解题水平，**必须在复习的过程中重视每个概念、定理和结论背后的数学思维方法，甚至可以在老师的引导下去欣赏和体味这思维背后的方法论**. 这个过程，是学习数学不可或缺的，我坚持这一观点，并且在教学和编写教材中贯彻这一观点.

第三，考研数学复习一定要重视经典好题的分析与解答.

数学解题实践是整个数学学习过程的重中之重. **一定要有好的数学题目作为载体，才能够把知识理解和掌握好**，所以，复习过程中题目质量的高低直接决定了复习的效果.

本套教材的每一本书中，都精挑细选了考研数学的经典好题，它们的来源请看**《考研数学题源探析经典 1000 题》**的前言，我在那里做了详细说明.

第四，考研数学复习一定要加强运算能力的培养.

考研数学的考试时间是3个小时，要解决23个数学题目，一届又一届考生的考后感受就是——做不完.做不完，除了个别没有思路的题目外，大多因为计算速度太慢，计算能力不强.我一直提醒考生，**在复习的全过程中都不要"眼高手低"，要算就算到低**，运算能力是硬功夫，不是一朝一夕的事情，请考生切记.

本套丛书答疑地址在我的新浪微博：http://weibo.com/zhangyumaths.或者联系诸位分册主编，详情请看各分册的主编前言.

阅读这套书需要在脑力上付出巨大的努力，加油吧，预祝同学们成功！

张宇

2014年春 于北京

本书前言

重温经典　领悟精髓

考研数学中概率论与数理统计部分特点鲜明、题型清晰、考点突出，考生要注重以下几个方面，以便读者在复习中做到有的放矢.

（一）

大体上，概率论与数理统计部分内容主要有古典概型、概率分布、数字特征和参数估计等问题.这里将其分为四部分的内容，其一是概率论的理论部分，涵盖概率的公理化定义、条件概率、概率的加法、减法、乘法公式，以及全概率与贝叶斯公式；其二是概率论的核心，讨论了随机变量的概率分布；其三研究了随机变量的数字特征；最后一部分讨论了统计量及其分布、参数估计等问题.

现将上述内容概括为如下关键词，其顺序有意安排如下：

●Stochastic Variable（随机变量）

●Classical model（古典概型）

●Characters（数字特征）

●Evaluation（估计）

●Distributions（概率分布）

如果将上述的关键词的首字母结合（Unite）起来，形成了 SUCCEED（成功），将能够决胜于考研.

（二）

针对概率论的理论部分，考生复习中应注意这样几点：概率的基本计算公式，还包括条件概率的计算问题，当然，事件间的关系在概率计算中也起着重要的作用.

考生也必然知道随机变量的概率分布是重要考点，下面将从几个层面分析随机变量的概率分布，进而来解决一切的概率问题.

第一层面，考生把握随机变量概率分布的定义和性质，比如分布函数的定义和性质，而对于离散型随机变量的分布律和连续型随机变量的概率密度的性质，这里涉及的考点和考查形式较多，常见的考点是已知概率分布求解未知参数的问题；

第二层面，已知常见分布（二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布、正态分布），考查与常见分布的相关的概率问题；

第三层面，讨论随机变量函数的概率分布；

第四层面，二维随机变量的概率分布，其中包括联合分布、边缘分布和条件分布.

随机变量的数字特征是考试中的重要内容，考生需从三个方面把握，既要熟练数字特征的计算公式，又要熟知数字特征的性质，近几年来这些一直是热点所在.事实上，考生不能忽视常见分布的数字特征.

对于统计学部分，复习的策略与概率论部分的策略一致，首先掌握统计量的抽样分布及其性质，其次讨论统计量的数字特征.特别值得一提的是参数估计毋庸置疑是统计学中重中之重.

（三）

最后衷心感谢教育部考试中心的考研数学官方文件，众多高校（清华大学、复旦大学、上海交通大学、华中科技大学等）高校数学教材和考试试题等资料及其作者.

感谢责任编辑老师和我的同事对本书出版所付出的巨大努力.

由于本人的水平有限，对本讲义的编写存在不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正.

作　者

2014 年 3 月

目　　录

第 1 讲　随机事件与概率

导　语

本讲内容是概率论的基础理论与理论依据，在后面几讲中都有其具体的表现，毫不夸张地说，学好这一讲是在概率论试题上取得高分的前提.

大纲要求

本章是概率论中最基础的一章，是概率论的理论基础. 首先以随机事件的关系与运算为入门，讨论了随机事件的表示.

基于随机事件的理论基础，给出了概率的公理化定义和概率的计算公式，讨论了等可能概型中随机事件的概率.

条件概率是概率的重要组成部分，条件保持了概率的性质，并以条件概率建立了事件概率的乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

独立性是随机事件之间的重要关系，以独立性为条件，能够求解相关随机事件的概率.

按照考试大纲要求理解、掌握的是：随机事件的概念，事件的关系及运算，概率与条件概率的概念，概率的计算公式(加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式，以及贝叶斯公式)，事件独立性的概念和性质，独立重复试验的概念.

要求了解、会求的是：样本空间(基本事件空间)的概念，古典型概率与几何型概率，利用概率计算公式求解有关事件的概率，以事件独立性为条件的概率计算，伯努利试验中有关事件概率的计算.

知识体系

- 随机事件与概率
  - 基本概念
    - 随机试验
    - 样本空间
    - 随机事件的关系及运算
      - 和、积、差、逆
      - 交换、结合、对偶等
  - 概率
    - 概念
    - 古典概型与几何概型
    - 计算公式：加法、减法、求逆公式
    - 条件概率
      - 乘法公式
      - 全概率公式和贝叶斯公式
  - 独立
    - 概念
    - 伯努利概型

1.1 考试内容分析

1.1.1 基本概念

1. 随机试验

如果试验满足下列性质：

(1)在相同条件下可以重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，但所有的结果是明确的；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

则试验称为随机试验，简称试验，常记为 E.

2. 样本空间

随机试验 E 所有可能结果的全体，称为样本空间，记为 Ω. 每一个可能的结果称为样本点或是基本事件，记为 ω.

3. 随机事件

设随机试验 E，称样本空间 Ω 的子集为随机事件，简称事件，常记为 A,B,C 等. 若一次试验下出现 $\omega\in A$，则称事件 A 发生；若一次试验下出现 $\omega\notin A$，则称事件 A 没有发生.

几个特殊事件：基本事件 ω、必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$.

1.1.2 事件的关系与运算

1. 包含、等价、对立、互斥关系

(1)包含关系：事件 A 包含于事件 B，含义为事件 A 发生必然导致事件 B 的发生，记为 $A\subset B$，且若 $A\subset B$，则 $B=A\cup\overline{A}B$；

(2)等价关系：事件 A 与事件 B 相互包含，含义为事件 A 与事件 B 等价，记为 $A=B$；

(3)对立关系：事件 A 的补集，含义为事件 A 不发生，记为 $\overline{A}$，称 $\overline{A}$ 为 A 的逆事件；

(4)互斥关系：事件 A 与事件 B 的交集为空集 $\varnothing$，含义为事件 A 与事件 B 不可能同时发生，记为 $AB=\varnothing$，称事件 A 与事件 B 互不相容.

2. 和事件、积事件、差事件、对称差

(1)和事件：并集运算 $A\cup B$，含义为事件 A 与事件 B 至少有一个发生，记为 $A+B$；

(2)积事件：交集运算 $A\cap B$，含义为事件 A 与事件 B 同时发生，记为 AB；

(3)差事件：差集运算 $A-B$，含义为事件 A 发生而事件 B 不发生，记为 $A-B$，且满足关系式 $A-B=A\overline{B}=A-AB$；

(4)对称差：$A\overline{B}\cup\overline{A}B$，含义为事件 A 发生与事件 B 中仅有一个发生，记为 $A\triangle B$，且满足关系式 $A\triangle B=A\cup B-AB$；

3. **事件的运算律**

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$；

(3)分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC, AB\cup C=AC\cup BC$；

(4)德摩根律：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

【考点强调】事件间的关系、运算以及表示是概率的基础，在求解事件概率时往往需要注意事件的关系，选择正确的概率计算公式.

【例 1.1】设随机事件 A,B 满足 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，则下列选项中正确的是(　　)

(A)$A\cup B=\varnothing$　(B)$A\cup B=\Omega$　(C)$A\cup B=A$　(D)$A\cup B=B$

【分析与解答】本题考查的是随机事件的运算.

由于 $AB=\overline{A}\,\overline{B}$，利用德·摩根律得 $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}=AB$，即

$$A\cup B=A\cup B\cup AB=(A\cup B)\cup\overline{(A\cup B)}=\Omega.$$

答案为(B).

1.1.3　概率的定义与性质

1. **概率的定义**

设随机试验 E，样本空间 Ω，对于随机事件 $A\subset\Omega$，则将 $P(A)$ 定义为满足下面三个条件的集合函数：

(1)非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：设 $A_1,\cdots,A_i,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

2. **概率计算公式**

(1)加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

当 A,B 互不相容时，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

而对于 n 个事件 $A_1,\cdots,A_i,\cdots,A_n$ 的加法公式为

$$P(A_1\cup\cdots A_i\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j<n}P(A_iA_j)+$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

特别地，若 $A_1,\cdots,A_i,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

【考点强调】多个事件的和事件概率一般不会用此公式求解，求解的方法是利用独立性条件将和事件的概率转化为对立事件的乘积.

(2)减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别注意以下减法公式的几种形式：

当 $A\supset B$ 时，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，(当 $A\supset B$ 时，有 $P(B)\leqslant P(A)$，称此为概率的单调性)；

当 $A\subset B$ 时，则 $P(A-B)=0$；

当 A,B 互不相容时，则 $P(A-B)=P(A)$.

(3)求逆公式：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

【考点强调】概率的计算公式因事件的关系不同而形式多变，抓住本质公式，简单推导易得.

【例 1.2】设事件 A,B 互斥(互不相容)，则(　　)

(A)$P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　　　(B)$P(AB)=P(A)P(B)$

(C)$P(A)=1-P(B)$　　　　(D)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【分析与解答】本题考查的是事件互斥条件下的概率.

由于事件 A,B 互斥，则 $AB=\varnothing$，即得 $P(AB)=0$，事实上，本题没有说明事件 A,B 是否独立，所以选项(B)不能直接得到；同时事件 A,B 不一定是互逆事件，不能选(C)；对选项(A)，

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B),$$

不能计算出结果；对选项(D)，

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

故选(D).

1.1.4　古典概型与几何概型

1. **古典概型**

设随机试验 E 的样本空间中包含有限个等可能的样本点，称此试验为古典概型. 设古典概型 E，样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，随机事件 $A=\{\omega_{i1},\omega_{i2},\cdots,\omega_{ik}\}$，于是

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.1}$$

【例 1.3】袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第 2 个人取到黄球的概率是________.