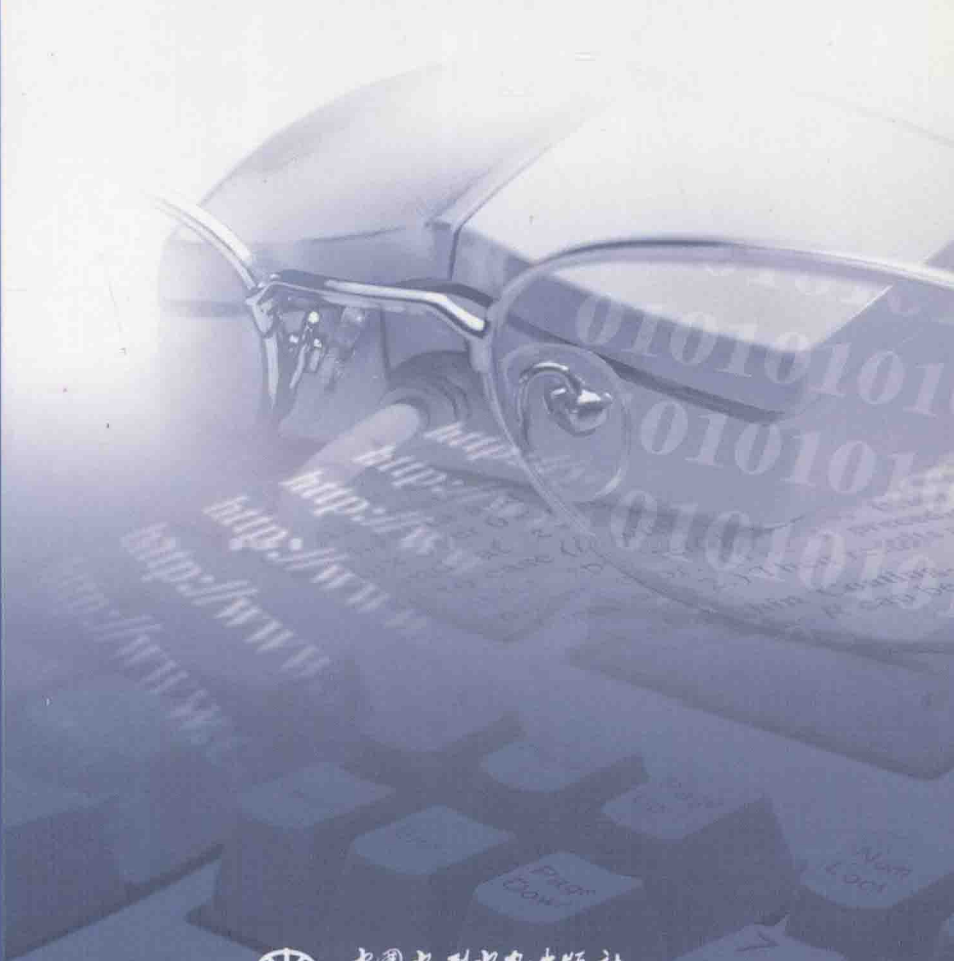
21世纪高职高专规划教材

工科、经管类等适用

应用高等数学(上册)

主 编 杨 勇 副主编 黄庆波 吴白旺 吕兴汉 何建平 主 审 唐艺川

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANGUIHUAJIAOCAI



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高职高专规划教材

应用高等数学

（上册）

主　编　杨　勇

副主编　黄庆波　吴白旺　吕兴汉　何建平

主　审　唐艺川

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学课程教学改革的经验，从高职高专教育人才培养目标出发，根据教育部高等职业教育教学课程的基本要求与课程改革精神，适度降低难度，注重贯彻循序渐进的教学原则的基础上编写完成的。

本书内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、空间解析几何、无穷级数、线性代数、概率统计初步。

本书内容充实、体系新颖。特别是“数学实验”部分，强调理论与实际相结合，书内选择的基础实验十分有利于高职高专类学生对基础知识的学习与理解，以培养他们借助现代技术手段解决经典数学中的问题和处理实际问题的能力。

本书可作为高等职业技术学院、高等专科学校的通用教材、成人教育的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学. 上册 / 杨勇主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2010.7
21世纪高职高专规划教材
ISBN 978-7-5084-7580-6

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第106969号

策划编辑：寇文杰　　责任编辑：张玉玲　　封面设计：李佳

书　　名	21世纪高职高专规划教材 应用高等数学（上册）
作　　者	主　编　杨　勇 副主编　黄庆波　吴白旺　吕兴汉　何建平 主　审　唐艺川
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京蓝空印刷厂
规　　格	170mm×227mm　16开本　总25.75印张　总515千字
版　　次	2010年7月第1版　2010年7月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
总 定 价	45.00元（上册、下册）

序

新世纪的中国正处于新型工业化时期，对人才的需求呈多元化、多层次的态势，这为高职高专学校的人才培养带来了新的契机。经济与社会的发展要求高职高专毕业生具有基础理论知识适度、技术应用能力强、知识面较宽、素质较高等特点，因此，在培养优秀理论型、研究型人才的同时，对应用型技术人才的培养就成为高职高专教育的首要目标。瞄准这个目标办好高职高专，既能满足人才市场的需要，又能促进高职高专学校自身的蓬勃发展。

高等数学是高职高专院校的一门主要的基础课程，出版一本适合高职高专教学需要的高等数学教材，无疑是有着重大意义的事情。值得庆幸的是，本教材具有以下几点明显的优势和特色：

1. 科学性

教材的整个体系保持传统高等数学的严谨，涵盖所有必需的知识点。内容安排上由浅入深、符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑性强，通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握。

2. 先进性

本教材在遵循教育部《高职高专教育基础课程基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》精神的前提下，充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科新思想、新趋势的材料，增加了“数学实验”和“数学家简介”等部分。特别是“数学实验”部分，不仅充实了教材内容，而且有助于提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件处理实际问题的能力。

3. 实用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具。本教材在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、教材的安排，以及例题、习题的选配等方面，都注重从教学的实际要求出发，遵循教学活动自身的规律性，从而有利于师生的教与学。

总之，本教材编出了新意和特色，相信它在数学教学和教学改革中一定能发挥巨大的作用，同时也希望它在大家的关爱中不断地得到完善。

前　　言

高职高专教育的根本任务是培养生产、建设和管理第一线的技术应用型人才。为发挥高等数学在21世纪培养技术应用型人才中的作用，培养和提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，根据教育部高等职业教育教学课程的基本要求与课程改革精神而编写了此教材。本书是由重庆科创职业学院数学教研室，根据教育部制定的《高职高专数学教学的基本要求》，总结、分析、吸收一些高职高专院校高等数学教学改革的经验，遵循“必需，够用”的原则编写而成的。在编写过程中，我们针对高职院校课时少、学生的基础差等问题，适当地降低了难度，调整了例题、习题的配置，以保证学生对基本知识点的训练和掌握。

本书的特色在于：①保持传统高等数学的知识点；②增加 Mathematica 软件操作内容；③每个章节内容中各含一节数学实验；④采用模块化设计，补充了空间解析、线性代数和概率统计初步，以便于高职高专院校中不同的专业（如经济管理、电子、计算机、工程类）选用；⑤提高学生对数学源流的认识，每章后附有数学家简介；⑥每章开头给出本章学习目标，有利于学生明确本章学习知识点的方向，同时每章后给出了本章重点知识的小结，有利于学生对本章的学习进行系统的复习。

本书编写分工具体如下：杨勇主持全书编写、统稿工作；唐艺川负责全书审稿工作，杨勇编写第5、6、10章；黄庆波编写第1、2章；吴白旺编写第3、4章；吕兴汉、海敏娟编写第9、11章；何建平、李洁平编写第7、8章。本书适合作为高等专科院校、高等职业技术院校、成人教育、网络教育各专业的数学教材，也可作为工程技术人员的参考书。

在本书编写过程中，我们得到了学院领导、机电分院领导以及教研室同行的大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中疏漏和不妥之处在所难免，敬请各位专家及广大读者批评指正。

编　者

2010年5月

目　录

上册

下册

第1章　函数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象．本章我们将在中学数学的基础上，进一步阐明函数的一般定义、函数的简单性质，以及与函数有关的一些基本知识．

在本章中，首先介绍函数及相关的一些概念，然后介绍数学软件 Methematica 的入门知识．

本章学习目标

- 理解函数的概念及基本性质．
- 了解初等函数、基本初等函数的概念．
- 了解复合函数的概念，掌握复合函数的分解．

1.1　函数的概念与性质

一、常量和变量

在我们观察各种现象或过程的时候，常常会遇到一些不同的量，如长度、面积、体积、时间、速度、温度等．我们遇到的量一般可以分为两种：一种是在整个变化过程进行中一直保持不变的量，这种量称为常量；另一种是在变化过程中发生变化的量，这种量称为变量．例如，一个物体作匀速直线运动，则它的速度是常量，而时间与位移的大小都是变量．又如，一块金属圆板，由于热胀冷缩，在受热的过程中它的半径与面积在不断变大，冷却时又不断变小．因此，这块圆板的半径与面积都是变量．但在整个过程中，面积与半径的平方之比，即圆周率 π 始终不变，是一个常量．

我们应该指出，变量和常量的概念是相对的，某些变量在相应的限制条件下可以看成常量．

通常用字母 a、b、c、α、β、γ 等表示常量，用字母 x、y、z、t、u、v 等表示变量．

二、邻域

定义 1.1.1　设 $a,\delta \in R$，且 $\delta > 0$，我们把开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$．其中 a 和 δ 分别称为这个邻域的中心和半径．由于 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 当且仅当 $a-\delta<x<a+\delta$，亦即 $|x-a|<\delta$，因此有

$$U(a,\delta)=\left\{x\middle|\ |x-a|<\delta\right\}.$$

如果把这个邻域的中心a去掉，则称它为a的δ去心邻域，记作$\overset{o}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\left\{x\middle|0<|x-a|<\delta\right\}$$

这里邻域的半径δ虽然没有规定其大小，但在使用中一般总是取为很小的正数．并且大多数情形下并不一定要指明δ的大小，这时我们往往把a的邻域和a的去心邻域分别简化为$U(a)$和$\overset{o}{U}(a)$．

三、函数的概念

客观世界中的事物都是相互依赖、相互变化、相互联系着的，这种相互关系在数学上的表现形式之一就是所谓的函数关系．

定义 1.1.2 设D是一非空的实数集，f是一个对应法则，如果对于D中的每一个x，按照对应法则f，都有唯一确定的实数y与之对应，则称对应法则f为定义在集合D上的一个函数关系，或称变量y是变量x的函数，记作$y=f(x),\ x\in D$．其中x为自变量，y为因变量．

集合D称为函数f的定义域，与D中x相对应的y称为f在x的函数值，全体函数值的集合$W=\left\{y\middle|y=f(x),x\in D\right\}$称为函数$f$的值域．

函数的定义域和对应法则是确定函数的两个关键要素，因此两个函数相同或相等，是指它们有相同的定义域和对应法则（即在相同的定义域中，每个x所对应的函数值相同）．

例如$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$是不相同的两个函数，因为它们的对应法则不相同．又如$y=1$与$y=\dfrac{x}{x}$，虽然在它们共同有定义的范围内对应法则相同，但因为它们的定义域不同，所以也是两个不相同的函数．

两个相同的函数，其对应法则的表达形式也可能不同．例如$y=1$与$y=\sin^2 x+\cos^2 x$，从表面形式上看不相同，但却是同一个函数．

再如，当x、u的变化范围相同时，函数$y=2x+3$和$y=2u+3$就是相同的函数．由此可见，函数与表示其变量的符号是无关的．

四、函数的表示法

函数的表示方法一般有以下3种：

（1）解析法（又称公式法）．此种表示方法将函数关系用数学式子给出，例如$y=2x+1$等．

（2）图像法．一般情况下，它是平面上的一条曲线．例如，气象站的温度记录器，记录了温度T与时间t的函数关系，如图1.1.1所示．

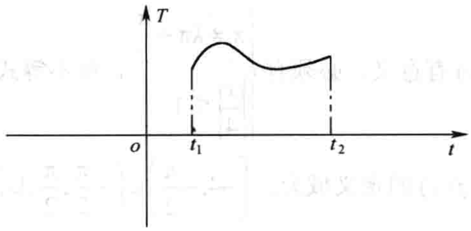


图 1.1.1

（3）列表法．自变量 x 与因变量 y 的函数关系通过表格反映出来，例如火车时刻表就是用列表的方法给出了这种函数关系．

一个函数也可以在其定义域的各子区间用不同的解析式来表示，通常称这种形式的函数为分段函数，虽然分段函数表达式分几段，但它表达的是一个函数，不要理解为多个函数，其定义域是所有段中自变量取值的全体．例如符号函数

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

和取整函数（不超过 x 的最大整数）

$$[x]=n,\ n\leqslant x<n+1,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots$$

都是分段函数，且它们的定义域都是整个实数集．

五、函数定义域的确定

确定函数定义域时，首先应考虑如下几点：

（1）分式的分母不为 0．

（2）偶次方根下的式子为非负数．

（3）对数函数的真数大于零，且底数大于零且不等于 1．

（4）正切函数的变量不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（k=0，±1，±2，…）．

（5）余切函数的变量不等于 $k\pi$（k=0，±1，±2，…）．

（6）反正弦函数的变量与反余弦的变量的绝对值小于等于 1．

例 1.1.1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\sqrt{4-x^2}$ 的定义域．

解 要使函数 $f(x)$ 有意义，必须 $x\neq0$ 且 $4-x^2\geqslant0$．解不等式得

$$-2\leqslant x\leqslant 2,$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\,|\,0<|x|\leqslant 2\}$．

例 1.1.2 求函数 $f(x)=\tan x+\arcsin\dfrac{x}{4}$ 的定义域．

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有 $\begin{cases} x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \left|\dfrac{x}{4}\right| \leqslant 1 \end{cases}$，解不等式组得：$-4 \leqslant x \leqslant 4$ 且 $x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为：$\left[-4, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, 4\right]$.

六、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任意的 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

一个函数如果在其定义域上有界，就称它为有界函数．有界函数的图形必位于两条直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间．例如，$y = \sin x$ 是有界函数，因为在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内，$|\sin x| \leqslant 1$．又从图 1.1.2 不难看出，函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界；函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内仅有下界，因此说它们都是无界函数.

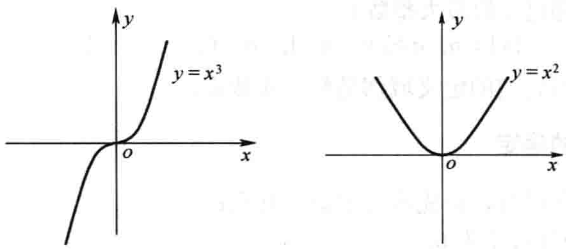


图 1.1.2

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对区间 I 上的任意两个数 x_1、x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$（$f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（单调减少），简称单增（单减）.

单增和单减的函数统称为单调函数.

例如函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单增的．因为对任意 $x_1, x_2 \in R$，有 $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$.

当 $x_1 < x_2$ 时，由于 $x_1 - x_2 < 0$，而且

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} x_2^2 > 0,$$

故总有 $f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$.

又如函数 $g(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单减，在区间 $[0,+\infty)$ 上单增，但在整个区间内却不是单调的，这说明函数的单调性和区间 I 有关.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 关于原点对称，如果对任意 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)\ （f(-x)=f(x)）$$

则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 上为奇函数（偶函数），简称函数 $f(x)$ 是奇函数（偶函数）.

例如，函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数， $g(x)=x^2$ 是偶函数.

在坐标平面上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，使对任意 $x\in D$ 总有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的一个周期. 一个周期函数一定有无穷多个周期. 通常我们所说的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=x-[x]$ 是周期为 1 的周期函数，函数 $y=\sin x$ 是周期为 2π 的周期函数. 请读者注意，常数函数 $f(x)=C$ 可以看成是以任意实数为周期的周期函数，且它没有最小正周期.

七、反函数

设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，如果把 y 看成自变量，把 x 当作函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的关系式 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上，我们总是用 x 表示自变量，y 表示函数，因此，我们常把函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$，并称为函数 $y=f(x)$ 的矫形反函数（简称反函数），记作 $y=f^{-1}(x)$.

例 1.1.3 求函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数.

解 把上式改写为 $e^{2x}-2ye^x-1=0$，视其为 e^x 的二次方程，可解出 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$. 由于 $e^x>0$，而 $y-\sqrt{y^2+1}<0$，所以右端取负号的情况应舍去，故得到 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，从而 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

按习惯写法，所求的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

由上面的求解过程知道，由函数给出的方程一定有一个正根和一个负根，所以，函数 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的值域为 R，所以它的反函数是:

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad x\in R$$

习题 1.1

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sin x+1$ 是（　　）.

A. 偶函数　　B. 奇函数
C. 单调函数　　D. 有界函数

2. 下列函数中，是奇函数的是（　　）.

A. $\sin x$　　B. 2^x
C. $x^2+\sin x$　　D. $x+1$

3. 已知 $f(x)=x^2-1$，则 $f(x-1)=$（　　）.

A. x^2-2x　　B. x^2+2x
C. x^2+1　　D. x^2-1

二、填空题

1. 设 $f(x)=x+\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\neq 0$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+x^2$ 的奇偶性是________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sin x}$ 的定义域为________.

三、计算题

1. 求函数 $y=\lg(x+2)$ 的反函数.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1, & x\geqslant 0\\ 1-3x, & x<0\end{cases}$，求 $f(1)$ 和 $f(-1)$.

3. 下列哪些是周期函数，是的话求出其最小正周期：

（1）$y=\sin^2 x$　　（2）$y=\cos(x+2)$　　（3）$y=\cos\dfrac{1}{x}$

四、求下列函数的定义域：

（1）$y=\cos\sqrt{3x}$　　（2）$y=\arcsin(2x+3)$
（3）$y=\lg\cos 2x$　　（4）$y=\sin(2x+1)$

五、证明题

函数 $f(x)=2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是增函数.

1.2 初等函数

一、基本初等函数及其图像

称常量函数、指数函数、幂函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数为基本初等函数. 下面就来简单讨论一下这 6 类基本初等函数.

1. 常量函数 $y=C$（C 为常数）

2. 指数函数 $y=a^x$（$a>0,\ a\neq 1$）

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意 $x\in R$，总有 $a^x>0$ 且 $a^0=1$，所以指数函数的图形位于 x 轴的上方且通过点 $(0,1)$，值域为 $(0,+\infty)$．当 $a>1$ 时为单增函数；当 $0<a<1$ 时为单减函数，其图形如图 1.2.1 所示.

在今后的学习中，常用的指数函数是 $y=\mathrm{e}^x$，其中 $\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$ 为无理数.

3. 对数函数 $y=\log_a^x$（$a>0,\ a\neq 1$）

它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，所以它的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．当 $a>1$ 时为单增函数；当 $0<a<1$ 时为单减函数. 它的图形位于 y 轴的右方且通过点 $(1,0)$，如图 1.2.2 所示.

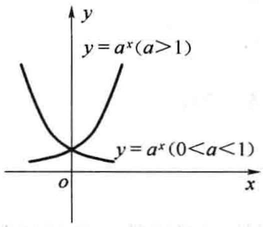


图 1.2.1

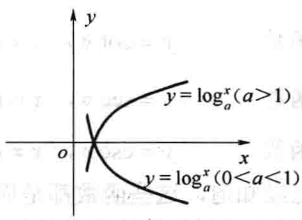


图 1.2.2

工程数学中常常用到以 e 为底的对数函数 $y=\log_{\mathrm{e}}^x$，称为自然对数，并简记为 $y=\ln x$；以 10 为底的常用对数函数 $y=\lg x$ 等.

4. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha\in R$）

它的定义域：当 α 是正整数时为 $(-\infty,+\infty)$，当 α 是负整数时为不为零的一切实数. 当 α 是有理数或无理数时情况比较复杂. 但不论 α 为何值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，并且它的图形总经过点 $(1,1)$．$\alpha=-1$、-2、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$ 的图形如图 1.2.3 所示.