本书获“农村金融创新团队”项目资金支持

寿险精算实验教程

ShouXian JingSuan ShiYan JiaoCheng

张宏亮 著

经济科学出版社
Economic Science Press

本书获“农村金融创新团队”项目资金支持

寿险精算实验教程

ShouXian JingSuan ShiYan JiaoCheng

张宏亮 著

经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

寿险精算实验教程/张宏亮著．—北京：
经济科学出版社，2013.12
ISBN 978 - 7 - 5141 - 4006 - 4

Ⅰ.①寿…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①人寿保险 - 计算
方法 - 高等学校 - 教材　Ⅳ.①F840.62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 272765 号

责任编辑：周秀霞
责任校对：靳玉环
版式设计：齐　杰
责任印制：李　鹏

寿险精算实验教程

张宏亮　著

经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010 - 88191217　发行部电话：010 - 88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
汉德鼎印刷厂印刷
华玉装订厂装订
710×1000　16 开　12 印张　230000 字
2013 年 12 月第 1 版　2013 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 5141 - 4006 - 4　定价：38.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010 - 88191502）

目 录

第一章　利息计算及应用

第一节　知识要点

一、利率的基本概念及基本关系

如果将一笔资金存入银行1年，由于将资金的使用权暂时让渡给了银行，所以一年年末的时候，银行在归还这笔资金本身（也叫做本金）之外，还将额外支付这笔资金的使用费，这笔使用费通常叫做利息，利息与本金之比叫做利率。这就是资金的时间价值，利息就是资金时间价值的体现。

由于资金有了时间价值，所以我们可以说，年初的10000元，在未来变成11000元，或其他的数额。

在投资开始时的资金的数量叫做资金的现值（简称现值PV），在投资后某一个时间点的资金积累值（本金+利息）的数量叫做资金的未来值（简称未来值FV）。

在计算货币的时间价值时，需要考虑计算利息的基本周期，例如1个月计算1次利息或者1年计算1次利息是不同，这个基本计算周期称为度量期。

如果1个度量期的期初投资额为PV，期末的积累值为FV，利息为I，则这个度量期的实际利率（简称为利率）为：

$$i = \frac{FV - PV}{PV} \times 100\% = \frac{I}{PV} \times 100\%$$

设投资的本金（现值）为PV，第n个度量期末的积累值（未来值）为FV，投资后第k个度量期的利率为i_k，$k=1, 2, 3, \cdots, n$。

在单利计算时，有：

$$FV = PV\left(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k\right), \quad PV = \frac{FV}{1 + \sum_{k=1}^{n} i_k}$$

在复利计算时，有：

$$FV = PV \times \prod_{k=1}^{n}(1+i_k),\ PV = \frac{FV}{\prod_{k=1}^{n}(1+i_k)}$$

如果每一个度量的利率均相等，即 $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$，那么在单利计算时，有：

$$FV = PV \times (1+ni),\ PV = \frac{FV}{1+ni}$$

在复利计算时，有：

$$FV = PV \times (1+i)^n,\ PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

二、贴现及贴现率

在某些投资场合，是在投资初期就获得投资的收益或支付资金的使用费，例如1年期年收益率为2.8%的国债，购买100元面值的此种国债，在购买时只需要支付97.2元（现值），在1年期满时，收回面值100元（未来值）。这样的转移资金的使用权方式称为贴现。

1个度量期的实际贴现率定义为：

$$d = \frac{FV - PV}{FV} \times 100\% = \frac{I}{FV} \times 100\%$$

三、实际利率与名义利率、实际贴现率与名义贴现率

如果1个度量期分为 m 个等时间长度的子区间，每一个子区间末支付（或计算）1次利息，每次支付（或计算）利息的利率为 $\frac{i^{(m)}}{m}$，则 $i^{(m)}$ 称为1个度量期的名义利率。

如果以贴现方式计算利息，每次支付（或计算）利息的贴现率为 $\frac{d^{(m)}}{m}$，则 $d^{(m)}$ 称为1个度量期的名义贴现率。

1个度量期的实际利率与名义利率、实际贴现率与名义贴现率之间有如下关系：

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

四、利率、贴现率、折现率的关系

定义 $v = \frac{1}{1+i}$ 为折现率。利率、贴现率、折现率有如下关系：

$$d = \frac{i}{1+i},\ i = \frac{d}{1-d}$$

五、运用 Excel 进行利率计算的基本方法和技巧

1. Excel 的基本运算

在本实验教程中，是以 Excel 作为实验的基本工具，所以简单介绍在实验中要用到的一些知识点。Excel 一个非常显著的特点是可以根据使用者给定的表达式进行自动计算。表达式实际就是一个计算公式，它由操作数、运算符、函数及括号组成。在 Excel 中，每一个单元格可以存放一个表达式，且规定每一个表达式必须以等号（=）开头。如果一个单元格中存放了一个表达式，则 Excel 将自动根据表达式进行计算，且将计算结果在该单元格中显示出来。一般情况下，我们在单元格中看到的是表达式的计算结果，而非表达式本身。

根据运算对象（操作数）及运算结果的数据类型，Excel 的运算大致可以分为算术运算、文本运算（字符运算）和关系运算，Excel 的主要运算如表 1－1 所示。

表 1－1　　Excel 的主要运算

运算符	说明
－	负号运算符
%	百分比
^	乘方运算
* 和/	乘和除
+ 和 －	加和减
&	字符串连接
=　<　>　<=　>=　<>	比较运算符

2. 计算函数值的基本方法

在实际应用中经常需要计算一个函数的值，根据在表达式中是否直接给定函数的参数及变量的值，在 Excel 中通常有两种方式来计算函数的值。

方法一，直接在表达式中给定函数的参数值及变量的值。例如，需要在 Excel 计算函数 $y=5x+34.5x^{2.5}$ 当 $x=2$ 时的值，并将计算结果存放在 A1 单元格中，则可按照 Excel 表达式书写规则在 A1 单元格中输入计算该函数值的表达式，输入完成后按回车键（即 Enter 键）Excel 就会自动根据表达式进行计算，并将计算结果存储和显示在 A1 单元格中，如图 1－1、图 1－2 所示。

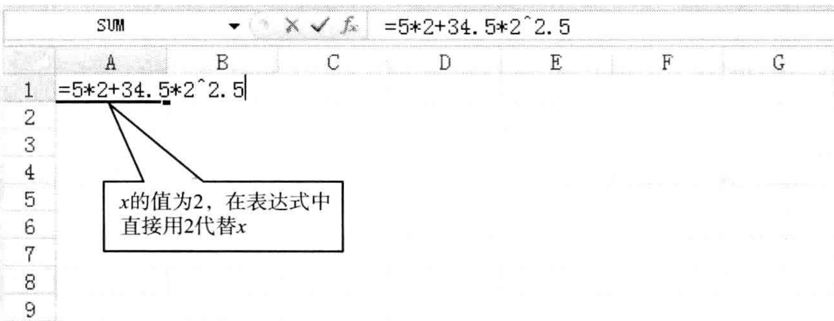

图 1－1　公式输入步骤 1——在 A1 单元格中输入表达式

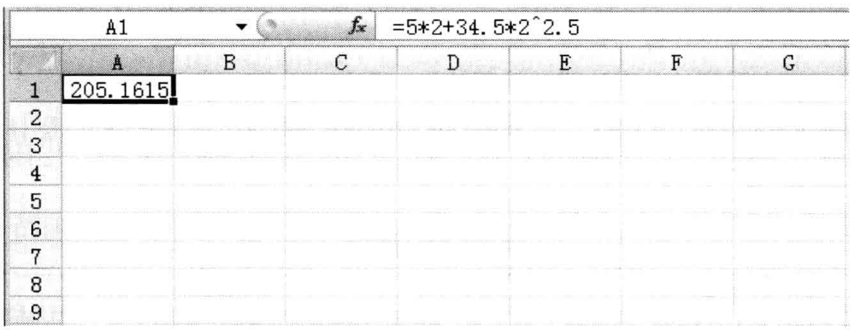

图 1－2　公式输入步骤 2——按回车键（Enter 键）后结果显示在 A1 单元格中

这种方式计算函数优点是直观，缺点也是很明显的，如果要计算 $x=3$ 时函数的值，需要重新输入或修改 A1 单元格中的表达式。

方法二，先将函数中的常量、参数和自变量的值分别存入在不同的单元格中（每一个常量存放在一个单元格中，每一个参数也存放在一个单元格，每一个自变量也存放在一个单元格中）。然后在存放计算的单元格中输入计算函数值的表达式，但是这个时候，表达式中，凡是常量、参数、自变量等都用对应的单元格坐标代替。

例如，计算函数 $y=5x+34.5x^{2.5}$ 在 $x=2$ 时的函数值，并将计算结果存放在 A5 单元格中，那么可以如表 1－2 所示安排函数中的常量和自变量对应的单元格。

表 1－2 函数值的计算方法

函数解析表达式中的各项	存放在工作表中的单元格	说明
常数项（系数）5	A1	
常数项（系数）34.5	A2	
常数项（幂指数）2.5	A3	
自变量 x	A4	计算时在该单元格中存入自变量的值
因变量 y	A5	在该单元格中输入公式，公式中的各项用单元格引用代替相应位置

根据上述设计，在 Excel 工作表中输入相应各项，具体见图 1－3、图 1－4。

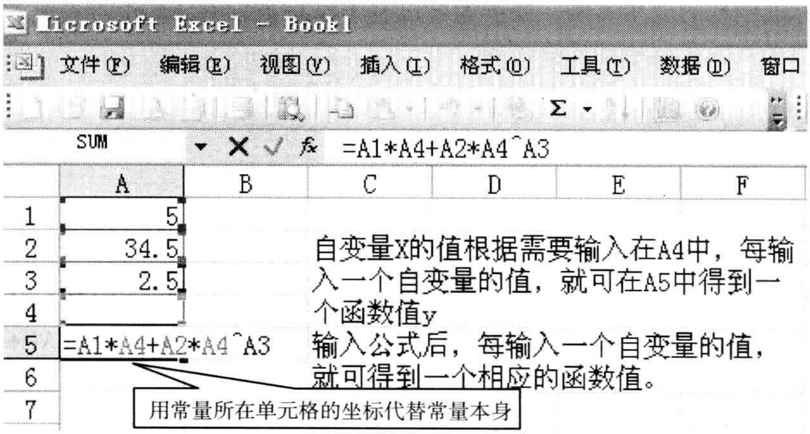

图 1－3 函数值的计算 1——输入公式

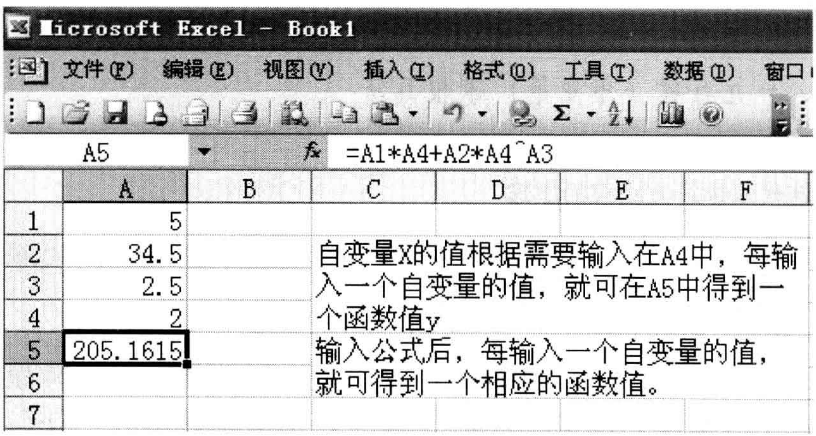

图 1－4 函数值的计算 2——公式输入完成按回车键得到计算结果

用这种方法虽然先要设计常量、参数、自变量存放的单元格，但优点也是很明显的。如果要计算 $x=3$ 时的函数值，则不需要重新输入或修改 A5 单元格中的表达式，只需要将 A4 单元格的值改为 3 就可以了。同样的如果参数变了或者常量值变了，也需要修改对应单元格的数就可以了，每一次修改后，Excel 将自动重新计算 A5 单元格的值。

六、Excel 的常用函数

为了方便使用，Excel 中包含了很多函数，这些函数叫做标准函数，若要娴熟地应用 Excel 进行各种计算，就需要很好地掌握这些标准函数。由于本教程不是 Excel 的使用教程，所以在此我们只介绍在本章中需要用到的几个函数，并通过这些标准函数的应用实例，使读者可以基本掌握如何在 Excel 的表达式中应用标准函数来帮助我们达到计算目的。

1. EXP（）函数

格式：EXP（x）。

功能：计算 e^x 的值。

例如，计算 $e^{3.4}$ 可写为 EXP（3.4）。

例如，计算 e^x，并将 x 的值存放在 A1 单元格中，则可写成 EXP（A1）。

例如，计算 $e^{x+3.4}$，并将 x 的值存放在 A1 单元格中，则可写成 EXP(A1+3.4)。

2. LN（）函数

格式：LN（x）。

功能：计算 $\ln(x)$ 的值。

七、一元方程（单变量）求根方法

1. 迭代法求解方程根的原理

用 Excel 可以求解一元方程（即单变量方程）的根，使用的求方程根的方法在数学上叫做迭代法。其基本原理如下。

设方程的一般形式为： $f(x)=c$

开始求根时，使用者根据经验假设一个自变量 x 的初始值，我们叫做 x_0，将 x_0 代入 $f(x)$ 中进行计算，如果 $f(x_0)$ 的值等于 c，则 x_0 就是 $f(x)$ 的根。否则，按照一个规则修改 x_0，得到一个修改后的自变量值，我们叫做 x_1，将 x_1 代入

$f(x)$ 中重新进行计算，如果 $f(x_1)$ 的值等于 c，则 x_1 就是 $f(x)$ 的根。否则再修改 x_1 的值变为 x_2，……重复上述过程直到求出方程的根，或证明该方程没有根。

从上述过程可以知道，x_0 修改后得到 x_1，x_1 修改后得到 x_2，x_2 修改后得到 x_3，……其修改过程是 Excel 基于数学原理自动进行修改的，一般来说，如果 $f(x)=c$ 有根，则 $f(x_0)$，$f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$，…会越来越接近 c，若某个 $f(x_n)$ 等于或非常接近 c（小于给定的误差），则说 x_n 就是方程 $f(x)=c$ 的根。如果上述过程重复了很多次（在 Excel 中是 50 次）都不能使 $f(x_n)$ 等于或接近 c，则说该方程没有根。

在迭代法求解方程根中，将常量 c 叫做目标值，$f(x)$ 叫做目标函数。

2. Excel 单变量求解的方法和步骤

用 Excel 进行单变量求解的步骤可以如下表述：

（1）将自变量 X 的初始值 X_0 存入到一个单元格中，这个单元格叫做“可变单元格”；将目标函数 $f(x)$ 的表达式存放到一个单元格中，这个单元格叫做“目标单元格”。

（2）使用 Excel 的“工具——单变量求解……”命令。

（3）在命令对话框中输入“可变单元格”和“目标单元格”的坐标（注意，必须是坐标），输入值 c（注意，必须是常量）

（4）单击命令对话框中的“确定”按钮就可得到结果。如果显示的结果中，“目标单元格”的值等于或接近目标值 c，则“可变单元格”中的值就是所求方程的根；否则该方程就没有根。

例如，有方程 $x^3-e^x=6$，在这个方程中有：目标函数是 $f(x)=x^3-e^x$，目标值 $c=6$。设可变单元格为 A1（即对应变量 X），目标单元格为 A2（即对应 $f(x)$），假设 X 的初值为 3，用 Excel 求解过程见图 1-5、图 1-6、图 1-7。

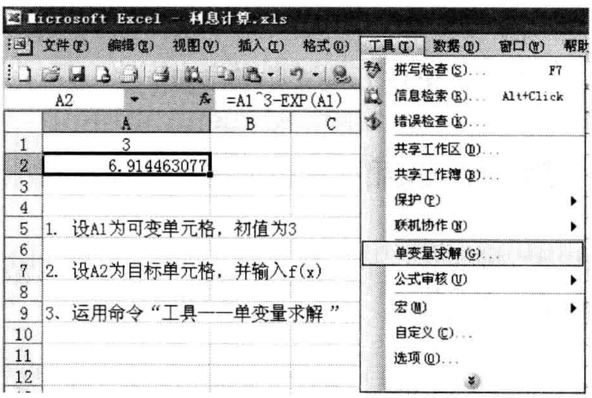

图 1-5　单变量求解步骤 1

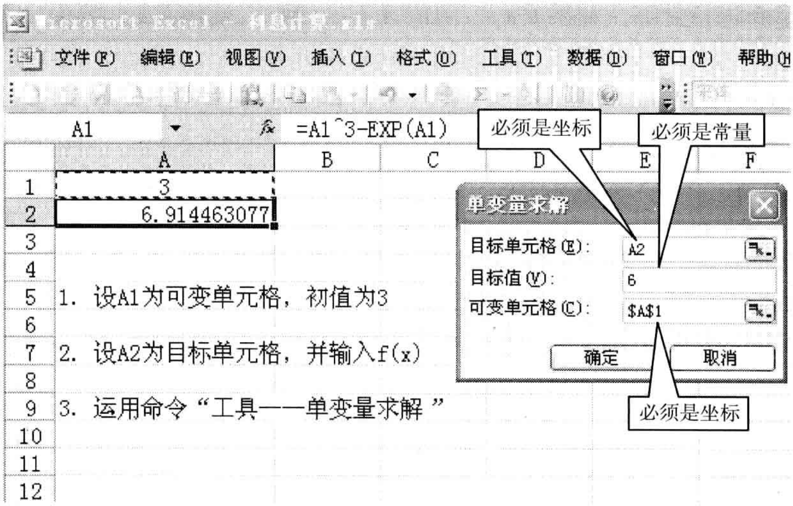

图 1-6 单变量求解步骤 2

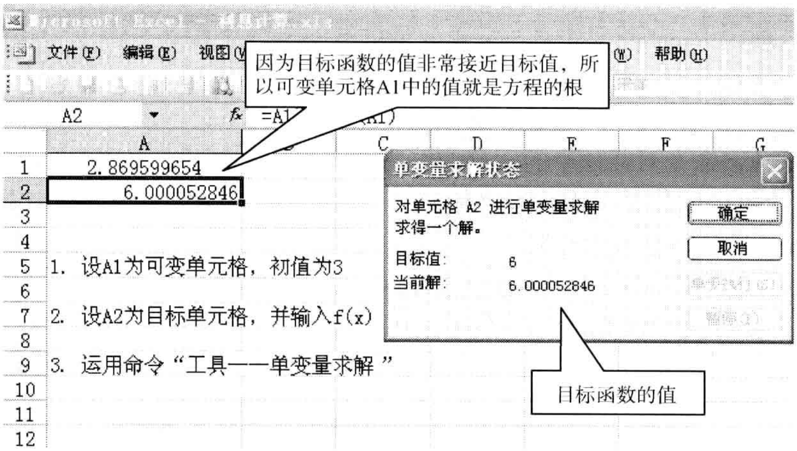

图 1-7 单变量求解步骤 3

第二节 货币时间价值基本计算问题

一、较简单的计算问题

例题一：如果年利率为 3.9%，在第 1 年年初存款 23000 元，第 2 年年末存款 10000 元，第 5 年初存款 15000 元，那么在第 10 年末的本息和共多少？

（1）基本计算原理。在复利计算原理下，每1次存款到期的本息和为：

$$存款本息和 = 存款额 \times (1 + 年利率)^{存款年数}$$

第1次存款的年数为10年，第2次存款的年数为8年，第3次存款的年数为6年，所以3次存款到第10年末的本息和共计：

$$23000 \times (1 + 3.9\%)^{10} + 10000 \times (1 + 3.9\%)^{8} + 15000 \times (1 + 3.9\%)^{6}$$

（2）Excel计算。Excel可以直接计算乘方，所以上述计算公式可以直接转换成Excel的算术表达式。为使计算过程清楚，且观察不同年利率、每次存款额变化本息和的影响，将计算过程用表格的形式表现出来，计算公式中的存款额、年利率等也用对应的单元格引用（见表1－3）。

表1－3　　计算存款本息和

	A	B
1	计算存款本息和	
2	项目	值
3	存款年利率	3.90%
4	第1次存款额	23000
5	第1次存款年数	10
6	第2次存款额	10000
7	第2次存款年数	8
8	第3次存款额	15000
9	第3次存款年数	5
10	第10年末本息和	65462.66

其中，B10单元格的计算公式为：

=B4*(1+B3)^B5+B6*(1+B3)^B7+B8*(1+B3)^B9

例题二：设银行的活期存款年利率为2.40%，某人有下列存款（见表1－4）。存款利息按单利计算，计算某人在2013年9月23日时上述存款的本息和。

表1－4　　存款数据表

存款日期	存款金额
2012－1－5	560.00
2012－10－10	890.00
2013－6－30	765.00
合计	2215.00

（1）计算原理。在单利计算原理下，每1次存款到期的本息和为：

存款本息和 = 存款额 ×(1 + 年利率 × 存款年数)
　　　　　 = 存款额 ×(1 + 年利率 × 存款天数 ÷365)

(2) Excel 计算。计算存款天数需要用到存款日期和计算本息和的日期，Excel 中两个日期直接相减就可得到 2 个日期之间相差的天数（见表 1 -5）。

表 1 -5　　活期存款利息计算表

	A	B	C	D
1	活期存款利息计算			
2	计算日期	2013 -9 -23		
3	年利率	2. 40%		
4	存款日期	存款金额	本息和	计算公式（C 列计算公式）
5	2012 -1 -5	560. 00	583. 09	= B5 * (1 + B3 * (B2 - A5)/365)
6	2012 -10 -10	890. 00	910. 37	= B6 * (1 + B3 * (B2 - A6)/365)
7	2013 -6 -30	765. 00	769. 28	= B7 * (1 + B3 * (B2 - A7)/365)
8	合计	2215. 00	2262. 73	= SUM(C5 : C7)

在这里使用了 Excel 的相对引用和绝对引用技巧。可以看出，C 列中计算本息和的计算公式都相似，仅单元格引用不同，但变化有规律，在 Excel 中，当有大量的相似公式需要输入时，一般可只输入第 1 个计算公式，在输入时对各个公式中要变化的单元格引用（如存款额的单元格引用）使用相对引用，而各个计算公式中不变化的单元格引用（如年利率）使用绝对引用，输入完第 1 个计算公式后，将这个单元格中的计算公式复制到其余对应的单元格中即可。

二、名义利率与实际利率的计算

例题三：如果贷款 1000 元的年名义利率为 7. 2%，每月末计息 1 次，请问在复利计算的情况下：

(1) 1 年年末时应归还的本息和是多少？

(2) 年实际利率是多少？

(1) 方法一：

①计算原理。年计息 12 次的年名义利率 $i^{(12)} = 7.2\%$，每月的计息利率则为 $\frac{i^{(12)}}{12} = 0.6\%$，每个月月末根据月初的本息和计算本月末时的本息和，即：

月末本息和 = 月初本息和 ×(1 + 月计息利率)

原始贷款额就是 1 月初的本息和，1 月末的本息和是 2 月初的本息和，依此类推，最后 1 个月月末的本息和就是年末时就归还的本息和。

年实际利率的计算是以1年的实际利息除以贷款额得到，即：

$$\text{年实际利率} = \frac{\text{年末贷款本息和} - \text{贷款额}}{\text{贷款额}} \times 100\%$$

②Excel 计算，如表 1－6 所示。

表 1－6　　实际利率与名义利率的关系

	A	B	C
2	实际利率与名义利率的关系		
3	年名义利率	7.20%	B 列计算公式
4	月实际利率	0.60%	= B3/12
5	月	月末本息和	
6	贷款金额	1000.00	
7	1	1006.00	= B6 * (1 + B4)
8	2	1012.04	= B7 * (1 + B4)
9	3	1018.11	= B8 * (1 + B4)
10	4	1024.22	= B9 * (1 + B4)
11	5	1030.36	= B10 * (1 + B4)
12	6	1036.54	= B11 * (1 + B4)
13	7	1042.76	= B12 * (1 + B4)
14	8	1049.02	= B13 * (1 + B4)
15	9	1055.31	= B14 * (1 + B4)
16	10	1061.65	= B15 * (1 + B4)
17	11	1068.02	= B16 * (1 + B4)
18	12	1074.42	= B17 * (1 + B4)
19	年实际利率	7.44%	= (B18 - B6)/B6

（2）方法二：

①计算原理。根据月计息利率（即月实际利率）$\frac{i^{(12)}}{12} = 0.6\%$，及复利计算公式，有：

$$\text{年末贷款本息和} = \text{贷款额} \times (1 + \text{月计息利率})^{12}$$

根据实际利率与名义利率的关系，可得年实际利率：

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{7.2\%}{12}\right)^{12} - 1$$

②Excel 计算，如表 1－7 所示。

表 1-7 实际利率与名义利率的关系

	A	B	C
21	实际利率与名义利率的关系		
22	项目	值	计算公式
23	贷款额	1000.00	
24	年名义利率	7.20%	
25	年末贷款本息和	1074.42	= B23 * (1 + B24/12)^12
26	年实际利率	7.44%	= (1 + B24/12)^12 - 1

可以看出，两种方法得到的最终结果是相同的。第（1）种方法的计算过程清晰，可以看出贷款本息和每月末的变化过程，更清楚名义利率与实际利率的区别，名义利率用于计算 1 个度量期中，m 次支付（计息）的每 1 次应支付（计息）的利息，而实际利率则是根据 1 个度量期中贷款取得的全部利息与贷款额之比；第（2）种方法则可以根据名义利率直接计算出 1 个度量期末的贷款本息和，及根据实际利率与名义利率的关系，可根据名义利率直接计算出对应的实际利率。

第三节 较复杂的计算问题

一、存款时间问题

例题四：设年利率为 5%，现存入 2000 元，在复利率计算情况下，需要存多少时间才能使本利和达到 4000 元？

这是一个在一定利率情况下，存款需要多少时间才能翻一番的问题。这个问题同样可以用两种方法来解决。

（1）方法一：

①计算原理。根据初始存款额及复利计算原理计算每 1 年年末的本息和，直到某 1 年年末的本息和达到或超过原始存款额的 2 倍，这样就可估计出大致需要的时间长度。

②Excel 计算，如表 1-8、图 1-8 所示。