专著 MONOGRAPH

ZHUANZHU

有限元技术及其在油井管工程中的应用

曹银萍　窦益华　著

ZHUANZHU

西北工业大学出版社

有限元技术及其在油井管工程中的应用

曹银萍　窦益华　著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书共分三篇，11章。第1篇（第1～4章）介绍了有限元法的工作原理，包括有限元法的理论基础、平面问题和空间问题的有限元法求解；第2篇（第5～6章）首先介绍了常用的有限元分析软件——ANSYS，接着以常见结构为例说明了采用ANSYS软件进行结构分析的过程，包括ANSYS软件的安装、界面、操作说明以及处理平面应力、平面应变、轴对称、梁、桁架、模态、瞬态响应、疲劳等典型问题的步骤；第3篇（第7～11章）结合油田现场，借助ANSYS软件分析了油井管工程中常见的强度安全性问题，包括在非均匀地应力作用下套管应力分析、磨损及射孔套管强度分析、振动对管体及油管接头的影响分析。

本书可以作为高校本科生和研究生以及油田科研人员的参考书，亦可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

有限元技术及其在油井管工程中的应用/曹银萍，窦益华著．—西安：西北工业大学出版社，2013.8

ISBN 978－7－5612－3797－7

Ⅰ.①有…　Ⅱ.①曹…②窦…　Ⅲ.①有限元分析—应用—油管—管道工程　Ⅳ.①TE931

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第207105号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号　　**邮编**：710072
电　　话：（029）88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：兴平市博闻印务有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　　1/16
印　　张：15.5
字　　数：324千字
版　　次：2013年8月第1版　　2013年8月第1次印刷
定　　价：42.00元

前　言

有限元分析方法(简称有限元法)最早应用于航空、航天领域,用来求解线性结构问题。有限元法的核心思想是将结构离散化,将实际结构离散为有限数目的规则单元系统,即将无限自由度的求解问题转化为有限自由度的求解问题,通过建立数学方程获得有限自由度的解,这样可以解决许多采用理论分析无法求解的复杂工程问题。

ANSYS 软件是由美国 ANSYS 公司开发的一套功能强大的有限元通用分析程序,具有强大的前处理、求解和后处理能力,目前广泛应用于航空、航天、汽车、船舶、机械等科学应用领域。ANSYS 把 CAD、CAE、CAM 技术集成于一体,可以满足用户设计、计算、制造全过程的使用要求。

生产过程中,井下套管和油管在一定的载荷作用下工作,不可避免会受到损伤甚至破坏。例如,钻井磨损和完井射孔后,套管强度会有所降低;在交变载荷作用下,油管受到振动载荷作用,一方面会加大管体的工作应力,另一方面会造成螺纹接头的“松扣”现象。这些复杂的工程问题用常规的解析法难以解决,而借助 ANSYS 有限元软件强大的结构分析功能往往使问题迎刃而解。

全书共分三篇,11 章。第 1 篇(第 1～4 章)介绍了有限元法的工作原理,包括有限元法的理论基础、平面问题和空间问题的有限元法求解;第 2 篇(第 5～6 章)首先介绍了常用的有限元分析软件——ANSYS,接着以常见结构为例说明了采用 ANSYS 软件进行结构分析的过程,包括 ANSYS 软件的安装、界面、操作说明以及处理平面应力、平面应变、轴对称、梁、桁架、模态、瞬态响应、疲劳等典型问题的步骤;第 3 篇(第 7～11 章)根据油井管工程需要,借助 ANSYS 软件分析了油井管工程中常见的强度安全性问题,包括在非均匀地应力作用下套管应力分析、磨损及射孔套管强度分析、振动对管体及油管接头的影响分析。

本书第 1～6,10,11 章由曹银萍编写,第 7～9 章由窦益华编写,全书由窦益华审定。

本书油井管有限元分析部分是国家科技重大专项 2011ZX05046—04《超深超高压高温油气井试油、完井及储层改造配套技术应用示范》、中石油重大专项 2010E—2015《超深超高压高温气井试油完井及储层改造技术》和 2010E—2109《碳酸盐岩安全、快速、高效钻完井技术》研究成果之一,是西安石油大学科研创新团队“井下与地面装备安全评价及监控技术研究”的团队工作成果之一,同时受中石油油气勘探重点工程技术攻关项目《超深高温高压含硫化氢储层及复杂岩性低渗储层试油(含储层改造)配套技术研究》项目及大庆油田有限责任公司、塔里木

油田分公司、新疆油田分公司、西南油气田分公司、大港油田分公司、吉林油田分公司、华北油田分公司科研项目支持，得到了中国石油天然气集团公司高级技术专家张福祥教授等很多合作油田领导与技术人员的指导和帮助，在此一并表示感谢。

本书可以作为高等学校本科生和研究生以及油田科研人员的参考书，亦可供相关工程技术人员参考。

由于水平有限，时间仓促，书中缺点和错误之处在所难免，欢迎读者就书中问题与笔者进行讨论。电子邮箱：caoyinping029@163.com 或 yhdou@vip.sina.com。

著　者

2013 年 6 月

目　录

第 1 篇　有限元技术及工作原理

第2篇 ANSYS有限元软件及结构分析实例

第3篇 有限元技术在油井管工程中的应用

第 1 篇

有限元技术及工作原理

第 1 章　有限元法简介

科学技术领域的许多问题，如固体力学中的位移场和应力场分析、传热学中的温度场分析、流体力学中的流体分析以及振动特性分析等，都可看做是一定边界条件和初始条件下求解其基本微分方程或微分方程组的问题。只有几何形状相当规则、方程（组）性质相对简单的问题能用解析法精确求解，而对于大多数实际工程问题，由于求解对象几何形状的复杂性、问题的非线性，一般不能得到问题的解析解。要解决这类问题，一种方法是简化假设，将方程和几何边界简化为能够处理的问题，获得在简化条件下的解，但过多或不合理的简化可能会导致结果不正确；另一种方法是借助计算机，采用数值计算方法求解复杂工程问题，获得问题的近似解。

目前，解决实际工程问题的主要数值计算方法包括两大类：有限差分法（Finite Difference Method，FDM）和有限元法（Finite Element Method，FEM）。使用有限差分法，需要针对每一节点写微分方程，并且用差分代替导数。在此过程中产生一组线性方程，求解便可得到问题的近似数值解。使用有限差分法很容易求解简单的工程问题，但对于具有复杂几何条件和边界条件的实际工程问题就无能为力了。相比之下，有限元法使用直接公式法、最小总势能法和加权余量法等公式而不是微分方程建立系统的代数方程组，而且，有限元法假设代表每个元素的近似函数是连续的、元素间的边界是连续的，通过结合各单独的解产生系统的完整解，适用于各类工程问题的求解。有限元法已成为当今工程问题中应用最广泛的数值计算方法。

1.1　有限元法的起源与发展

约 300 年前，牛顿和莱布尼茨发明了积分法，证明了该运算具有整体对局部的可加性。虽然积分运算与有限元技术对定义域的划分是不同的，前者进行无限划分而后者进行有限划分，但积分运算为实现有限元技术提供了一个理论基础。

牛顿和莱布尼茨发明积分法之后约 100 年，著名数学家高斯提出了加权余量法及线性代

数方程组的解法。前者被用来将微分方程改写为积分表达式，后者被用来求解有限元法所得出的代数方程组。

19世纪末至20世纪初，数学家瑞利和里兹首先提出可对全定义域运用展开函数来表达其上的未知函数。1915年，数学家伽辽金提出了选择展开函数中形函数的伽辽金法，该方法被广泛地用于有限元。1943年，数学家库朗德第一次提出了可在定义域内分片地使用展开函数来表达其上的未知函数，这实际上就是有限元的做法。至此，实现有限元技术的第二个理论基础也已确立了。

到了20世纪50年代，由于工程上的需要，特别是高速电子计算机的出现与应用，有限元法才在结构分析矩阵方法的基础上迅速发展起来，并得到愈来愈广泛的应用。

随着力学理论、计算数学和计算机技术等相关学科的发展，有限元理论也得到不断完善，成为工程分析中应用十分广泛的数值分析工具，特别是在现代机械工程、车辆工程、航空航天工程、土建工程中发挥着越来越大的作用，是现代CAE技术的核心内容之一。

由于有限元法的通用性，它已经成为解决各种问题的强有力和灵活、通用的工具。不少国家编制了大型通用的计算机程序，主要有德国的ASKA，英国的PAFEC，法国的SYSTUS，美国的ABAQUS、ADINA、ANSYS、BERSAFE、BOSOR、COSMOS、ELAS、MARC和STARDYNE等，而且涉及有限元分析的杂志也有几十种之多。

1.2 有限元法中的常用术语

1. 节点

用于确定单元形状、表述单元特征及连接相邻单元的点称为节点。节点是有限元模型中的最小构成元素。多个单元可以共用一个节点，节点起连接单元和实现数据传递的作用。

2. 单元

有限元模型中每一个小的块体称为一个单元。根据其形状的不同，可以将单元划分为线段单元、三角形单元、四边形单元、四面体单元和六面体单元等。一个有限元程序提供的单元种类越多，该程序功能就越强大。ANSYS程序提供了100多种单元种类，可以模拟和分析绝大多数的工程问题。

3. 载荷

工程结构受到的外在施加的力或力矩称为载荷，包括集中力、力矩及分布力等。在通常的结构分析过程中，载荷为力、位移等；在温度场分析过程中，载荷指温度等；在电磁场分析过程中，载荷是指结构所受的电场和磁场作用。

4. 边界条件

边界条件是指结构在边界上所受到的外加约束。在有限元分析过程中，施加正确的边界条件是获得正确的分析结果和较高的分析精度的关键。

5. 初始条件

初始条件是结构响应前所施加的初始速度、初始温度及预应力等。

1.3 有限元法的基本思想

有限元法与其他求解边值问题近似方法的根本区别在于它的近似性仅限于相对小的子域中。20世纪60年代初，首次提出结构力学计算有限元概念的Clough教授形象地将其描绘为“有限元法＝Rayleigh Ritz法＋分片函数”。即有限元法是Rayleigh Ritz法的一种局部化情况，不同于求解满足整个定义域边界条件的允许函数的Rayleigh Ritz法。有限元法将函数定义在简单几何形状（如二维问题中的三角形或任意四边形）的单元域上，且不考虑整个定义域的复杂边界条件，这是有限元法优于其他近似方法的原因之一。有限元法的基础是变分原理和加权余量法。其基本思想可归纳如下：

首先，把连续的实际结构离散为有限单元，并在每一个单元中设定有限节点，从而将连续体看作仅在节点处相连接的一组单元的集合体。

其次，用每个单元内所假设的近似函数分块地表示全求解域内待求的未知场变量。每个单元内的近似函数用未知场变量函数在单元各个节点上的数值和与其对应的插值函数表示。由于在连接相邻单元的节点上，场变量函数应具有相同的数值，因而将它们用作数值求解的基本未知量，将求解原函数的无穷自由度问题转换为求解场变量函数节点值的有限自由度问题。

最后，通过和原问题数学模型（基本方程和边界条件）等效的变分原理或加权余量法，建立求解基本未知量的代数方程组或常微分方程组，应用数值方法求解，从而得到问题的解答。

工程问题一般是物理问题的数学模型，数学模型是带有边界条件、初始条件和初值条件的微分方程。有限元法是由离散的单元通过一个个微分方程组来模拟真实的物理结构，通过一些基本定律和原理（如力的平衡、变形协调方程、应力应变方程）推导出来的。对于不同物理性质和数学模型的问题，有限元求解法只是具体公式推导和运算求解不同，但基本步骤是相同的——把作为对象的物体分割成单元，再输入边界条件；把各个单元的结构特性用公式近似；把这些小的部分组合起来就可得到全部力的平衡方程式；使用给出的边界条件解出平衡方程式；从结果求得单元内部的应力、应变、位移等。

1.4 有限元法求解问题的基本步骤

1. 建立积分方程

根据变分原理或方程余量与权函数正交化原理，建立与微分方程初始值问题等价的积分表达式。

2. 区域单元剖分

根据求解区域的形状及实际问题的物理特点，将区域剖分为若干相互连接、不重叠的单元。区域单元剖分是采用有限元法的前期准备工作，这部分工作量较大，除了给计算单元和节点进行编号和确定相互之间的关系之外，还要表示节点的位置坐标，同时还需要列出自然边界

和本质边界的节点序号和相应的边界值。

3. 确定单元基函数

根据单元中节点数目及对近似解精度的要求，选择满足一定插值条件的插值函数作为单元基函数。有限元方法中的基函数是在单元中选取的，由于各单元具有规则的几何形状，在选取基函数时可遵循一定的法则。

4. 单元分析

将各个单元中的求解函数用单元基函数的线性组合表达式进行逼近，再将近似函数代入积分方程，并对单元区域进行积分，可获得含待定系数的代数方程组。

5. 总体合成

得出单元有限元方程之后，将区域中所有单元有限元方程按一定法则进行累加，形成总体有限元方程。

6. 边界条件的处理

一般边界条件有三种形式：本质边界条件(狄里克雷边界条件)、自然边界条件(黎曼边界条件)和混合边界条件(柯西边界条件)。对于自然边界条件，一般在积分表达式中可自动得到满足。对于本质边界条件和混合边界条件，需按一定法则对总体有限元方程进行修正满足。

7. 解有限元方程

根据边界条件修正的总体有限元方程组，是含所有待定未知量的封闭方程组，采用适当的数值计算方法求解，可求得各节点的函数值。

简言之，采用有限元法求解实际问题的主要步骤：建立模型，推导有限元方程组，求解有限元方程组，数值结果表述。

1.5　有限元法在结构分析中的应用

有限元结构分析主要用于研究各种工程机械结构及零部件的以下性能：

1. 线性静力学分析

计算在固定载荷作用下结构的响应，即由于稳态外载荷引起的系统或部件的位移、应力和应变。结构静力分析还可以计算固定不变的惯性载荷以及可以近似等价为静力作用的随时间变化的载荷对结构的影响。

2. 非线性力学分析

非线性力学分析包括几何非线性(大变形、大应变、应力强化等)、材料非线性(塑性、黏弹性、黏塑性、蠕变等)、接触非线性(面面/点面/点点接触、柔体/柔体刚体接触、热接触)和单元非线性(死/活单元、非线性阻尼/弹簧单元、预紧力单元等)。

3. 动力学分析

动力学分析分为模态分析、谐响应分析、瞬态动力学分析和谱分析。

4. 稳定性分析

计算屈曲载荷和确定屈曲模态形状的特征值屈曲分析以及非线性屈曲分析。

5. 耦合场分析

耦合场分析位移(应力应变)场、电磁场、温度场和流场等耦合场的分析。

6. 耐久性分析

耐久性分析包括疲劳与断裂分析。

1.6　有限元法的发展趋势

1. 单纯的结构力学到多物理场

有限元分析方法最早是从结构化矩阵分析发展而来的，逐步推广到板、壳和实体等连续体固体力学分析。从理论上已经证明，只要用于离散求解对象的单元足够小，所得的解就可足够逼近于精确值。因此近年来有限元方法已发展到流体力学、温度场、电传导、磁场、渗流和声场等问题的求解计算，最近又发展到求解几个交叉学科的问题。

2. 线性问题到非线性问题

随着科学技术的发展，线性理论已经远远不能满足设计的要求。例如建筑行业中的高层建筑和大跨度悬索桥的出现，就要求考虑结构的大位移和大应变等几何非线性问题；航天和动力工程的高温部件存在热变形和热应力，也要考虑材料的非线性问题；诸如塑料、橡胶和复合材料等各种新材料的出现，仅靠线性计算理论不足以解决遇到的问题，只有采用非线性有限元算法才能解决。

3. 增强的可视化建模和数据处理

早期有限元分析软件的研究重点在于推导新的高效率求解方法和高精度的单元。随着数值分析方法的逐步完善，尤其是计算机运算速度的飞速发展，整个计算系统用于求解运算的时间越来越少，而数据准备和运算结果的表现问题却日益突出。工程师在分析计算一个工程问题时，80%以上的精力都花在数据准备和结果分析上。因此，目前几乎所有的商业化有限元程序系统都有功能很强的前置建模和后置数据处理模块。在强调“可视化”的今天，很多程序都建立了对用户非常友好的 GUI(Graphics User Interface)界面，使用户能以可视图形方式直观、快速地进行网格自动划分，生成有限元分析所需数据，并按要求将大量的计算结果整理成变形图、等值分布云图，以便于极值搜索和所需数据的列表输出。

4. 与 CAD 软件的无缝集成

当今有限元分析系统的另一个发展趋势是与通用 CAD 软件的集成使用，工程师可以在集成的 CAD 和 FEA 软件环境中快捷地解决一个在以前无法应付的复杂工程分析问题。目前，几乎所有的商业化有限元软件都提供了和著名的 CAD 软件的接口，如 Pro/ENGINEER、Unigraphics、SolidEdge、SolidWorks、IDEAS、Bentley 和 AutoCAD 等软件。

第2章 有限元法中的理论基础

2.1 位 移 法

在有限元法中，选择节点位移作为方程基本未知量时称为位移法；选择节点力作为基本未知量时称为力法；取一部分节点力和一部分节点位移作为基本未知量时称为混合法。位移法易于实现计算自动化，在有限单元法中应用范围最广。采用位移法时，物体或结构物离散化之后，就可把单元总的一些物理量如位移、应变和应力等由节点位移来表示。这时，可以对单元中位移的分布采用一些能逼近原函数的近似函数予以描述。在工程上，许多问题需要求解弹性连续体的应力与应变分布状况。一般有二维平面应力或应变问题、轴对称问题、板弯曲问题、壳问题以及三维问题，对这些问题可以用位移法求解。

2.1.1 位移函数

单元 e 由节点 i,j,m 以及直线边界确定，该单元中任意一点的位移 δ 为

$$\boldsymbol{\delta}=\sum_{k=i,j,m}N_k\delta_k=[N_i \quad N_j \quad N_m]\begin{bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\\ \delta_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-1}$$

式中，$\boldsymbol{N}$ 为形函数；$\boldsymbol{\delta}^e$ 为单元的节点位移。

对于平面应力情况

$$\boldsymbol{\delta}=\begin{bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{bmatrix} \tag{2-2}$$

2.1.2 应变

利用单元中各点处已知的位移，可确定任意一点处的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\delta} \tag{2-3}$$

对于平面应力情况，线性算子 $\boldsymbol{L}$ 由位移关系式确定。

2.1.3 应力

一般情况下，单元边界内的材料承受初始应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$，则应力由真实应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 与初始应变之差引起。假设材料为线弹性材料，则应力与应变之间的关系是线性的。

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{2-4}$$

对于平面应力情况,应力记为

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} \tag{2-5}$$

弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 可由弹性力学理论得到

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x-\varepsilon_0&=\frac{1}{E}\sigma_x-\frac{\mu}{E}\sigma_y\\ \varepsilon_y-\varepsilon_0&=-\frac{\mu}{E}\sigma_x+\frac{1}{E}\sigma_y\\ \gamma_{xy}-\gamma_0&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

可得到

$$\boldsymbol{D}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\ \mu&1&0\\ 0&0&\dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{2-7}$$

2.1.4　等效节点力

物体离散化后,假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元的。但是对于实际的连续体,力是从单元的公共边传递到另一个单元中去的。因此,这种作用在单元边界上的表面力、体积力和集中力都需要等效地移到节点上去,也就是用等效的节点力来代替所有作用在单元上的力。用列阵 $\boldsymbol{F}^e$ 表示作用在单元上的集中力、分布载荷、体积力等静力等效的节点力。

$$\boldsymbol{F}^e=\begin{bmatrix}F_i^e\\ F_j^e\\ F_k^e\end{bmatrix} \tag{2-8}$$

2.2　加权余量法

2.2.1　微分方程的等效积分形式

工程或物理学中的许多问题,通常是以未知场函数应满足的微分方程和边界条件的形式提出来的。一般地,可以表示成未知函数 u 应满足的微分方程组

$$\boldsymbol{A}(u)=\begin{bmatrix}A_1(\delta)\\ A_2(\delta)\\ \vdots\end{bmatrix}\quad（在域\ \Omega\ 内） \tag{2-9}$$

$$\boldsymbol{B}(u)=\begin{bmatrix}B_1(\delta)\\B_2(\delta)\\\vdots\end{bmatrix}\quad(\text{在边界}\ \Gamma\ \text{上})\tag{2-10}$$

域 Ω 可以是体积域、面积域等，Γ 是域 Ω 的边界，如图 2-1 所示。

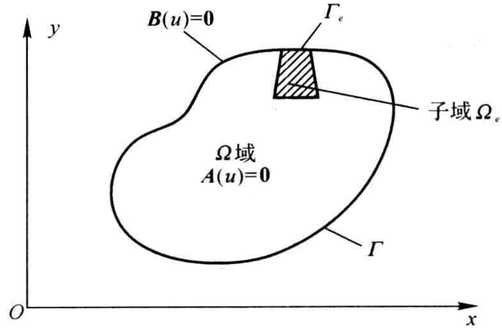

图 2-1　域 Ω 和边界 Γ

要求解的未知函数 u 可以是标量场（例如温度），也可以是几个变量组成的向量场（例如位移、应变、应力等）。$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是对于独立变量（例如空间坐标、时间坐标等）的微分算子。

由于微分方程式(2-9) 在域 Ω 中的每一个点都必须为零，因此有

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\Omega\equiv\int_{\Omega}[v_1A_1(\boldsymbol{u})+v_2A_2(\boldsymbol{u})+\cdots]\,\mathrm{d}\Omega\equiv 0\tag{2-11}$$

式中，$\boldsymbol{v}=[v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]^{\mathrm{T}}$ 是函数向量，其个数等于方程的数目。

式(2-11) 是与微分方程式(2-9) 完全等效的积分形式。若积分方程式(2-11) 对于任意的 $\boldsymbol{v}$ 都能成立，则微分方程式(2-9) 必然在域内任一点都得到满足。假如微分方程 $\boldsymbol{A}(u)$ 在域内某些点或一部分子域中不满足，即出现 $\boldsymbol{A}(u)\neq\boldsymbol{0}$，则可以找到适当的函数 $\boldsymbol{v}$ 使积分方程式(2-11) 亦不等于零。

同理，假如边界条件式(2-10) 亦同时在边界上每一个点都得到满足，则对于一组任意函数 $\bar{\boldsymbol{v}}$，下式应当成立：

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(u)\,\mathrm{d}\Omega\equiv\int_{\Omega}[\bar{v}_1B_1(u)+\bar{v}_2B_2(u)+\cdots]\,\mathrm{d}\Gamma\equiv 0\tag{2-12}$$

合并式(2-11) 和式(2-12)，得到如下积分表达式：

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(u)\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(u)\,\mathrm{d}\Gamma=0\tag{2-13}$$

对于所有的 $\boldsymbol{v}$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 都成立是等效于满足微分方程式(2-9) 和边界条件式(2-10)。将式(2-13) 称为微分方程的等效积分形式。

在式(2-13) 中，$\boldsymbol{v}$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 只是以函数自身的形式出现在积分中，因此对 $\boldsymbol{v}$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 的选择只需是单值的，并分别在 Ω 内和 Γ 上可积的函数即可。这种限制并不影响上述“微分方程的等效积分

形式”提法的有效性。u 在积分中还将以导数或偏导数的形式出现，它的选择将取决于微分算子 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 中微分运算的最高阶次。

2.2.2　加权余量法

采用使余量的加权积分为零来求得微分方程近似解的方法称为加权余量法（Weighted Residual Method，WRM）。加权余量法是求解微分方程近似解的一种有效方法。显然，任何独立的完全函数集都可以用来作为权函数。按照对权函数的不同选择得到不同加权余量的计算方法并赋予不同的名称，如配点法、子域法、最小二乘法、力矩法、伽辽金法等。

在求解域 Ω 中，若场函数 u 是精确解，则在域 Ω 中任意一点都满足微分方程式(2-9)，同时在边界 Γ 上任意一点都满足边界条件式(2-10)。但是对于复杂的实际问题，这样的精确解往往是很难找到的，因此人们需要设法找到具有一定精度的近似解。

对于微分方程式(2-9)和边界条件式(2-10)所表达的物理问题，假设未知场函数 u 可采用近似函数来表示。近似函数是一簇带有待定参数的已知函数：

$$u \approx \bar{u} = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i = Na \tag{2-14}$$

式中，a_i 是待定参数；n 是待定函数的个数；N_i 是称之为试探函数(或基函数、形式函数)的已知函数，它取自完全的函数序列，是线性独立的。所谓完全的函数系列是指任意函数都可以用次序列表示。近似解通常选择使之满足强制边界条件和连续性的要求。

加权余量法可以用于广泛的方程类型；选择不同的权函数，可以产生不同的加权余量法；通过采用合适的等效积分形式，可以降低对近似函数连续性的要求。如果近似函数取自完全的函数系列，并满足连续要求，当试探函数的项数不断增加时，近似解可趋近于精确解。但解的收敛性仍未有严格的理论证明，同时近似解通常也不具有明确的上、下界性质。变分原理和里兹方法可从理论上解决上述两方面的问题。

2.3　变分原理和里兹方法

如果微分方程具有线性和自伴随的性质，则不仅可以建立它的等效积分形式，并利用加权余量法求其近似解，还可以建立与之相等效的变分原理，并进而得到基于它的另一种近似求解方法，即里兹方法。

2.3.1　泛函与变分

设 $\{y(x)\}$ 为给定的某类函数，如果这类函数中的每个函数 $y(x)$ 都有某个数 H 与之对应，则称 H 为函数的泛函，记为 $H=H[y(x)]$，$y(x)$ 称为自变函数。

变分法是研究泛函数的极大值或极小值的一种方法，变分计算的目的就是把满足具体边界条件的极值曲线 $y=y(x)$ 找出来。