

普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus  
新核心

理工基础教材

# 概率论 与数理统计

上海交通大学数学系 组编  
冯卫国 武爱文 编

第四版



上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材  
国家工科数学教学基地 国家级精品课程使用教材

Nucleus  
新核心

理工基础教材

# 概率论 与数理统计

上海交通大学数学系 组编  
冯卫国 武爱文 编

第四版



上海交通大学出版社

## 内容提要

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地,为满足少学时本科教学需要,特组织编写本教材。

本书是在2003年出版的《概率论与数理统计》的基础上修订而成的。内容包括概率论(1~5章)与数理统计(6~8章)两部分。概率论部分介绍了概率论的基本概念、随机变量(包括多维随机变量)及其分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理;数理统计部分介绍了数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。

本书可作为高等院校的工业、农业、林业、医学等专业及成人、高职教育各非数学专业的教材或教学参考书,也可供自学者和有关科技工作者学习参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/上海交通大学数学系组编.—4版.—  
上海:上海交通大学出版社,2013  
新核心理工基础教材  
ISBN 978-7-313-10436-6

I. ①概… II. ①上… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. ①021

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第317025号

## 概率论与数理统计

(第四版)

组 编:上海交通大学数学系

出版发行:上海交通大学出版社

邮政编码:200030

出 版 人:韩建民

印 制:上海交大印务有限公司

开 本:787 mm×960 mm 1/16

字 数:276千字

版 次:1998年6月第1版 2014年1月第4版

书 号:ISBN 978-7-313-10436-6/O

定 价:26.00元

地 址:上海市番禺路951号

电 话:021-64071208

经 销:全国新华书店

印 张:14.75

印 次:2014年1月第13次印刷

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话:021-54742979

## 第四版前言

概率统计是研究随机现象数量规律的数学学科,理论严谨,应用广泛,发展迅速。目前不仅高等学校各专业都开设了这门课程,而且从20世纪90年代中期开始,这门课程特意被国家教委(如今的教育部)定为本科生考研的数学课程之一。这从一个侧面反映了概率统计这一数学学科越来越受到社会的重视。

概率(几率、或然率)——随机事件出现的可能性的量度——其起源与博弈问题有关。

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题;17世纪中叶,法国数学家帕斯卡、荷兰数学家惠更斯基于排列组合的方法,研究了较复杂的赌博问题,解决了“合理分配赌注问题”(即得分问题)。

对客观世界中随机现象的分析产生了概率论;使概率论成为数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家伯努利;而概率论的飞速发展则是在17世纪微积分学说建立以后。

对概率论这门学科的形成作出很大贡献的是法国数学家拉普拉斯,他在系统总结前人工作的基础上,于1812年出版了《概率的分析理论》一书,这是概率论方面较早且又很有影响的一部经典著作。

第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制论和数理统计学等学科,而这些学科无一例外地都与概率论紧密相关。

数理统计学是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据,以对所考察的问题作出推断或预测,直至为采取一定的决策与行动提供依据和建议的数学分支学科。

统计方法的数学理论要用到很多近代数学知识,如函数论、拓扑学、矩阵代数、组合数学等,但关系最密切的是概率论。故可以这样说,概率论是数理统计学的基础,数理统计学是概率论的一种应用,它们是两个并列的数学分支学科,并无从属关系。

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中。例如：

- (1) 气象、水文、地震预报、人口控制及预测与概率论紧密相关；
- (2) 产品的抽样验收，新研制的药品能否在临床中应用，均需要用到假设检验；
- (3) 寻求最佳生产方案要进行实验设计和数据处理；
- (4) 电子系统的设计，火箭、卫星的研制与发射都离不开可靠性估计；
- (5) 探讨太阳黑子的变化规律时，时间序列分析方法非常有用；
- (6) 研究化学反应的时变率，要以马尔可夫过程来描述；
- (7) 在生物学中研究群体的增长问题时提出了生灭型随机模型，传染病流行问题研究要用到多变量非线性生灭过程；
- (8) 许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及的知识就是排队论。

目前，概率统计理论进入其他诸多自然科学领域的趋势还在不断发展。在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，都大量采用概率统计方法。正如数学家拉普拉斯所说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题。”

本书作为大专院校非数学专业概率统计课程的教材，经过多年教学实践后觉得有必要进行修订。

本书概率论部分由冯卫国编写，数理统计部分由武爱文编写。

书中存在的不足之处，期望读者批评指正。

编者

于上海交通大学

2013年8月

# 前 言

随着科学技术的发展,概率论与数理统计在众多的学科(包括自然科学与社会科学)和众多的行业中得到了越来越广泛的应用。特别是随着我国经济建设迅猛的发展,这方面的要求越来越多。与此相适应,概率统计不仅成为大学数学系的一门主要基础课程,而且还成为理、工、农、管、医乃至文科的一门必修的数学基础课程。由于该课程概念新、理论深、公式多,对非数学专业不宜使用统一的教材,因为那将会给教与学都带来不少困难。为此,我们编写了本书。

本书可作为高等院校全日制非数学类各专业(工科类、经济管理类、医科类和农科类等)及成人、高职教育各专业学生的教材或教学参考书;也可供自学者和有关科技工作者参考。

本教材力求做到科学性与通俗性相结合,在内容的处理上由直观到抽象,由具体到一般,由浅入深,循序渐进。书中对主要的方法和计算步骤作了归纳总结,略去了一些较难或叙述较繁琐的证明,重在讲清理论的意义与实际的应用。书中还设置了丰富的例题和习题,其中特别注意加大应用题的比例,使学生通过本课程的学习和练习,不仅能较好地掌握概率统计的基本概念和基本方法,而且也能清楚概率论与数理统计用在何处和如何应用。

另外,本书在附录中还有上海交通大学本科、成人教育学院、网络教育学院近年的概率统计试卷,并给出了解答与提示。除各章列出的习题外,还有总复习题,也给出了答案。相信通过这些练习,对融会贯通本书的知识将大有益处。

本教材课内教学需要 36~45 学时,若取下限的话,教师可酌情删去标注“\*”的章节与段落。

本书概率论部分由冯卫国编写,数理统计部分由孙祝岭编写。本书的写作和出版得到了上海交通大学数学系和上海交通大学出版社的指导和帮助。陶宗英教授仔细审阅了本书的初稿,并提出了许多宝贵的修改意见,在此一并深表感谢。

限于编者水平,书中存在的不当之处,请使用本教材的教师和读者批评指正。

编 者

于上海交通大学

2003 年 5 月

# 目 录

<b>1 概率论的基本概念</b> .....	1
1.1 随机事件及其运算 .....	1
1.2 概率的定义及其计算 .....	5
1.3 独立性 .....	17
1.4 条件概率 .....	21
<b>2 随机变量及其分布</b> .....	34
2.1 随机变量及其分布函数 .....	34
2.2 离散型随机变量及其概率分布 .....	37
2.3 连续型随机变量及其概率分布 .....	45
2.4 随机变量的函数的分布 .....	56
<b>3 多维随机变量及其分布</b> .....	64
3.1 二维随机变量及其分布 .....	64
3.2 二维随机变量的条件分布 .....	75
3.3 随机变量的独立性 .....	80
3.4 二维随机变量的函数的分布 .....	84
<b>4 随机变量的数字特征</b> .....	98
4.1 随机变量的数学期望 .....	98
4.2 随机变量的方差 .....	110
4.3 协方差和相关系数 .....	116
<b>5 大数定律和中心极限定理</b> .....	127
5.1 大数定律 .....	127
5.2 中心极限定理 .....	130

<b>6 数理统计的基本概念</b> .....	137
6.1 序言 .....	137
6.2 基本概念 .....	138
6.3 抽样分布 .....	145
<b>7 参数估计</b> .....	156
7.1 点估计法 .....	156
7.2 估计量的评价标准 .....	164
7.3 区间估计 .....	167
<b>8 假设检验</b> .....	181
8.1 假设检验的基本思想 .....	181
8.2 正态总体参数的假设检验 .....	184
8.3 非正态总体均值 $\mu$ 的假设检验 .....	191
<b>附录</b> .....	195
表 1 泊松分布表 .....	195
表 2 标准正态分布函数表 .....	197
表 3 $t$ 分布上侧分位数表 .....	198
表 4 $\chi^2$ 分布上侧分位数表 .....	200
表 5 $F$ 分布上侧分位数表 .....	202
各章习题答案与提示 .....	211



# 1 概率论的基本概念

概率论是研究随机现象中数量规律的数学学科. 它完全有别于迄今我们学过的其他数学分支, 例如微积分、线性代数等, 因为后者研究的对象都是确定性现象.

本章先介绍概率论的一系列专用术语, 然后对随机事件的概率进行定义, 并由此导出概率的基本性质, 最后讨论几种特殊场合下的概率计算问题: 古典概率、几何概率、条件概率.

## 1.1 随机事件及其运算

### 1.1.1 随机试验

首先, 我们把试验作为一个含义广泛的术语, 它既包括各种科学实验, 也包括对某一事物的某一特征进行的观察.

在进行个别试验时其结果具有不确定性, 但在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象, 称为**随机现象**. 为研究随机现象而进行的观察或实验, 称为**试验**. 若一个试验满足如下 3 个特点, 则称其为**随机试验**:

- (1) 在相同条件下可以重复进行;
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且事先知道试验的所有可能结果;
- (3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

记随机试验为  $E$ . 例如:

$E_1$ : 掷一颗骰子, 观察出现的点数.

$E_2$ : 记录某一时段通过某一路口的机动车数量.

$E_3$ : 测试某型号电脑的使用寿命.

以上试验都具有上述 3 个特点.

### 1.1.2 随机事件与样本空间

随机现象的某种结果, 称为**随机事件**, 简称为**事件**, 记为  $A, B$  或  $C$  等.

在一次试验中, 不论结果有多少个, 总可从中找出这样一组基本结果, 满足:

- (1) 每一次试验, 必然出现且仅出现其中的一个基本结果;
- (2) 任何事件, 都是由其中若干个基本结果组成.

随机试验中的每一个基本结果,称为**基本事件**,或称为**样本点**,记为 $\omega$ . 基本事件的全体,称为试验 $E$ 的**样本空间**,记为 $\Omega$ .

对应 1.1.1 中随机试验 $E$ 的样本空间为

$$E_1: \Omega = \{(1 \text{ 点}), (2 \text{ 点}), \dots, (6 \text{ 点})\};$$

$$E_2: \Omega = \{(0 \text{ 辆}), (1 \text{ 辆}), (2 \text{ 辆}), \dots\};$$

$$E_3: \Omega = \{t \text{ 小时} | t \in [0, +\infty)\}.$$

所谓事件 $A$ 发生,是指在一次试验中,当且仅当 $A$ 中包含的某个样本点出现. 例如在 $E_1$ 中,设事件 $A$ 为“出现的点数小于3”,则 $A = \{(1 \text{ 点}), (2 \text{ 点})\}$ ,设事件 $B$ 为“出现偶数点”,则 $B = \{(2 \text{ 点}), (4 \text{ 点}), (6 \text{ 点})\}$ . 若掷一颗骰子,得点数1,则可称事件 $A$ 发生,事件 $B$ 未发生.

在每次试验中,一定不发生的事件称为**不可能事件**,记为 $\emptyset$ ,它是样本空间的一个空子集. 而每次试验一定发生的事件称为**必然事件**,记为 $\Omega$ ,它是样本空间的一个子集. 显然, $\emptyset$ 与 $\Omega$ 已不是随机事件,引入它们是为了讨论问题的方便.

### 1.1.3 事件之间的关系及其运算

由于事件是若干个样本点的集合,因此事件之间的关系及运算可用集合之间的关系及运算来处理. 如果我们有了一些事件,则通过这些事件的运算,便可得到其他事件.

#### 1) 事件的包含与相等

若事件 $A$ 发生必导致事件 $B$ 发生,即 $A$ 的样本点都在 $B$ 中,则称事件 $B$ **包含**事件 $A$ ,记为 $A \subset B$ .

若 $A \subset B$ ,且 $B \subset A$ ,则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**,记为 $A = B$ .

#### 2) 事件的和

事件 $A$ 和事件 $B$ 中至少有一个发生的事件,即 $A$ 和 $B$ 的样本点合并而成的事件,称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**和**,记为 $A \cup B$ . 事件的和也称为事件的**并**.

类似地, $n$ 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和,记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ;可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和记为 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

#### 3) 事件的积

事件 $A$ 和事件 $B$ 同时发生的事件,即 $A$ 和 $B$ 的公共的样本点所构成的事件称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的**积**,记为 $A \cap B$ ,也可简记为 $AB$ . 事件的积也称为事件的**交**.

类似地, $n$ 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积,记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ;可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积,记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ .

## 4) 事件的差

事件  $A$  发生而事件  $B$  不发生的事件,即属于  $A$  而不属于  $B$  的样本点所构成的事件,称为事件  $A$  与  $B$  的差,记为  $A-B$ .

## 5) 事件的互斥

若  $A \cap B = \emptyset$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  是互斥的,或称  $A$  与  $B$  是互不相容的.  $A$  与  $B$  互斥,是指事件  $A$  和事件  $B$  不能同时发生,例如基本事件是两两互斥的.

## 6) 事件的对立

若  $A \cap B = \emptyset$ ,且  $A \cup B = \Omega$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  是对立的,或称  $A$  与  $B$  互为逆事件.  $A$  与  $B$  对立,是指事件  $A$  和事件  $B$  既不能同时发生又不能同时不发生,即在每次试验中,  $A$  和  $B$  有且仅有一个发生. 若  $A$  的对立事件记为  $\bar{A}$ ,显然,  $\bar{A} = \Omega - A$ . 若  $A$  与  $B$  互逆,则  $\bar{A} = B$ ,或  $\bar{B} = A$ .

由定义可知,对立事件必为互斥事件,其逆不真.

以上事件之间的关系及运算可用文氏(Venn)图 1-1~图 1-6 来直观地表示. 这里矩形表示样本空间  $\Omega$ ,矩形内的点表示基本事件,圆  $A$  与圆  $B$  分别表示事件  $A$  和事件  $B$ ,阴影部分表示  $A$  与  $B$  的各种关系及运算.

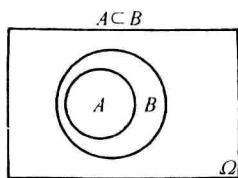


图 1-1

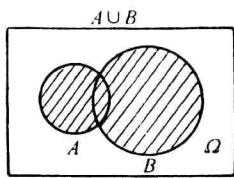


图 1-2

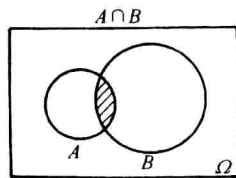


图 1-3

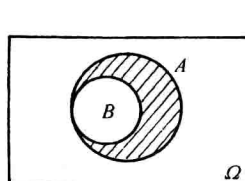
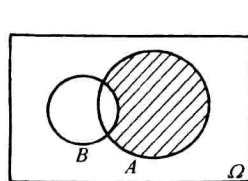


图 1-4

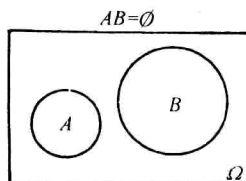


图 1-5

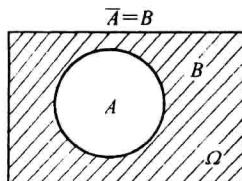


图 1-6

## 7) 事件的运算律

设  $A, B, C, A_k (k=1, 2, \dots)$  为事件, 则有:

**交换律**  $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A.$

**结合律**  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

**分配律**  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$   
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

**反演律** [亦称德·摩根(De Morgan)律]  
 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

一般地, 对有限个及可列多个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k; \quad \overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \bar{A}_k;$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k; \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k.$$

**例 1.1** 设  $A, B, C$  为 3 个事件, 试用  $A, B, C$  表示下列事件:

- (1)  $A, B$  中至少有一个不发生,  $C$  必发生;
- (2)  $A, B, C$  中恰有一个发生;
- (3)  $A, B, C$  中不多于两个发生;
- (4)  $A, B, C$  中恰有两个同时发生.

画出以上 4 种事件的文氏图.

**解** (1)  $\bar{A}\bar{B}C$  或  $C - AB$ ;

(2)  $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$ ;

(3)  $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}BC$ , 或  $\overline{ABC}$ ;

(4)  $ABC \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC.$

图 1-7 给出了两种事件的文氏图, 第 3、第 4 种事件的文氏图, 请读者自行画出。

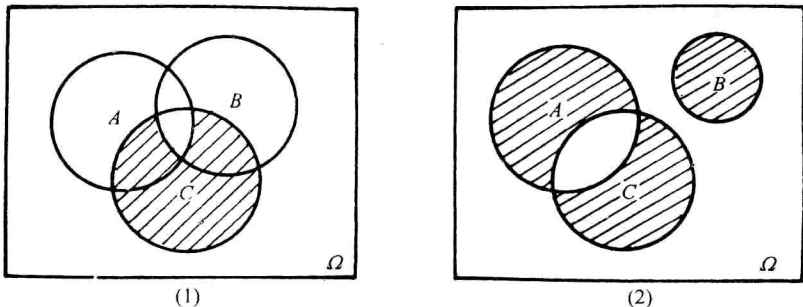


图 1-7

**例 1.2** 试求事件“甲种产品盈利而乙种产品不盈利”的对立事件.

**解** 设  $A$  表示“甲种产品盈利”,  $B$  表示“乙种产品盈利”, 则题设事件可表为  $A \cap \bar{B}$ . 求其逆事件得

$$\overline{A \cap \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{\bar{B}} = \bar{A} \cup B,$$

即所求对立事件为“甲种产品不盈利或乙种产品盈利.”

**例 1.3** 化简事件  $\overline{(A\bar{B} \cup C)\bar{A}C}$ .

**解** 原式  $= \overline{\bar{A}\bar{B} \cup C} \cup \bar{A}C = \overline{\bar{A}\bar{B}} \cap \bar{C} \cup AC$   
 $= (A \cup B)\bar{C} \cup AC = A\bar{C} \cup B\bar{C} \cup AC$   
 $= A(\bar{C} \cup C) \cup B\bar{C} = A\Omega \cup B\bar{C}$   
 $= A \cup B\bar{C}.$

**注** 在化简过程中, 有时候需添加括号, 因为事件的运算顺序为逆、交、并、差, 括号优先.

## 1.2 概率的定义及其计算

概率(亦称几率、或然率)这一术语已为当今越来越多的人所熟悉, 它是随机事件出现的可能性的量度. 其起源与博弈问题有关.

如何对概率进行定义? 我们的前人对这个看似并不复杂的问题, 足足探索了 300 多年. 在经历了古典概率、几何概率、统计概率等版本的概率定义后, 才最终接受了前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. H. Колмогоров)于 1933 年建立的概率公理化体系, 从而有了目前为大多数概率论教科书所采用的概率公理化定义. 什么是概率的公理化定义? 这要从随机事件的频率谈起.

### 1.2.1 频率

人们常常通过实际观察来确定某个随机事件发生的可能性的. 例如: 遇到某种天气, 人们常会说“今天十有八九要下雨”, 这个“十有八九”就是表示“今天下雨”这一事件发生的可能性的. 这是人们通过大量实践所得出的一种统计规律, 即气象资料显示: 已经历过  $n$  次这种天气, 其中  $0.8n$ (或  $0.9n$ ) 天是下雨的. 于是人们也就认同了  $0.8n$  与  $n$  的比值在一定程度上反映了“今天下雨”这一事件发生的可能性的.

**定义 1.1** 称在相同条件下所做的  $n$  次试验中事件  $A$  发生的次数  $n_A$  为  $A$  发生的频数, 并称比值  $\frac{n_A}{n}$  为事件  $A$  发生的频率, 记作

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

由定义可知,易见频率具有如下基本性质:

(1) 对任一事件  $A$ , 有  $0 \leq f_n(A) \leq 1$ ;

(2) 对必然事件  $\Omega$ , 有  $f_n(\Omega) = 1$ ;

(3) 若  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互斥, 则  $f_n(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n f_n(A_i)$ .

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon)和皮尔逊(K. Pearson)曾进行过大量掷硬币的试验, 所得结果如下:

试验者	$n$	$n_A$	$f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.5069
皮尔逊	12 000	6 019	0.5016
皮尔逊	24 000	12 012	0.5005

上表中  $A$  表示“出现正面”这一事件.

这两个学者的试验告诉我们如下两点:

(1) 同一事件的频率是不全相同的, 即频率具有随机波动性;

(2) 随着试验次数的增大, 频率的波幅会逐渐减小, 且会稳定于某个数附近, 即频率具有稳定性.

在本书第 5 章的大数定律中, 我们将看到当试验次数  $n$  很大时, 事件  $A$  发生的频率与某个常数  $p$  的偏差超过任意正数  $\epsilon$  的可能性几乎没有.

对每个事件  $A$  都有这样一个客观存在的常数  $p$  与之对应, 这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性, 并不断地为人类的实践所证实, 它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 我们用这个频率稳定值  $p$  来表示事件  $A$  发生的可能性的合适的大小是合适的, 这就是概率的统计定义.

### 1.2.2 概率的统计定义

**定义 1.2** 在相同条件下所做的  $n$  次试验中, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 事件  $A$  发生的频率  $f_n(A)$  稳定在某常数  $p$  附近, 则称  $p$  为事件  $A$  发生的概率, 记作

$$P(A) = p.$$

此定义是建立在试验及其统计数据的基础上的, 故称之为概率的统计定义. 它有很直观的试验背景, 容易被人接受, 但不足之处也不少. 其一, 在实际中不可能对每一事件都做大量的试验, 以期得到频率的稳定值; 其二, 定义中数  $p$  的存在性并未给出严格的证明, 而只是经过大量试验之后的推断; 其三, 定义中对频率与概率的关系的描述是粗糙的, 非数学化的, 容易造成误解. 例如: 依定义描述, 使人认为

概率就是频率的极限,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A) = P(A).$$

学完第 5 章后我们将知道,概率确实是频率的某种极限,但并非是上式所表述的极限,而是另外意义下的极限.

由于定义 1.2 的上述不足,人们有理由寻找更好的定义概率的方式,概率的公理化定义由此应运而生.

### 1.2.3 概率的公理化定义

**定义 1.3** 设随机试验  $E$  的样本空间为  $\Omega$ ,若按照某种方法对  $E$  的每一事件  $A$  赋予一个实数  $P(A)$ ,且满足以下公理:

- (1) 非负性:  $P(A) \geq 0$ ,
- (2) 归一性:  $P(\Omega) = 1$ ,
- (3) 可列可加性: 对  $E$  的任意一列两两互斥的事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称实数  $P(A)$  为事件  $A$  的概率.

由概率的这一定义可导出概率的如下性质.

**性质 1** 不可能事件的概率为零,即  $P(\emptyset) = 0$ .

**证** 令  $A_n = \emptyset (n=1, 2, \dots)$ , 且  $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$ , 则  $\emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , 于是由概率的可列可加性得

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset),$$

而实数  $P(\emptyset) \geq 0$ , 由上式得  $P(\emptyset) = 0$ .

**性质 2** 概率具有有限可加性, 即若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互斥, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

上式称为加法公式.

**证** 因为

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots,$$

所以由概率的可列可加性及性质 1 得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + \\ &\quad P(A_n) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

**性质 3** 对任何事件  $A$ , 有  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

证 因为  $A \cup \bar{A} = \Omega, A \bar{A} = \emptyset$ . 所以由性质 2 可有

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

即得

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

上式称为逆事件概率公式. 当事件  $A$  的概率不易计算而  $\bar{A}$  的概率却极易计算时可采用此公式.

推论 对任一事件  $A$ , 有  $P(A) \leq 1$ .

性质 4 对事件  $A, B$ , 若  $A \subset B$ , 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geq P(A).$$

证 由  $A \subset B$  及图 1-1 可知

$$B = A \cup (B - A), \quad \text{且 } A(B - A) = \emptyset.$$

由性质 2 可得

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

再由  $P(B - A) \geq 0$  得

$$P(B) \geq P(A).$$

性质 5 对任意两事件  $A, B$ , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证 由图 1-2 可知

$$A \cup B = A \cup (B - A), \quad B = AB \cup (B - A),$$

且

$$A(B - A) = \emptyset, \quad AB(B - A) = \emptyset,$$

故得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A),$$

$$P(B) = P(AB) + P(B - A).$$

将上面二式相减, 并将  $P(B)$  移至等号右端, 即得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 5 常被称为广义加法公式.

性质 5 的推广: 对任意 3 个事件  $A, B, C$ , 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

一般地, 对任意  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) +$$



$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

**例 1.4** 某人欲外出旅游两天. 据天气预报, 第一天下雨的概率为 0.6, 第二天下雨的概率为 0.3, 两天都下雨的概率为 0.1. 试求:

- (1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率;
- (2) 至少有一天下雨的概率;
- (3) 至少有一天不下雨的概率;
- (4) 两天都不下雨的概率.

**解** 设  $A_i$  表示第  $i$  天下雨的事件 ( $i=1, 2$ ). 由已知条件可有

$$P(A_1) = 0.6, P(A_2) = 0.3, P(A_1 A_2) = 0.1.$$

- (1) 欲求概率的事件为

$$A_1 \bar{A}_2 = A_1 - A_2 = A_1 - A_1 A_2,$$

且  $A_1 A_2 \subset A_1$ , 由性质 2 可得

$$P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1 - A_1 A_2) = P(A_1) - P(A_1 A_2) = 0.5;$$

- (2) 由性质 5 可得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &= 0.6 + 0.3 - 0.1 = 0.8; \end{aligned}$$

- (3)  $A_1 A_2$  的逆事件是至少有一天不下雨, 故

$$P(\overline{A_1 A_2}) = 1 - P(A_1 A_2) = 1 - 0.1 = 0.9;$$

- (4) 由反演律可知两天都不下雨的事件为  $\bar{A}_1 \bar{A}_2 = \overline{A_1 \cup A_2}$ , 故

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

在概率的计算中, 性质 3 经常被用到, 因为它常能使计算变得简单明了. 如果我们不利用逆事件, 则以上题 3 和题 4 的计算将会麻烦得多.

## 1.2.4 古典概型

下面给出概率的古典定义及计算公式.

**定义 1.4** 设随机试验  $E$  满足下列条件:

- (1)  $E$  的样本空间只有有限个样本点, 即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\};$$

- (2) 每个样本点的发生是等可能的, 即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n),$$

则称此试验为古典概型或等可能概型.

由于样本点是两两互斥的, 据有限可加性和定义 1.4 的条件 2 可有