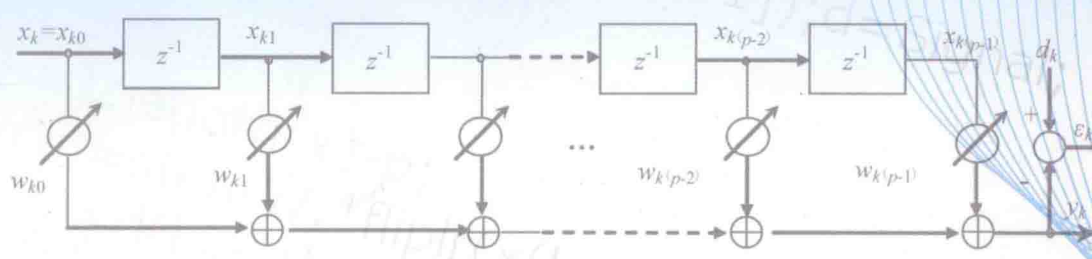
国防科技大学研究生教材专项经费资助出版

随机信号分析与最优估计理论

Suiji Xinhao Fenxi Yu Zuiyou Guji Lilun

潘仲明 编著



国防科技大学出版社

国防科技大学研究生教材
专项经费资助出版

随机信号分析与最优估计理论

潘仲明 编著

国防科技大学出版社
·长沙·

内容简介

本书详尽介绍了随机信号分析与最优估计理论的基础知识，主要内容包括概率论与随机过程、多维高斯过程与似然比检测系统、参数估计理论、随机序列分析与参数化谱估计、波形与状态估计、一维小波变换及其应用。每章后编配有习题。全书选材精当，基本概念表述清晰，公式推导过程严谨，工程应用实例丰富，MATLAB 算法程序简明易懂，符合工科学生的思维习惯和认识规律。

本书适合作为高等学校仪器仪表、机械工程、电气工程和自动化技术等专业的研究生或高年级本科生教材，也可供从事工程测试、微弱信号检测和系统辨识等技术专题研究的科技工作者学习与参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析与最优估计理论/潘仲明编著.—长沙:国防科技大学出版社,2012.1
ISBN 978 - 7 - 81099 - 962 - 5

Ⅰ.①随… Ⅱ.①潘… Ⅲ.①随机信号 - 信号分析 - 研究生 - 教材 ②估计 - 最佳化理论 - 研究生 - 教材 Ⅳ.①TN911.6 ②O211.67

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 239336 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)84572640 邮政编码:410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑:谷建湘 责任校对:刘 梅
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
※
开本:787×1092 1/16 印张:21.25 字数:491 千
2012 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1 - 1000 册
ISBN 978 - 7 - 81099 - 962 - 5
定价:42.00 元

前　言

科学发现、技术发明、工程建设和各类自动化系统的开发与应用，皆离不开测量和实验，这就必然涉及随机信号(或随机数据)的处理问题。事实上，随机信号处理的理论与方法在科学实验、工程测试、系统辨识、目标探测、无损检测、机器故障诊断和医学生物信息技术等领域中，都得到了成效显著的应用，推动了现代科学技术的进步与发展，并已逐渐成为高等学校理工科专业的研究生或高年级本科生必修的数学技术课程。

在本科生课程“信号与系统”和“离散时间信号处理”的基础之上，为研究生开设“随机信号处理”是很自然的事。“随机信号处理课程”的主要内容包括三大专题：随机信号分析、信号检测和参数估计理论。目前已有许多这方面的教科书，例如，《信号检测理论与参数估计》、《信号检测与估计》、《噪声中的信号检测》和《统计信号处理》等，但这些教科书均侧重于介绍信号检测的统计原理及其在数字通信、雷达和声呐领域中的应用。概略而言，信号检测理论是研究检验统计量的选择与估计，并根据预先设定的门限进行统计判决与分类决策的知识体系，而这种理论体系必须与具体研究对象联系起来方有实际意义。因此，对于非数字通信、雷达和声呐等专业的研究生或高年级本科生，与其在课堂上讲授既抽象又不易理解的信号检测理论，不如先学习与信号检测理论相关的数学基础知识，然后再开设具有明确专业技术导向性的检测技术课程。基于上述考虑，作者认为，从随机信号处理的知识体系中抽出随机信号分析与参数估计理论这两大专题，加上波形和状态估计理论(或称为最优滤波理论)和非平稳信号的小波分析方法，以及这些理论方法在检测技术中的应用实例，编写一本《随机信号分析与最优估计理论》教材，作为高等学校非信息类专业的研究生或高年级本科生的必修课程，是一种较为合理的选择。

《随机信号分析与最优估计理论》是一门数学导向性极强的课程，迄今为止，随机信号分析与最优估计理论的最新成果绝大多数是应用数学界的贡献。但是，如果在课堂上片面地强调随机信号分析与最优估计算法在纯数学意义上的严密性、完整性和普遍性，以及使用数学工具的技巧性问题，而不解释这些分析与估计算法所隐含的物理意义及其适用范围，那么，本课程将成为一门大学公共数学基础课程，这就违背了开设本课程的初衷——使初学者初步具备从自然科学和工程技术描述的复杂系统中，提炼出简练而又符合现实的随机信号或随机系统模型的能力，进而选用恰当的随机信号分析与最优估计算法，以更好地解决工程测试、信号检测和系统辨识等实际问题。反之，如果在课堂上绕过随机信号分析与最优估计算法的推导过程，而仅仅介绍这些算法的实现步骤和应用实例，或许能收到立竿见影的短期效果，然而，这种“专科学校”式的教学方法终将湮灭莘莘学子抽象

思维的聪明才智。不言而喻，在抽象理论和实用技术上的任何偏颇，对于理解和掌握随机信号分析与最优估计算法及其实现技术都是不利的。因此，如何从工程技术的角度、而不是基于抽象的数学概念来阐述和发展随机信号分析和最优估计理论，是一个值得关注的教学研究课题。

为了使初学者能更快地掌握应用随机信号分析与最优估计理论的基本概念和算法，来解决工程测试、信号检测和系统辨识等实际问题的能力，在本书中，作者尽量采用浅显易懂的数学概念与直观的图示化方法，来阐释随机信号分析与最优估计算法的物理意义，同时提供了大量的理论计算和工程应用实例以及各种算法程序；尽量应用简化的数学模型来描述复杂的随机信号系统，并应用 MATLAB/SimuLink 软件工具进行系统仿真。尽管有时候理论模型与实际现象可能存在着较大的差异，但在当今工程技术科学中，利用模型进行系统仿真的技术手段却是必不可少的。这种既严谨地介绍了各种算法的数学基础及其推导过程，又避免把这些算法当作纯粹的数学问题来讲解的思想，不但体现在本书的取材与结构上，也表现在阐释随机信号分析与最优估计问题的基本思路上。

本书共分为六章。第一章简明扼要地回顾概率论与随机过程的基础知识。第二章介绍工程上应用最为广泛的多维高斯分布理论及其在似然比检测系统中的应用，内容包括白化滤波器和匹配滤波器的基本概念，以及应用概率论与随机过程的有关公式来计算检测系统的信噪比。第三章介绍参数估计理论的基本概念和常用的估计算法，阐释了各种估计量及估计量方差下界的物理意义。第四章详尽介绍了随机数据预处理、时间序列模型及其辨识方法，以及基于时间序列模型的最优预测和参数谱估计算法，简要叙述了非高斯时间序列的双谱估计算法及其应用实例。第五章讨论了波形和状态估计的基本问题，内容包括维纳滤波器、自适应 LMS 滤波器和卡尔曼滤波器。重点介绍自适应 LMS 滤波器的各种算法及其在自适应噪声抵消器、自适应预测器和自适应建模等技术专题中的应用。第六章概述了多分辨力一维小波分析的理论框架，并从工程应用的角度，详细介绍了双正交滤波器组的设计方法、小波变换的快速实现技术和小波分析方法在检测技术领域中的应用实例。

在本书的出版过程中，国防科技大学出版社谷建湘总编仔细审阅了书稿，对书中存在的问题皆一一予以指正，谷编审深厚的数学功底和精益求精的工作态度，使笔者受益匪浅。在本研究生课程建设过程中，笔者的同事王跃科教授、杨俊教授、杨建伟、乔纯捷副教授和研究生院的辛华工程师给予了热忱支持和帮助，这对本书的形成都是极为有益的。在此，一并对他们的贡献表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，本书的选材和文字难免存在不当和疏漏之处，敬请读者不吝批评指正。

作者

2011 年 12 月

于国防科技大学

目　录

第一章　概率与随机过程导论

第二章 高斯过程与似然比检测系统

第三章 参数估计理论

第四章 随机序列分析与参数谱估计

第五章 波形与状态估计

第六章 非平稳信号分析——小波变换

第一章　概率与随机过程导论

科学理论仅仅是对抽象概念而不是对工程实际进行讨论的。在纯理论学科中，所有的结论都是从某些公理出发，通过演绎逻辑推导出来的。在某种意义下，这些科学理论是符合自然现象的，而不管它们意味着什么。本章将要讨论的是另一类问题。在这类问题中，通过测量，我们只能掌握各种可能发生也可能不发生的事件所呈现出来的可观测的局部信号，它要求我们在不完全知道因果关系下分析、估计这些信号的特征参数，作为预测事件结果或者决策的依据。作为应用数学的一个分支，概率与随机过程理论为分析此类问题提供了一个理论框架。为使读者能够更容易地理解本书的主要内容，简要复习这方面的基础知识是必要的。

1.1　随机事件

概率论是分析随机现象统计规律性的一门应用数学学科。从概率的观点出发，可把工程上存在的各种现象分为两类：一类称作确定性现象，它是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象；另一类称为随机现象，它指的是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。虽然根据概率论对工程问题进行分析的结果，是否与物理现实相吻合是无法被“证明”的，但却是可以接受的。

1.1.1　随机事件的概念

随机事件是随机试验中可能出现的结果，它是概率论的主要研究对象。

一、随机试验

概率论与随机试验密切相关，每个试验都可由一个至三个元素组成的集合$\{\Omega, \Sigma, P\}$来定义。其中：

第一个子集 Ω 表示基本事件的集合，子集中的元素是每次试验中可能发生的某一结果；

第二个子集 Σ 表示复合事件的集合，每个事件在试验中是否发生依赖于试验的执行情况，带有随机性；

第三个子集 P 用于指定 Σ 集合中每个事件遵循一定规则所对应的数值（概率）。

定义 1.1.1 在随机试验中,每一个可能出现的结果,称为随机事件。

随机事件通常用 A,B,C 等大写字母来表示,它又分为基本事件和复合事件。

(1) 基本事件。最简单的不能再分的单个事件,称为基本事件。

例如,投掷一对完整无缺的骰子,一个骰子的一次滚动就是一个随机试验。由于骰子落在 1 到 6 的点数的可能性都存在,因此可将骰子上 1 到 6 的点数定义为基本事件。此类基本事件是可数的,通常用符号 $\zeta_k(k=1,2,\cdots)$来表示。当基本事件的集合$\{\zeta_k\}$是可列集合时,点数 k 是离散变量。

如果随机试验所产生的基本事件是不可数的,则应引入连续变量 τ,并将基本事件记为 $\zeta(\tau)$,它表示基本事件的点可能填满整个空间。譬如,无限精确地测量电压信号就属于这种情况,这是因为测量值是可能的任何实数。这时完全可以任意地定义一个基本事件,但前提条件是基本事件必须是完备和不相容的,这意味着,在每次试验中必有且仅有一个基本事件发生。

(2) 复合事件。由两个或两个以上的基本事件组成的事件,称为复合事件(简称为事件)。

例如,在掷骰子试验中,“点数小于 4”和“点数为偶数”的事件,都是复合事件。

此外,在随机试验中必然出现的结果称为必然事件,而绝对不会出现的结果则称为不可能事件。事实上,这两种事件并非随机事件,但为了研究问题的方便,往往也把它们归入随机事件,作为随机事件的两种极端情况来考虑。

二、样本空间

样本是概率论中最为重要的概念之一。

定义 1.1.2 在随机试验中,每一个基本事件称为一个样本点;样本点的全体称为样本空间 Ω,它是全体样本点的集合。

例如,在掷骰子试验中,样本点($k=1,2,\cdots,6$)构成了样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,样本空间中的每一元素都是一个基本事件。

由基本事件 $\zeta\in\Omega$ 组成的复合事件,是基本事件(即样本点)的集合。在随机试验时,如果某事件中的任一基本事件出现了,则称该事件发生。按此定义,样本空间本身也是事件,而且是必然事件。

【例 1-1】 在掷骰子试验中,可以列出以下事件:

$$A=\{2,5\};B=\{2,4,6\};C=\{4\};$$
$$D=\{1,2,3,4\};\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

注意,要区分基本事件(样本点)与包含若干个基本事件的事件(集合)。

三、事件之间的运算关系

事件之间的运算关系如图 1-1 所示。

(1) 包含关系:设有事件 A 和 B,如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 B 包含 A,或 A 包含于 B,记作 $A\subset B$。显然,任何事件都包含于 Ω。

(2) 相等关系:若 $A\subset B$,同时又有 $B\subset A$,则称 A 与 B 是相等事件,记作 $A=B$。

(3) 事件的并集(逻辑 OR):设有事件 A,B 和 C,如果事件 C 发生时,事件 A 和 B 至少有一个发生,则称 C 是 A,B 的并(和)事件,记作 $C=A\cup B$。

n 个事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$的并事件,记作 $C=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$。

(4) 事件的交集(逻辑 AND):如果事件 C 发生时,事件 A 和 B 同时发生,则称 C 是 A,B 的交(积)事件,记作 $C=A\cap B$ 或 AB。

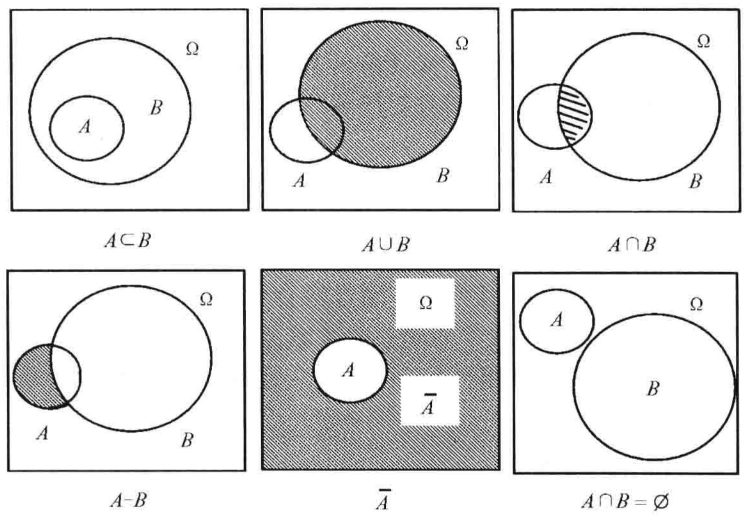


图 1-1 事件的关系

n 个事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$的交事件,记作 $C=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$。

(5) 事件的补集(逻辑 NOT):不包含事件 A 的基本事件所构成的集合,称为事件 A 的补集,记为 $\bar{A}$。即 $\bar{A}=\Omega-A$。

(6) 互不相容(互斥)事件:如果事件 A 和 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$(空集),则称 A 和 B 是互斥事件。任何两个不同的基本事件都是互斥事件。

(7) 对立事件:若样本空间 Ω 只含有事件 A 和 B,即 $\Omega=A\cup B$,且 $AB=\varnothing$,则称 A,B 是对立事件,记为

$$A=\bar{B}\quad \text{或者}\quad B=\bar{A}$$

(8) 事件的差:事件 A 与 $\bar{B}$ 的交称为 A 与 B 的差,记为 $C=A-B=A\bar{B}$。若样本空间 Ω 只含有事件 A 和 B,即 $\Omega=A\cup B$,则事件的对称差定义为:

$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\bar{B})\cup(B\bar{A})=A\bar{B}$$

事件之间的组合运算法则:

(1) 交换律:

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$$

(2) 结合律:

$$\begin{cases}(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C\\(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C\end{cases}$$

(3) 分配律：

$$\begin{cases}(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)\\(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)\end{cases}$$

(4) 摩根定律：

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},\quad \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

引入上述事件的关系和集合论中的运算法则后，就可以给出随机试验$\{\Omega,\Sigma,P\}$中的第二个子集Σ的定义。

定义 1.1.3　非空事件集Σ是一个关于并运算(可能是无限的)与补运算封闭的事件类。即，对于任意的$A\in\Sigma$，都有$\bar{A}\in\Sigma$；且对任意一组$A_k(k=1,2,\cdots)\in\Sigma$，同样有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\Sigma$$

称这样的Σ为σ-代数。

若Σ满足上述两个基本条件，则Σ必包含其中元素的交(可能是无限的)和对称差。有了这个定义，就可以保证Σ中的任何事件通过集合运算所得到的事件也属于Σ。明确规定这样一个集合Σ仅仅是出于数学处理上的考虑，而在实际运用中人们感兴趣的事件总是清晰的，而且总可以将其全体事件集合视为σ-代数，上述条件一般是成立的。

1.1.2　随机事件的概率

在随机试验$\{\Omega,\Sigma,P\}$中，第三个元素P是定义事件$A\in\Sigma$上的一个实值函数$P(A)$，它给集合Σ中的每一个事件都指定了一个概率，表示发生该事件可能性的测度。

【例 1-2】　在掷骰子试验中，如果事先已确认骰子是完美无缺的，那么就可以指定下列事件

$$A=\{2,5\};\quad B=\{2,4,6\};\quad C=\{4\};$$
$$D=\{1,2,3,4\};\quad \Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

的概率，即

$$P(A)=\frac{1}{3};\quad P(B)=\frac{1}{2};\quad P(C)=\frac{1}{6};\quad P(D)=\frac{2}{3};\quad P(\Omega)=1$$

定义 1.1.4　设随机试验的样本空间为Ω，且赋予$A\in\Sigma$一个实数值$P(A)$。$\forall\, k,l\in$ **Z**(整数域)，如果该实数满足如下公理：

$$\begin{cases}P(\Omega)=1\\P(A)\geqslant 0, & A\in\Sigma\\P(\bigcup A_k)=\sum\limits_k P(A_k), & A_k\in\Sigma\text{ 且 }A_kA_l=\varnothing,\quad(k\neq l)\end{cases}\tag{1.1.1}$$

则称$P(A)$为事件A的概率。

根据公理(1.1.1)和集合论中的各种代数运算关系，不仅可以导出概率的全部性质和运算法则，而且可以根据基本事件$\zeta\in\Omega$的概率构造出任何事件$A\in\Sigma$的概率。例如，从集合论中的恒等式出发

$$A\cup B=A\cup(\bar{A}B)$$

$$B=\Omega B=(A\cup\bar{A})B=(AB)\cup(\bar{A}B)$$

由概率论公理(1.1.1)可知：$\forall A,B\in\Sigma$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\bar{A}B),\quad P(B)=P(\bar{A}B)+P(AB)$$

所以

$$P(A\cup B)=P(A\cup\bar{A}B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.1.2}$$

【例 1-3】 在掷一个完整的骰子试验中，设 A 是点数为偶数的事件，B 是点数大于 2 的事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

建立在概率论公理(1.1.1)基础上的随机试验$\{\Omega,\Sigma,P\}$的定义，是应用概率论知识描述和解决工程实际问题的重要概念。

1.1.3 条件概率与统计独立

在随机试验中，我们经常关心在给定事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率。当然，发生事件 B 的可能性也可能不受到事件 A 的影响，或者事件 A 和事件 B 是互相独立的。

一、条件概率

定义 1.1.5 设两个事件 $A,B\in\Sigma$，且 $P(A)>0$，则在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.1.3}$$

条件概率与前面定义的基本概率具有相同的性质：

$$\begin{cases} P(\Omega\mid A)=1 \\ P(B\mid A)\geqslant 0, \qquad A,B\in\Sigma \\ P(\bigcup B_k\mid A)=\sum P(B_k\mid A), \quad B_k\in\Sigma \text{ 且 } B_kB_l=\varnothing, \quad (k\neq l) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

式中，k,l 为整数。

【例 1-4】 在掷骰子试验中，事件 $A=\{1,3,5\}$表示奇数点出现的情况，事件 $B=\{1,2,3\}$表示点数小于 4 的情况，二者的组合事件 $AB=\{1,3\}$；且有 $P(AB)=1/3$，$P(B)=1/2$。由式(1.1.3)可知，在事件 $B=\{1,2,3\}$发生的条件下，事件 $A=\{1,3,5\}$发生的概率为

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

二、全概率公式和逆概率公式

定义 1.1.6 设 Ω 是随机试验的样本空间，对于一组事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)\in\Sigma$，如果满足

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega \quad 且 \quad A_kA_l = \varnothing, \quad (k \neq l; k, l \leqslant n)$$

则称 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$为 Ω 的一个划分。

设 B 是随机试验中的任一事件,则有

$$B = B \cup \Omega = \bigcup_{k=1}^{n} BA_k \quad 且 \quad BA_k \cap BA_l = \varnothing \quad (k \neq l)$$

根据概率论公理(1.1.1),得到

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(BA_k) \tag{1.1.5}$$

定义 1.1.7 设 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$是 Ω 上的一个划分,且 $P(A_k)>O$。如果已知 $P(A_k)$和 $P(B|A_k)$,则由式(1.1.3)和(1.1.5)即可得到

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k) \tag{1.1.6}$$

上式称为全概率公式或逆概率公式。又设 $P(B)>0$,则

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)} \tag{1.1.7}$$

上式称为贝叶斯(Bayes)公式。

【例 1-5】 某水声通信系统的发射器分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“1”和“0”。由于通信系统受到干扰,当发出信号“1”时,接收器分别以概率 0.8 和 0.2 收到“1”和“0”;而当发出信号“0”时,接收器分别以概率 0.9 和 0.1 收到“0”和“1”。试求

(1) 当接收器收到信号“1”时,发射器发出信号“1”的概率;

(2) 当接收器收到信号“0”时,发射器发出信号“0”的概率。

解 设 B_1,B_2 分别表示发射器发出信号“1”和“0”的事件,A_1,A_2 分别表示接收器接收到信号“1”和“0”的事件,依题意,要求确定 $P(B_1|A_1)$和 $P(B_2|A_2)$。将已知条件

$$P(B_1)=0.6, \qquad P(B_2)=0.4$$
$$P(A_1|B_1)=0.8, \quad P(A_2|B_1)=0.2$$
$$P(A_1|B_2)=0.1, \quad P(A_2|B_2)=0.9$$

代入贝叶斯公式(1.1.7),即可得到

$$P(B_1|A_1) = \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)} = 0.923$$

$$P(B_2|A_2) = \frac{P(B_2)P(A_2|B_2)}{P(B_1)P(A_2|B_1)+P(B_2)P(A_2|B_2)} = 0.75$$

【例 1-6】 假设某一水下无人航行器(UUV)安装了甲、乙和丙三个作用距离不同的水听器,用于检测运动目标所发出的微弱信号,其检测概率分别为 0.5、0.6 和 0.7。如果只有一个水听器检测到信号,则确认目标存在的概率是 0.3;如果有两个水听器同时检测到信号,则确认目标存在的概率是 0.7;如果三个水听器都检测到信号,则完全可以确认目标的存在。试求确认目标存在的概率。

解 用 $A_k(k=1,2,3)$分别表示甲、乙、丙水听器检测到目标信号;用 $B_l(l=1,2,3)$分

别表示一个、两个和三个水听器检测到目标信号；用 C 表示目标被确认的事件。那么，当且仅当 B_l 出现时，C 才成立。依题意，要求计算 $P(C)$。已知事件 A_k 的概率为

$$P(A_1)=0.5,\quad P(A_2)=0.6,\quad P(A_3)=0.7$$

事件 B_1 及与之相关的概率是

$$B_1=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\qquad P(C\mid B_1)=0.3$$

$$P(B_1)=0.5\times0.4\times0.3+0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.4\times0.7=0.29$$

事件 B_2 及与之相关的概率是

$$B_2=A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\qquad P(C\mid B_2)=0.6$$

$$P(B_2)=0.5\times0.6\times0.3+0.5\times0.5\times0.7+0.5\times0.6\times0.7=0.475$$

事件 B_3 及与之相关的概率是

$$B_3=A_1A_2A_3,\qquad P(C\mid B_3)=1$$

$$P(B_3)=0.5\times0.6\times0.7=0.21$$

将以上各式代入全概率公式(1.1.6)，即可得到目标被确认的概率，即

$$\begin{aligned}P(C)&=P(B_1)P(C\mid B_1)+P(B_2)P(C\mid B_2)+P(B_3)P(C\mid B_3)\\&=0.29\times0.3+0.475\times0.6+0.21\times1\\&=0.582\end{aligned}$$

三、统计独立

定义 1.1.8 设两个事件 A 和 $B\in\Sigma$，若有

$$P(AB)=P(A)P(B)\tag{1.1.8}$$

则称这两个事件互相独立(或统计独立)。

在式(1.1.8)中，左边表示事件 A 和事件 B 同时发生的概率，它表示在随机试验中既属于事件 A 又属于事件 B 的基本事件出现的概率。将两个事件 A,B 相互独立的定义推广到一组事件 A_k 上，则有

$$P(A_kA_l)=P(A_k)P(A_l),\qquad(k\neq l)$$

对于两个以上的独立事件也有类似的关系。

【例 1-7】 掷一完整的骰子，令事件 $A=\{1,3,5\}$ 表示奇数点出现的情况，事件 $B=\{1,2,3\}$ 表示点数小于 4 的情况，则有

$$P(AB)=P(\{1,3\})=\frac{1}{3}\neq P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

显然这两个事件不独立。

将两个事件的条件概率方程(1.1.3)代入方程(1.1.8)，则可得事件相互独立的另一种等价的定义：如果

$$P(A\mid B)=P(A)\quad\text{或者}\quad P(B\mid A)=P(B)\tag{1.1.9}$$

则称事件 A 和事件 B 相互独立。

“独立”这个词的意思与我们日常所理解的词意是一致的，它表明事件 A 发生的可能性不受事件 B 的影响，反之亦然。

对于同时考虑的两个事件 A 和 B，往往要求它们必须属于同一事件集 Σ，这种限制有时会带来分析问题的不便。不过，可以通过拓展随机试验的定义，并扩充基本事件集 Ω，使之包含所有感兴趣的事件。譬如，设 $A\in\Sigma_1, B\in\Sigma_2$ 是两个不同事件集的事件，且 Ω_1，Ω_2 是对应于基本事件 ζ_{1_k}, ζ_{2_l} 的样本空间。为了将这两组事件联合在一起，可通过定义新的基本事件 $\zeta_{kl}=(\zeta_{1_k}, \zeta_{2_l})$，使所有的 ζ_{kl} 点构成一个新的样本空间 $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$，称为空间 Ω_1 和 Ω_2 的笛卡儿积。这样，就可以在空间 Ω 上建立起联合事件的 σ－代数。

1.2 随机变量

在上一节中，我们处理的都是随机试验的结果以及被称为事件的集合。在随机试验中，人们可以把实数看作试验结果，如骰子的"点数"；也可以把能够辨认的各种各样的现象作为试验结果，如硬币的"正面"或"反面"。但这仅仅是辨认试验结果的某些特殊方法，下面我们将介绍具有普遍意义的随机变量及其概率分布函数的基本概念。

1.2.1 随机变量的分布与密度函数

定义 1.2.1 设随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\zeta\}$，如果对于每一个样本点 ζ 都有一个实数 X_ζ 与之对应，则称 $X(\zeta)=X_\zeta$ 为随机变量。

简而言之，随机变量 $X(\zeta)$ 是以随机试验的样本空间 Ω 为定义域、以基本事件 ζ 为自变量的取有限实值的任何函数。

给定随机变量取值的某些性质，将引出随机试验事件所形成的 σ－代数中的一个事件。事件的定义是基本事件 $\zeta\in\Omega$ 的并集，对于该并集，随机变量 $X(\zeta)$ 应满足某些条件。

【例 1－8】 在掷骰子试验中，如果将骰子的 6 个点数作为基本事件，则可通过指定 6 个值 $X_k=X(k)$ 来定义随机变量 $X(\zeta)$。假设规定 $X_k=2k-5(k=1,2,\cdots,6)$，当要求随机变量满足 $1.5\leqslant X_k\leqslant 8$ 时，就引出一个事件

$$\begin{aligned} A &= \{k:1.5\leqslant X_k\leqslant 8\} \\ &= \{k:3.25\leqslant k\leqslant 6.5\}=\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

其中记号 $\{k:1.5\leqslant X_k\leqslant 8\}$ 是指"满足 $1.5\leqslant X_k\leqslant 8$ 的所有点数 k 的集合"。

通常可根据 σ－代数中各事件之间的联系，用随机变量应当满足的条件来表示事件。譬如，当用 $X_k=2k-5(k=1,2,\cdots,6)$ 来表示掷骰子试验时，就可将事件定义为 $1.5\leqslant X_k\leqslant 8$，其概率就是式(1.2.1)所代表的 σ－代数中事件 A 的概率，即

$$P\{1.5\leqslant X_k\leqslant 8\}=P(4)+P(5)+P(6)=\frac{1}{2}$$

在工程上，随机变量的值是运用概率论分析随机试验的核心问题。这是因为被测系统的运行状态——"随机变量"——可根据事先试验的某些结果来确定，而"随机变量" $X(\zeta)$ 的测量值往往是仪器设备输出的实随机数据 x，因此在研究对应于某一试验的随机