平面连杆机构的几何综合

张 世 民 编

清华大学精密仪器系机械设计教研室

一九八一年四月

目　　录

前言

连杆机构的综合，是一个较为复杂和困难的问题，这主要是由于连杆机构所具有的运动是低付的约束数（即限制数）要比高付为多，从而给连杆机构的运动尺度的综合带来较多的困难（反之，例如凸轮机构，由于它的主要运动付是高付，其约束数较少，因此比较容易设计出所需要的轮廓尺寸）；此外，连杆机构的构件运动形式和连杆曲线具有很大的多样性，可供工程设计广泛采用，因此直到今天，连杆机构的综合问题仍受到很大的重视和广泛的研究。

连杆机构综合所解决的问题，大致分为两类：

(1)再现已知轨迹的问题，即利用连杆曲线来实现所需要的已知轨迹。

(2)再现从动构件的已知位移的问题。从动构件可以是作平面运动的连杆，这时所研究的是连杆对固定坐标系（包括机架）的几何位置问题；从动构件也可以是从动的连架杆，这时所研究的是从动连架杆的位移与主动件位移之间的相对关系问题。

由于以上内容极为丰富，我们只讨论再现从动构件的已知位移的问题，而且以连杆对机架的几何位置问题为主要内容。

连杆机构的综合方法，一般有几何图解法和解析法两大类。几何图解法求解简单。作图醒目，几何概念清晰而具体，但所求结果的精度较低，而且有时作图超出图纸之外。解析法（又称"代数法"）则所得结果精确，但比较抽象，而且计算工作繁重（近年来由于计算机的迅速发展和推广，因此解析法日益受到重视）。最近几十年来，这两种综合方法有相互渗透的趋势，以达到取长补短的

作用。我们这里主要以几何图解法为基础来讨论连杆机构的位置综合问题。

在19世纪20年代，德国学者L. 布尔迈斯特（L. Burmester）就在F. 雷诺（F. Reuleaux）学派的基础上，对平面图形（连杆平面）在平面运动中的有限接近位移的运动几何学，作了首创性的研究（与运动学不同之点在于：在运动中研究运动要考虑时间因素，而在运动几何学中则撇开时间因素来研究构件的运动）。他是机构综合几何学派的奠基人。

现在我们来讨论所谓“Burmester问题”。

对于连杆机构中作平面一般运动的连杆来说，它固然可以视为是一个无限大的连杆平面，但是该连杆平面毕竟还是要通过两个铰链来与两个连架杆铰接之后实现其运动的。显然，这两个铰链点是作圆弧运动的(直线运动可视为圆弧运动的特例)。

给定了连杆平面的若干个指定位置后，这时，机构综合的问题就在于找出当连杆平面位于给定的若干位置时，其上某一点能位于一个圆弧上，则该点就是与连架杆u铰接点，而该圆弧的中心则是连架杆的固定转轴，圆弧的半径则是该架杆的长度。

在图1中，连杆平面S的位置，可由其上的任意两个点C和D的位置来完全确定。我们以C_1、D_1；C_2、D_2；C_3、D_3；……等点给定连杆

图1

平面的各个相继位置 S_1，S_2，S_3 ……。

在 S_1 上任选一点 A_1。当平面S依次运动到 S_2、S_3……等位置时，A_1 点将依次占有 A_2，A_3 ……等位置。

布氏提出了如下的问题：能否在平面S上找出一个A点，使它的 A_1、A_2、A_3……等点（这些点放在称为“相关点”）位于一个圆上。

在给定平面3个位置 S_1 S_2 和 S_3 的情况下，不论在 S_1 上选取哪一点 A_1，总称与另两个相关点 A_2 和 A_3 位于一个圆上，因为通过3个点总能作出一个圆，如图1所示的圆 K_A。

如果给定平面4个位置 S_1 S_2 S_3 和 S_4，则通过 S_1 上任一选定点 A_1 及其另两相关点 A_2 和 A_3 的圆，一般情况是不通过该点的第四个位置 A_4 的。但是布氏论证了：在位置 S_1 上总能找到这样一些 A_1 点的几何位置线，这些点能够与它们各自的相关点 A_2 A_3 和 A_4 位于一个圆上。由于 A_1 连同其余的 A_2 A_3 和 A_4 可位于一个圆上，是圆周上的点，因此称为“圆周点”或“圆点”，而这些 A_1 点的几何位置线，则算之为“圆周点曲线”，一般简称为“圆点曲线”。相应的圆心（称为“圆心点”或“中点”）例如图1中的 A_0）的几何位置线则称为“圆心曲线”（或“中心曲线”、中点曲线”）。这两种曲线又统称为“布氏曲线”。

对于平面的5个位置 S_1、S_2 S_3 S_4 和 S_5 来说，布氏论证了符合5点共圆的 A_1 点，可能有4个、2个或者没有。这些 A_1 点称为“布氏点”，而各相应圆的圆心则称为“布氏圆心”。

平面的给定位置数目多于5个时，一般找不到所需的A_1点

本教材以第二章（给定连杆平面三个位置）中的极三角为基础，以第三章（给定连杆平面四个位置）中的对极四边形和圆心曲线和圆点曲线为重点，分别讨论有关几何综合的一些基本理论。

第一章

§1—1、极点和连杆平面的转角

图1—1（长60mm×宽 65mm)

设给定连杆平面的两个位置S_1和S_2，这两位置用线段AB的两个位置A_1B_1和A_2B_2表示（图1—1），则由运动学可知，由位置1到位置2的运动，可以通过一个转动来实现，它所绕之转的中心P12，称为“转动极”或“极点”，或者简称为“极”。它是运动平面上位移为零的点，因此也可以认为是属于固定平面点。它位于线段A_1A_2和B_1B_2的中垂线a_{12}和b_{12}的交点处。

这时，运动平面上任一直线都转过相同的角度，我们记为φ_{12}（恒取小于180°的值）。因此

$$\varphi_{12}=\angle A_1P_{12}A_2=\angle B_1P_{12}B_2 \qquad (1-1)$$

反之，如果从这两位置的后一位置2转向前一位置1时，极点位置仍旧占有原先的位置（即P_{12}和P_{21}重合），但转动方向改变了，这时

$$\varphi_{21}=\angle A_2P_{21}A_1=\angle B_2P_{21}B_1=-\varphi_{12} \qquad (1-2)$$

由图1—1的作图也可以得知：由极点P_{12}对前一位置1的A_1点（或B_1）点所作射线$P_{12}A_1$（或$P_{12}B_1$），按φ_{12}的方向转过$\frac{\varphi_{12}}{2}$后，将与中垂线a_{12}（或b_{12}）重合；反之，如果把后一位置的A_2（或B_2）所联射线$P_{12}A_2$（或$P_{12}B_2$）按$-\frac{\varphi_{12}}{2}$或$\frac{\varphi_{21}}{2}$转动后，也将与中垂线a_{12}（或b_{12}）重合。

如果平面上线段AB的运动图1—2（a）所示，过A_1A_2和B_1B_2

图1—2

两线段所作的两条中垂线互相重合，则极点P_{12}由A_1B_1和A_2B_2两方向线的交点决定。这时的转角φ_{12}式（1—1）或（1—2）仍然适用。

如果两给定线段A_1B_1和A_2B_2互相平行，如图1—2（b）所示，则极点P_{12}与无限远点重合，绕这个无限远极点的转动就是从位置1到位置2的移动，该移动矢量用S_{12}表示。

§1—2、等视角定理

图1—3表示一个铰接四杆机构的两个位置。按§1—1节作出连杆AB的极点P_{12}以及连杆的转角φ_{12}。

由图显然可以看出，与连杆上的铰链点A(圆点）相铰接的连架杆，它的固定转轴A_0（圆心点）在中垂线a_{12}上，同理，铰链B的连架杆3的固定转轴B_0在中垂线b_{12}上。因此，如果选定连杆平面上的点A和B作为圆点连杆铰链点，则在给定两个位置A_1B_1和A_2B_2之后，作出A_1A_2和B_1B_2的中垂线a_{12}和b_{12}，则在a_{12}线（包括越过P_{12}点的延长线）上取任一点A_0作为连架杆1的固定轴，而在b_{12}线（包括越过P_{12}点的延长线）上取任一点B_0作为一连架杆2的固定轴，则得出所需机构的尺度。这里，中垂线a_{12}和b_{12}是圆心点的几何位置线。显然，圆点A和B是任选的，因可得无穷多解；此外，当选定了圆点A和B之后，圆心点A_0和B_0可在中垂线a_{12}和b_{12}上分别任意选取，又可得到无穷多个解。

图1—3

由上述的几何关系，可以得到一些重要的角度关系。以图1—3实践所示的机构第一位置为例来加以讨论。中垂线a_{12}和 b_{12}分别平分$\angle A_1P_{12}A_2=\angle B_1P_{12}B_2=\varphi_{12}$，因此

$$\angle A_1P_{12}A_0=\angle B_1P_{12}B_0=\frac{\varphi_{12}}{2} \qquad (1-3)$$

此式表明：以极点P_{12}为中心，射线A_1P_{12}转到与射线A_0P_{12}相重合时的转角，大小相等（等于 $\frac{\varphi_{12}}{2}$），而且方向与φ_{12}相同。

换句话说，两个连架杆对极点所张的角度相等（等于$\frac{\varphi_{12}}{2}$），而且角度度量的方向相同。这就是等视角关系。

又由图1—3可知：

$$\angle A_1P_{12}A_0+\angle A_0P_{12}B_1=\angle A_1P_{12}B_1,$$

$$\angle A_0P_{12}B_1+\angle B_1P_{12}B_0=\angle A_0P_{12}B_0$$

但由于 $\angle A_1P_{12}A_0=\angle B_1P_{12}B_0$ 所以

$$\angle A_1P_{12}B_1=\angle A_0P_{12}B_0$$

这一等角关系可叙述如下：以极点P_{12}为中心，射线A_1P_{12}转到与射线B_1P_{12}相重合时的转角，同时射线A_0P_{12}转到与射线B_0P_{12}相重合时的转角，大小相等，方向与φ_{12}相同，换句话说，连杆与固定件对极点的张角相等，而且角度度量的方向相同。这也是等视角关系。

上述二个等视角关系，可以归结如下：四连杆机构每组对边杆的铰链中心与极点联线所 之角，分别相等。而且角度度量的方向相同。

当机构运动到第二位置时，上述等视角关系仍属有效。

如果圆心点B_0选在中垂线b_{12}的越过极点P_{12}的延长射线上，如图1—4所示，则上述的等角关系仍然成立。例如射线A_1P_{12}绕P_{12}转过角$\frac{\varphi_{12}}{2}$后与射线A_0P_{12}重合，而射线B_1P_{12}绕P_{12}也转过角$\frac{\varphi_{12}}{2}$后与射线B_0P_{12}（的延长线）重合。

但是，如果以两连架杆A_1A_0和B_1B_0对极点P_{12}所张的角度（视角）来看，二者似乎互为补角，即分别为$\frac{\varphi_{12}}{2}$和$\pi-\frac{\varphi_{12}}{2}$；但要注意，此时射线$B_1P_{12}$是以$-\varphi_{12}$的方向转到射线$B_0P_{12}$的，这与前述“角度度量方向相同”的性质不符。因此，如果均按同

转动，其结果将总是等角关系，从而排除了有时是互补的情况。换句话说。我们规定：角度的度量，不仅包含它们的大小，而且包含度量的方向。

图1—4

§1－3、给定连杆两个位置时，考虑附加条件的设计

给定连杆两个位置时，所得的解是无穷多的，因此还可以增加一些其它的条件来从中得到所需的机构尺寸，例如可以附加曲柄条件，使曲柄为最短构件，并满足最短与最长件的长度之和小于另两件长度之和；可以附加双曲柄的条件，使固定件为最短件，并满足构件长度之和的要求，也可以附加传动角不小于某规定值的条件；或者给定连杆上某点的速度方向；等等，下面用两个例子来说明给定连杆上某点速度方向时的机构尺寸的确定。

㈠给定连杆两位置，并要求连杆上C点在该两位置时的速度方向为t_1t_1和t_2t_2，见图1－5。

根据所给连杆上两铰链点A和B的两个位置A_1B_1和A_2B_2，作出中垂线a_{12}和b_{12}。如果未给定C点两个位置上的速度方向线t_1t_1和t_2t_2，则可在中垂线a_{12}和b_{12}上分别任意选取圆心点A_0和B_0。但现在给定了t_1t_1和t_2t_2方向线，则要求连杆两个位置的速度瞬时中心P_1P_2分别在t_1t_1和t_2t_2的垂线n_1n_1和n_2n_2上。

为此，先考虑连杆在位置1时的情况。为使连杆上C_1点的速度方向为t_1t_1，则瞬时中心P_1应在n_1n_1上。我们先暂时在n_1n_1上选任一点P_1'作为瞬时中心，则此点应为机构位置1上两个连架杆（及其延长线）的交点，因此两连架杆的固定铰链（即圆心点）A_0'和B_0'应分别在A_1P_1'和B_1P_1'线上；但是它们又应分别在中垂线a_{12}和b_{12}上，因此在a_{12}与A_1P_1'的交点上找到圆心点A_0'，在b_{12}与B_1P_1'的交点上找到圆心点B_0'。此时位置1的机构为

$A_0'A_1B_1B_0'$该机构运转到位置2时，构为$A_0'A_2B_2B_0'$；此时连杆的瞬时速度中心在两连架杆$A_0'A_2$和$B_0'B_2$的交点P_2'。如果此时P_2'点正好位于C_2点速度的垂直方向线n_2n_2上，则此机构尺寸即为所要求的解。但一般来说，一次试求不会得到所需要的解。可多次在n_1n_1线改选其它的瞬心P_1'，重复上述作图过程，直至机构位置2时的连杆瞬心P_2'落在n_2n_2线上，从而求得所需机构。

图1—5

在n_1n_1线上连续改换P_1'点，则相应地求出一系列的P_2'点，这些点组成曲线K，曲线K与n_2n_2的交点P_2即为符合要求的瞬心。此时相应的机构如图1—6所示，最后所得的圆心点为A_0和B_0两个位置的连杆瞬心相应地分别为P_1P_2。

如果在n_1n_1线的左边部分选取位置1的瞬心$\bar{P}_1'$，则将得到曲线K的另一分支$\bar{K}$。如果在n_1n_1线上选取$\bar{P}_1$，则位置2的瞬心$\bar{P}_2$将正好落在n_2n_2线上，所得另一解的圆心点为$\bar{A}_0$和$\bar{B}_0$。

㈡利用给定连杆两位置和速度方向的求解方法设计近似直线轨迹的机构。

鹤式起重机要求连杆上的吊钩点走出近似直线轨迹。这一问题可以利用上述方法简单地求解。

图1—6中给定了连杆AB的两个位置A_1B_1和A_2B_2，其上的连杆点C位于C_1和C_2，它们的联线C_1C_2为水平线YY，设计的要求是C_1点和C_2点的速度方向应沿水平线YY，这样可以使连杆上的C点轨迹的近似直线段尽量增长一些。因此，要求连杆在位置1时的瞬心P_1位于水平线YY的垂线n_1n_1上，位置2时的瞬心P_2位于YY线的垂线n_2n_2上。

作出连杆两位置的极点P_{12}，在n_1n_1线上任选一点P_1'作为瞬心，则连接$P_1'A_1$和$P_1'B_1$，分别与中垂线a_{12}和b_{12}相交，从而求得中点A_0'和B_0'，进而根据A_2和B_2两点求得位置2的瞬心P_2'。

由于P_2'未位于n_2n_2线上，故在n_1n_1线上另取一系列的瞬心点P_1'相应求得一系列的瞬心P_2'，联成曲线K。曲线K与n_2n_2线的交点即应为所需的位置2 的瞬心P_2，从而得出所需机构如图中的$A_0A_1B_1B_0$。

曲线K与n_2n_2线的另一交点$\overline{D}_2$也能满足运动要求，其机构为$\overline{A}_0A_1B_1\overline{B}_0$，但此机构布局不合理（吊钩C点位于固定杆两铰链（圆心点）$\overline{A}_0$和$\overline{B}_0$的下方，故舍去。

图1—6