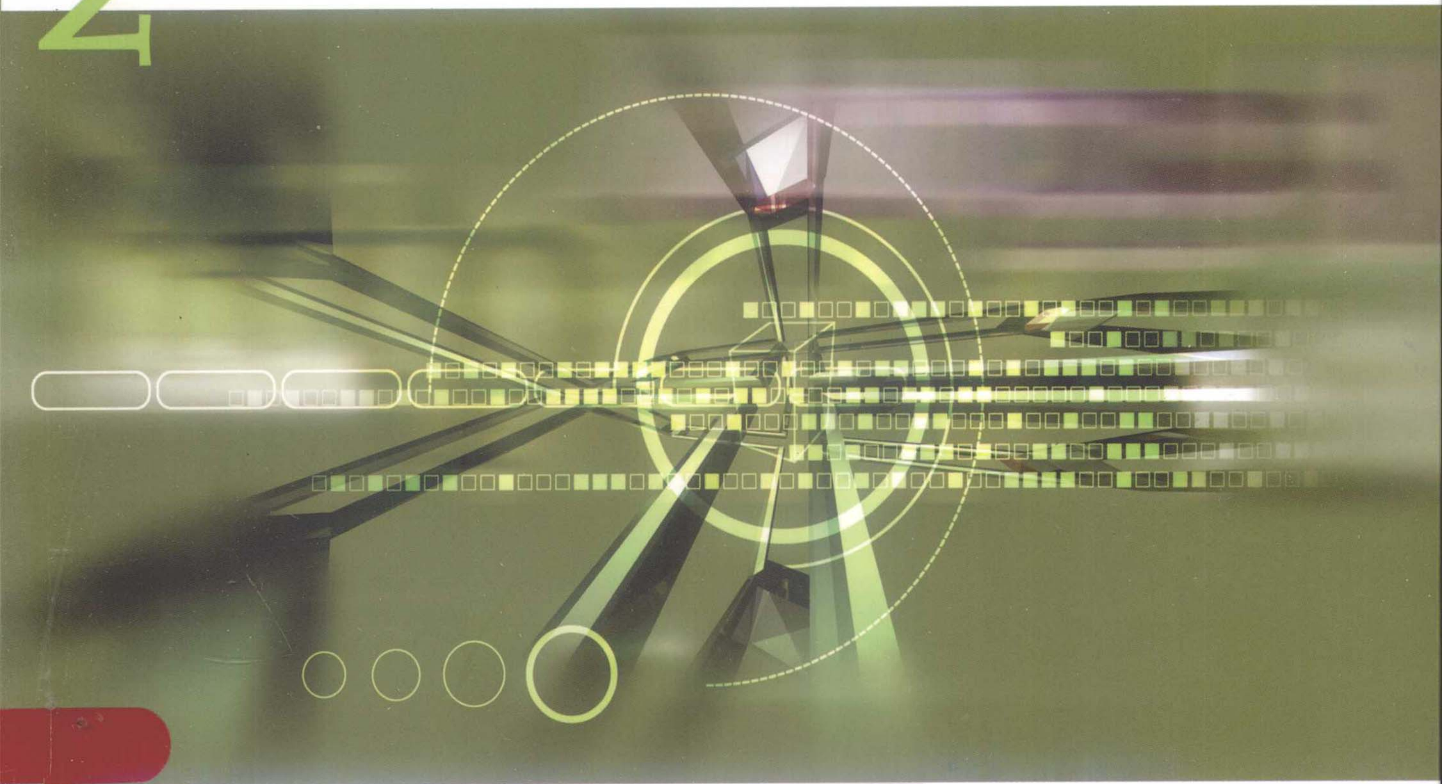
MO LUN

模论

姚海楼　平艳茹◎编著



北京工业大学出版社

模　　论

姚海楼　平艳茹　编著

北京工业大学出版社

内 容 提 要

本书从模论的基本概念开始，通过基本例子，逐步介绍模论的基本概念和基本理论。主要内容包括：模与同态，直积、直和与自由模，内射模与投射模，阿廷模与诺特模，局部环与模的直和分解，单模与半单模，根基与基座，张量积与平坦模，范畴等。

本书可作为高等院校数学专业的本科生、研究生的模论教材，也可供相关专业的教师和科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

模论／姚海楼，平艳茹编著．—北京：北京工业大学出版社，2014．2

ISBN 978－7－5639－3723－3

Ⅰ．①模…　Ⅱ．①姚…②平…　Ⅲ．①模－高等学校－教材　Ⅳ．①0153．3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 286948 号

模论

编　　著：姚海楼　平艳茹
责任编辑：李周辉
封面设计：何　强
出版发行：北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　100124）
010－67391722（传真）bgdcbs@sina.com
出 版 人：郝　勇
经销单位：全国各地新华书店
承印单位：徐水宏远印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：10．5
字　　数：202 千字
版　　次：2014 年 2 月第 1 版
印　　次：2014 年 2 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978－7－5639－3723－3
定　　价：18．00 元

前　　言

模是域上线性空间在一般环上的推广。由于表示论的兴起，模的作用越来越重要，现在已经成为数学领域，特别是代数学领域的重要研究工具。同时，模论本身也是一个重要的研究领域，有许多重要问题有待研究解决。因此，许多高校的数学专业，特别是代数学方向，或是单独开设模论课程，或是在相关课程里加入模论的基本内容。编写本书的目的就是系统地介绍模论的基本内容，方便学习和使用模论的基本知识。模论的内容很丰富，而本书的编写起点较低，只要读者学过线性代数和近世代数的基本内容，就能学习本书。本书许多定理和命题的证明也尽可能用简单的方法给出。

在本书的编写过程中，编者参照了一些相关文献，并参考了编者多年的教学经验。本书可作为模论的研究生课程教材，也可作为自学教材，适合数学专业高年级本科生、研究生及数学爱好者学习使用。通过对本书的学习，能使读者较为系统地打下模论的知识基础，为数学的其他分支领域，特别是代数学领域的学习提供方便。

本书的主要内容曾于1989年作为模论课程给河北大学的代数专业研究生讲过。近十余年来，在北京工业大学的代数学专业研究生的模论课上也讲授过其中的主要内容。

由于编者知识有限，书中疏漏及错误在所难免，敬请读者批评指正。

目　录

第1章 模与同态

学习此书的读者应该已经熟悉近世代数中的环与群以及线性代数的一些概念，本书将在这个基础上讲述模的理论。

1.1 模的定义

模的概念可看作是线性空间的概念的推广，只是把线性空间的基域改为有单位元的环，确切的定义如下：

定义 1.1.1 设 R 是有单位元的环，M 是加群，即 $(M, +)$ 是一个可换群。如果还有一个"右数乘"运算 $M \times R \subseteq M$ 满足如下性质：

(1) $(m_1 + m_2)r = m_1 r + m_2 r$,

(2) $m(r_1 + r_2) = mr_1 + mr_2$,

(3) $(mr_1)r_2 = m(r_1 r_2)$,

(4) $m \cdot 1 = m$

这里，$m, m_1, m_2 \in M$，$r, r_1, r_2 \in R$，1 是 R 的单位元；则称 M 是一个右 R – 模，并记为 M_R 或 $M = M_R$。即对于任意 $r \in R$，$m \in M$，M 中有唯一确定的元素与之对应，写为 mr。类似地，如果将"右数乘" mr 改写为"左数乘" rm，就可以得到左 R – 模的定义。

容易看出，如果 R 是交换环，那么右 R – 模可以看作是左 R – 模，因为此时只需定义 $rm = mr(r \in R, m \in M)$ 就可以了，反之亦然。因此，在交换环的情况下，右 R – 模与左 R – 模可以不加区别。

而且，右 R – 模与左 R – 模的理论是平行的，以后无特别说明，所涉及的 R – 模均是右 R – 模。

下面看几个例子：

1. 设 V 是域 P 上的线性空间，则 V 是一个右 P – 模。
2. 设 R 是一个有单位元的环，A 是 R 的右理想，则 A 是 R 的一个右 R – 模。

3. 设 F 是域 E 上的子域，则 E 是一个右 F－模。

4. 设 G 是加群，则 G 是一个右$\mathbb{Z}$－模（$\mathbb{Z}$ 是整数环）。因为若 k 是一个整数，$x \in G$,按通常倍数定义：

$$kx = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{k\text{个}} & \text{若 } k > 0 \\ 0 & \text{若 } k = 0 \\ -((-k)x) & \text{若 } k < 0 \end{cases}$$

容易验证它满足模定义的四个条件。

这就是说，每个加群都可看作是一个$\mathbb{Z}$－模，因此，通常对加群与$\mathbb{Z}$－模不加以区别。

5. 设 F 是一个域，$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，其他运算记为乘法，令

$$F(G) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i a_i \mid a_i \in F, g_i \in G \right\}$$

这里，$g_i a_i$ 是形式定义，没有具体定义，$F(G)$ 中两个元素相等，规定为

$$\sum_{i=1}^{n} g_i a_i = \sum_{i=1}^{n} g_i b_i \Leftrightarrow a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

我们再给 $F(G)$ 定义如下的“加法”与“数乘”运算：

$$\sum_{i=1}^{n} g_i a_i + \sum_{i=1}^{n} g_i b_i = \sum_{i=1}^{n} g_i (a_i + b_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_i a_i\right) k = \sum_{i=1}^{n} g_i (a_i k) \quad (k \in R)$$

容易验证，$F(G)$ 是一个以 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 为基的 F 上的线性空间，因而 $F(G)$ 是一个右 F－模。

下面介绍双模的概念，所涉及的模可以是左模，也可以是右模。

定义 1.1.2 假设 M 是 R－模又是 S－模（对这两者，M 的加法结构是保持一致的）。如果 M 对 R 的“数乘”与对 S 的“数乘”是可交换的，则称 M 是一个(S, R)－双模。比如，M 是右 R－模又是右 S－模，则有$(mr)s = (ms)r$，以上是对任意的 $m \in M$，$r \in R$，$s \in S$。

由此可见，(S, R)－双模可分同侧的（同是左或同是右的）与异侧的（一个是左模，另一个是右模）两类。对于异侧的，当需要表明侧向时，我们常以${}_S M_R$ 表示 M 为左 S－模且是右 R－模的双模。例子如下：

1. 每一个 R－模，都是一个$(\mathbb{Z}, R)$－双模。

2. 假设 S 是环 R 的中心，则每一个 R－模都是(R, S)－双模。

3. 设 R 是一个环，令 $M = R$，则 M 是(R, R)－双模。

4. 设 R 是一个非交换环，令 $M=R$，则 M 不是同侧 (R, R) - 双模。

类似域上的线性空间，容易证得环 R 上的模 M 中的元素运算满足如下简单性质：

(1) $O_M \cdot r = O_M$，$m \cdot O_R = O_M$，

(2) $-(mr) = (-m)r = m(-r)$，对任意的 $m \in M$，$r \in R$。

本书以后将 O_M 和 O_R 均简记为 O。

定义 1.1.3　一个代数是偶对 (A, K)，其中

(1) A 是一个环，

(2) K 是一个交换环，

(3) A 是一个右 K - 模，且满足

$$\forall a_1, a_2 \in A, k \in K[(a_1a_2)k = a_1(a_2k) = (a_1k)a_2].$$

注：如果 K 是域，则右 K - 模 A 为向量空间。这时，如果 A 是有限维的就称 A 为域 K 上有限维代数，或简称有限维代数。

习题 1.1

1. 证明：每一个加群 M 都是一个 $\mathrm{End}(M)$ - 模，这里 $\mathrm{End}(M)$ 是 M 的自同态环，即 $\mathrm{End}(M) = \{\sigma \mid \sigma: M \to M$ 为群同态$\}$。

2. 设 M 是一个右 R - 模，f 是环 S 到 R 的一个环同态，且 $f(1_S) = 1_R$，这里的 1_S 与 1_R 分别是 S 与 R 的单位元，如果定义 $ms = mf(s)$ $(m \in M, s \in S)$，证明：M 是一个右 S - 模。

3. 设 M 是一个加群，证明：M 是一个右 R - 模的充分必要条件是存在一个环同态，即 $f: R \to \mathrm{End}(M)$：$f(1) = I_M$（I_M 是恒等映射）。这里的 $\mathrm{End}(M)$ 是 M 的自同态环。

4. (1) 设 M 是一个右模，令

$$(O:_R M) = \{r \in R \mid mr = 0, \ \forall m \in M\}$$

证明：$(O:_R M)$ 是 R 的一个理想。

(2) 假设 I 是含于 $(O:_R M)$ 内的任一个理想，定义

$$m(r+I) = mr (m \in M, r \in R)$$

证明：M 也是一个 $R/\mathbb{Z}$ - 模。

5. 设 M 是一个加群，k 是一个整数，证明：M 是一个 $\mathbb{Z}/(k)$ - 模的充要条件是 $kM = 0$。这里，$kM = \{km \mid m \in M\}$。

1.2 子模、子模的交与和

定义 1.2.1 设 M 是一个 $R-$模，A 是 M 的一个子集，如果 A 对于 M 的加法和 M 与 R 的数乘来说也构成一个 $R-$模，则称 A 是 M 的一个子模，M 称为 A 的扩模。

下面我们来引进几个记号。

符号 $A \hookrightarrow M$ 表示子模关系，符号“$:\Leftrightarrow$”及“$:=$”表示“定义为”；符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”；符号“ϕ”表示空集；符号“$\exists$”表示“存在”；符号“$\wedge$”表示“并且”；符号“$\forall$”表示“任意”。

$A \underset{\neq}{\hookrightarrow} M :\Leftrightarrow A$ 是 M 的真子模。

$A \not\hookrightarrow M :\Leftrightarrow A$ 不是 M 的子模。

注意，$A \not\hookrightarrow M$ 并不一定有 $A \not\subset M$。

引理 1.2.1 令 M 是 $R-$模，如果 A 是 M 的一个子集，$A \neq \varphi$，则下列命题等价：

(1)$A \hookrightarrow M$；

(2)A 是加群 M 的子加群，且对 $\forall a \in A$，$\forall r \in R$，有 $a \cdot r \in A$；

(3) $\forall a_1$，$a_2 \in A$，则 $a_1 + a_2 \in A$；$\forall a \in A$，$r \in R$，有 $a \cdot r \in A$。

例子如下：

1. 每个子模 M 有两个平凡子模 O 和 M。

2. 设 M 是任意一个模，$\forall m_0 \in M$，则 $m_0 R = \{m_0 r \mid r \in R\}$ 是 M 的一个子模，称之为循环子模。

3. 如果模 M 是域 K 上的向量空间，则子模为子空间。

定义 1.2.2 对于环 R 上的模 M，有

(1)模 $M = M_R$ 叫作循环的$:\Leftrightarrow \exists\, m_0 \in M$，$m = m_0 R$。

(2)模 $M = M_R$ 叫作单的 $:\Leftrightarrow M \neq 0 \wedge \forall A \hookrightarrow M$，$A = 0$ 或 $A = M$。

(3)子模 $A \hookrightarrow M$ 叫作极小的或极大的 $:\Leftrightarrow 0 \underset{\neq}{\hookrightarrow} A \wedge \forall B \hookrightarrow M$，$B \hookrightarrow A \Rightarrow B = 0$；或者 $A \underset{\neq}{\hookrightarrow} M \wedge \forall B \hookrightarrow M$，$A \underset{\neq}{\hookrightarrow} B \Rightarrow B = M$。

引理 1.2.2 M 是单的 $\Leftrightarrow M \neq 0 \wedge \forall m \in M \quad (m \neq 0 \Rightarrow mR = M)$。

证明：

“$\Rightarrow$”：令 $m \neq 0$，则 $m = m.1 \in mR$，于是 $mR \neq 0$，从而 $mR = M$。

“$\Leftarrow$”：令 $0 \underset{\neq}{\hookrightarrow} A \hookrightarrow M$，$0 \neq a \in A$，则 $aR = M$，但 $aR \hookrightarrow A$，于是 $A = M$。

例子如下：

1. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 不含有极小子模，但它含有极大子模。

2. 在 n 维向量空间 V_K 中，若视 V_K 为 K－模，则它的极小子模是一维子空间，极大模是 $(n-1)$ 维子空间。

3. 如果 K 是域，则 K_K 是单模。

4. 令 $R := K_n$ 是系数在体 K 内的 $n \times n$ 方阵环。以后将证明，尽管 R 是单的，但 R_R 却不是 $(n>1)$。

引理 1.2.3 令 T 是模 M 的子模集，则

$$\bigcap_{A \in T} A = \{ m \in M \mid \forall A \in T (m \in A) \}$$

是模 M 的子模。

由子模的定义即可得证。由此便知子模的交仍是子模。我们再次约定 $\bigcap_{A \in \varphi} A := M$，得出推论 1.2.1。

推论 1.2.1 $\bigcap_{A \in T} A$ 是 M 的含于所有 $A \in T$ 内的最大子模。

例子如下：

1. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$

2. $\bigcap_{p\text{是素数}} p\mathbb{Z} = 0$

由子模的定义还可得到引理 1.2.4。

引理 1.2.4 令 X 是模 M_R 的子集，则

$$A = \begin{cases} \{ \sum_{i=1}^{n} x_j r_j \mid x_j \in X \wedge r_j \in R \wedge n \in N \} & X \neq \phi \\ 0 & X = \phi \end{cases}$$

是 M 的一个子模。

定义 1.2.3 称引理 1.2.4 中定义的模为由 X 生成的子模，记为 $\mid X)$。易知引理 1.2.5：

引理 1.2.5 $\mid X)$ 是 M 的含有 X 的最小子模。即

$$\mid X) = \bigcap_{C \hookrightarrow M, X \subset C} C$$

当 M 是 (S, R)－双模时，由 M 的子集 X 生成的子模为

$$[X] = \begin{cases} \{ \sum_{i=1}^{n} s_j x_j r_j \mid x_j \in X \wedge s_j \in S \wedge r_j \in R \wedge n \in N \} & X \neq \phi \\ 0 & X = \phi \end{cases}$$

同上面一样，$\mid X)$ 是 M 的含有 X 的最小子模，亦即

$$\mid X) = \bigcap_{C \hookrightarrow M, X \subset C} C$$

定义 1.2.4 令 $M=M_R$，则有

(1)模 M 的子集 X 叫作 M 的生成集:⇔ $\langle X\rangle=M$。

(2)一个模 M 叫作有限生成的:⇔模 M ∃有限生成集。

(3)模 M 的一个集 X 叫作自由的:⇔对每个有限子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}\subset X$ $(x_i\neq x_j, i\neq j, i, j=1, 2, \cdots, m)$，由 $\sum_{i=1}^{m} x_i r_i=0(r_i\in R)$，可得 $r_i=0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$。

(4)模 M 的一个子集 X 叫作 M 的基:⇔X 是 M 的生成元集且 X 是自由的。

显然，一个模 M 是循环的 ⇔ 模 M ∃一个生成元素。

引理 1.2.6 令 $X\neq\varphi$ 是 $M=M_R$ 的生成集，则 X 是基 ⇔ 对每个 $m\in M$，表示法 $m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j$，$x_j\in X$，$r_j\in R$ 在以下意义下是唯一的：

若 $m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j=\sum_{j=1}^{n} x_j r'_j \wedge x_i\neq x_j$，对 $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，一定有 $r_j=r'_j(j=1, 2, \cdots, n)$。

证明：

“⇒”：如果有

$$m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j=\sum_{j=1}^{n} x_j r'_j \wedge x_i\neq x_j, i\neq j\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

则 $0=\sum_{j=1}^{n} x_j(r_j-r'_j)$。

由于 X 是自由的，有 $r_j-r'_j=0$，从而 $r_j=r'_j(j=1, 2, \cdots, n)$。

“⇐”：令 $\sum_{j=1}^{n} x_j r_j=0\wedge x_i\neq x_j$，对 $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$，还有 $0=\sum_{j=1}^{n} x_j\cdot 0$，于是 $r_j=0$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，亦即 X 是自由的。

注：当 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$ 是有限生成集$(x_i\neq x_j, i\neq j)$。有 X 是基 ⇔ 对每个 $m\in M$，系数 $r_j\in R$ $(m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j)$ 是唯一确定的。

例子如下：

1. 每个模 M 都有平凡生成元集 M 自身。
2. 如果 R 是环，则 $\{1\}$ 是 R_R 的基。

定义 1.2.5 令 $\wedge=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 M 的一个子模集，则

$$\sum_{i\in I} A_i=\langle\bigcup_{i\in I} A_i\rangle$$

叫作子模 $\{A_i \mid i\in I\}$ 的和。

如果 $\wedge=\{A_1, \cdots, A_n\}$，则 $\sum_{j=1}^{n} A_j$ 的每个元素可以写成 $\sum_{j=1}^{n} a_j(a_j\in A_j)$，式中未出

现的 a_j 可以用0代替。注意，这个式子不是唯一的。

定理 1.2.1　如果模 M_R 是有限生成的，则 M 的每一个真子模均含在 M 的一个极大子模内。

证明： 令 $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\}$ 是 M 的生成元集，令 $A \hookrightarrow\neq M$，则集合 $\Gamma := \{B \mid A \hookrightarrow B \hookrightarrow\neq M\}$ 是非空集(因 $A \in \Gamma$)，而且在集合的包含关系下是一个偏序集。

为应用佐恩引理，必须证明 Γ 的每个全序子集 T 均在 Γ 内有一个上界。为此，令

$$C = \bigcup_{B \in T} B;$$

则有 $A \hookrightarrow C$，若 $C = M$，则 $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\} \subset C$，于是一定存在 $B \in T'$，满足 $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\} \subset B$，所以有 $B = M$，矛盾。因此，证明了 $C \in \Gamma$。由佐恩引理，φ 内存在极大元 D。为证 D 是 M_R 的极大子模，令 $D \hookrightarrow L \hookrightarrow\neq M_R$，则 $L \in \Gamma$。由于 D 是极大的，所以 $D = L$。

推论 1.2.2　每个有限生成模 $M(\neq 0)$ 有极大子模。

证明： 因 $M \neq 0$，且 M 是有限生成的，故 $A = \{0\}$ 是 M 的一个真子模，由定理1.2.1即可得证。

下面我们叙述有限生成的另外一种等价形式。

定理 1.2.2　模 M_R 是有限生成的，当且仅当对 M 的每一个具有性质 $\sum\limits_{i \in I} A_i = M$ 的子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$ 存在一个有限子集 $\{A_i \mid i \in I\}$(即 $I_0 \subset I$，I_0 是有限的)使得 $\sum\limits_{i \in I} A_i = M$。

证明： 令 M 是有限生成的，亦即 $M = m_1R + m_2R + \cdots + m_tR$。由于 $\sum\limits_{i \in I} A_i = M$，而每个 m_j 是有限多个元素的和，故存在有限子集 $I_0 \subset I$，使得 $m_1, m_2, \cdots, m_t \in \sum\limits_{i \in I_0} A_i$。于是有

$$M = m_1R + m_2R + \cdots + m_tR \hookrightarrow \sum_{i \in I_0} A_i \hookrightarrow M,$$

从而结论成立。

逆向证明，考虑子模集 $\{mR \mid m \in M\}$，则存在有限子集 $\{m_1R, \cdots, m_tR\}$，具有性质 $m_1R + m_2R + \cdots + m_tR = M$。因此，$M$ 是有限生成的。

下面给出有限生成概念的对偶概念。

定义 1.2.6　模 M_R 说是有限余生成的 $:\Leftrightarrow$ 对 M 的每个具有性质 $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = 0$ 的子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$，则存在有限子集 $\{A_i \mid i \in I_0\}$(即 $I_0 \subset I$，I_0 是有限的)具有性质 $\bigcap\limits_{i \in I_0} A_i = 0$。

例子如下：

1. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 不是有限余生成的，因为 $\bigcap\limits_{p\text{是素数}} p\mathbb{Z} = 0$，但对任意有限多个素数 $p_1, \cdots, p_n$，有

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i\mathbb{Z} = p_1\cdots p_n\mathbb{Z} \neq 0$$

2. 域 K 上的向量空间是有限余生成的 $\Leftrightarrow$ 它是有限维的。

定理 1.2.3 （模律）由 A、B、$C \hookrightarrow M$ 和 $B \hookrightarrow C$ 可推得

$$(A+B)\cap C = A\cap C + B\cap C = A\cap C + B$$

证明：令 $a+b=c\in(A+B)\cap C$，此处 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$。于是由 $B\hookrightarrow C$，可得 $a=c-b\in A\cap C$，$a+b=c\in(A\cap C)+B$，所以$(A+B)\cap C\hookrightarrow(A\cap C)+B$。

今令 $d\in A\cap C$，$b\in B$。由于 $B\hookrightarrow C\Rightarrow d+b\in(A+B)\cap C$，有$(A\cap C)+(B\cap C)\hookrightarrow(A+B)\cap C$。

习题 1.2

1. 设$\mathbb{Q}$是有理数全体，则$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$是整数环上的模。证明：

(1) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 不存在极小模；

(2) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 不存在极大模；

(3) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 不存在有限生成集。

2. 证明：每个向量空间（斜域 K 上）都有基。

3. 令 $\Delta=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 M_R 的一个子模集，则证明：

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \begin{cases} \left\{\sum_{i\in I'} a_i \mid a_i \in A_i \wedge I'\subset I \wedge I' \text{是有限的}\right\} & \Delta\neq\phi \\ 0 & \Delta=\phi \end{cases}$$

4. 设 A_1 与 A_2 都是 R－模 M 的子模，证明：如果 A_1+A_2 与 $A_1\cap A_2$ 都是有限生成的，则 A_1 与 A_2 也是有限生成的。

5. 证明：模 M 的子模 A 是极大的 $\Leftrightarrow \forall m\in M(m\notin A\Rightarrow M=mR+A)$。

1.3 内 直 和

定义 1.3.1 M 叫作 M 的子模集$\{B_i \mid i\in I\}$的内直和，

$$M=\bigoplus_{i\in I} B_i :\Leftrightarrow \begin{cases} M=\sum_{i\in I} B_i \\ \forall_j\in I,\ B_j\cap \sum_{i\in I, i\neq j} B_i = 0 \end{cases}$$

$M=\bigoplus\limits_{i\in I}B_i$ 有时也说成是 M 到子模集 $\{B_i \mid i\in I\}$ 的直和分解。

当 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$ 时，也记为 $M=B_1\oplus B_2\cdots\oplus B_n$。

引理 1.3.1 令 $\{B_i \mid i\in I\}$ 是 M 的子模集，$M=\sum\limits_{i\in I}B_i$，则定义 1.3.1 中的第二个条件等价于：对 M 的每个 x，$x=\sum\limits_{j\in I'}b_i$，$b_i\in B_i$，$I'\subset I$，$I'$有限，在下面的意义下是唯一的：

如果 $x=\sum\limits_{j\in I'}b_i=\sum\limits_{j\in I'}c_i$；$b_i$，$c_i\in B_i$ 则有 $\forall i\in I'(b_i=c_i)$

证明很明显，这里从略。

定义 1.3.2

(1) M 的一个子模 B 是 M 的直和项:$\Leftrightarrow\exists C\hookrightarrow M\ (M=B\oplus C)$。

(2) 模 $M\neq 0$ 叫作不可分解的:$\Leftrightarrow$0 和 M 是 M 的仅有的直和项。

例子如下：

1. 令 $V=V_K$ 是数域 K 上的一个向量空间，$\{x_i \mid i\in I\}$ 是 V 的基，则显然有 $V=\bigoplus\limits_{i\in I}x_iK$。

2. 在$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 中，子模 $n\mathbb{Z}$（$n\neq 0$，$n\neq\pm 1$）不是直和项。

3. 每个单模 M 是不可不分解的。

4. 具有最大真子模或在非零子模集中具有最小子模的模 M 是不可分解的。

证明：若 $M=M_1\oplus M_2$；M_1，$M_2\underset{\neq}{\hookrightarrow}M$，使得 $M_i\hookrightarrow M_0(i=1, 2)$ 或存在 $M'\hookrightarrow M_i(i=1, 2)$。这是不可能的。

1.4 商　　模

令 $C\hookrightarrow M_R$，则 C 是模 M_R 的加群的子加群。显然，商群 $M/C=\{m+C \mid m\in M\}$ 在加法

$$(m_1+C)+(m_2+C)=(m_1+m_2)+C$$

下是存在的。

在 M/C 上定义模乘法，使 M/C 成为右模，称之为关于模 C 或对模 C 的商模或剩余类模，其模乘法定义如下：

$$(m+C)r=mr+C,\ m\in M,\ r\in R。$$

此定义易证是合理的，M/C 是一个右 R－模。

左模和双模的商模可类似地定义。今令 R 是一个环，C 是 R 的两边理想，则 R 的加群关于子加群 C 的商群 R/C 可再构成环，称 R 为关于 C 的剩余类环或商环，其乘法可定义如下：

$$(r_1+C)(r_2+C)=r_1r_2+C,\ r_1,\ r_2\in R。$$

此定义易证是合理的，R/C 是商环。如果 1 是 R 的单位元，则 $(1+C)$ 是 R/C 的单位元。

定义 1.4.1 令 A，B 是 R 的两边理想，置

$$AB=\{a\cdot b \mid a\in A\wedge b\in B\};$$

即 AB 是由所有的乘积 $ab(a\in A,\ b\in B)$ 生成的加群，易见 AB 是一个理想，叫作理想 A 与 B 之积。

注： $$AB=\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_jb_j \mid a_j\in A\wedge b_j\in B\wedge n\in\mathbb{N}\Big\}。$$

定义 1.4.2 令 C 是 R 的两边理想，则

(1) 说 C 是 R 的强素理想 $:\Leftrightarrow C\neq R\wedge\forall r_1,\ r_2\in R,\ r_1r_2\in C\Rightarrow(r_1\in C\vee r_2\in C)$。

(2) 说 C 是 R 的素理想 $:\Leftrightarrow C\neq R\wedge\forall A\cdot B\hookrightarrow_R R_R,\ AB\hookrightarrow C\Rightarrow(A\hookrightarrow C\vee B\hookrightarrow C)$。

(3) r 称为左零因子 $:\Leftrightarrow r\neq 0,\ \exists s\in R,\ s\neq 0,\ rs=0$。

类似地，可定义右零因子。

(4) 说 R 中没有零因子 $:\Leftrightarrow$ R 中不存在左、右零因子。

(5) 令 $r\in R$，r' 叫作右逆或左逆，或者叫 r 的逆元素 $:\Leftrightarrow rr'=1$，或者 $r'r=1$，或者 $rr'=r'r=1$。

注：

(1) 如果存在右零因子，则一定存在左零因子，反之亦然。

(2) 如果 r'、r'' 分别是 r 的左、右逆元，则 $r'=r''$。

由定义 1.4.2 易知：

引理 1.4.1

(1) C 是强素理想 $\Rightarrow C$ 是 R 的素理想。

(2) 如果 R 是交换的，则 (1) 之逆也成立。

定理 1.4.1 令 C 是 R 的两边理想，则下述命题成立：

(1) C 是 R 的强素理想 $\Leftrightarrow$ R/C 没有零因子。

(2) C 是 R 的素理想 $\Leftrightarrow$ 零理想是 R/C 的素理想。

(3) C 是 R 的两边理想 $\Leftrightarrow$ R/C 是单的。

(4) C 是 R 的极大右理想 $\Leftrightarrow$ R/C 是体。

证明：

(1)“$\Rightarrow$”：为了简便起见，假设 $\overline{R}=R/C$，$\bar{r}=r+C$。令 $\overline{r_1}$，$\overline{r_2}\in\overline{R}$，假设 $\overline{r_1r_2}=0$。于是，$r_1r_2+C=(r_1+C)(r_2+C)=C$，从而 $r_1r_2\in C$。因此，$r_1\in C\vee r_2\in C$，亦即 $\overline{r_1}=\bar{0}\vee r_2=\bar{0}$。

“$\Leftarrow$”：令 r_1，$r_2\in R$，假设 $r_1r_2\in C$，则 $\overline{r_1r_2}=(r_1+C)(r_2+C)=r_1r_2+C=C$。因此，$\overline{r_1}=\bar{0}\vee\overline{r_2}=\bar{0}$，亦即 $r_1\in C\vee r_2\in C$。

(4)“$\Rightarrow$”：令 $0\neq\overline{r_1}\in\overline{R}$，则 $r\notin C$。于是，$R=rR+C$。因此，$\exists r'\in R$ 与 $c\in C$，使得

$$1=rr'+C\Rightarrow\bar{1}=rr'+C=(r+C)(r'+C)=\bar{r}\,\bar{r}'$$

亦即 $\overline{R}$ 的每个非零元有右逆元。

由 $\bar{1}=\bar{r}\,\bar{r}'\neq 0$ 知 $\exists\bar{r}''\in\overline{R}$，使 $\bar{r}'\bar{r}''=\bar{1}$。因此，$\bar{r}=\bar{r}''$。所以 $\bar{r}'$ 是 $\bar{r}$ 的逆元，即 $\overline{R}$ 是体。

“$\Leftarrow$”：令 $r\in R$，$r\notin C$，则 $\bar{r}\neq 0$。所以，$\exists\bar{r}'\in\overline{R}$　$(\bar{r}\,\bar{r}'=\bar{r}'\bar{r}=\bar{1})$。于是，$rr'+C=1+C$。即对某个 $c\in C$，$rr'+c=1$。因此，$rR+C=R$。此即意味着 C 是 R 的极大右理想。

(2)、(3)的证明类似于(1)、(4)的证明，从略。

例子如下：

(1)向量空间的商空间是熟知的。

$$(2)\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\begin{cases}p\text{ 个元的素域}, & n=p\text{ 是素数}\\ \text{带有零因子的环}, & n\neq p\wedge n\neq 0\wedge n\neq 1\\ 0, & n=1\text{ 时}\\ \mathbb{Z}\text{（同构意义下）}, & n=0\text{ 时}\end{cases}$$

(3)令 $K[X]$ 是系数在域 K 上未定元 X 的多项式环。令 $f(X)\in K[X]$，$f(X)$ 不可约，则 $K[X]/f(X)$ 是 K 的有限维扩张。

习题 1.4

1. 令 $\{B_i\mid i=1,2,\cdots\}$ 是 $M=M_R$ 的子模集且满足条件

$$M=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\text{。}$$

证明下列条件是等价的：

(1) $\forall j=1,2,\cdots$，$B_j\cap\sum\limits_{i=j+1}^{\infty}B_i=0$。

(2) $M=\bigoplus\limits_{i=1}B_i$。