理工社®

2015 [张宇考研数学系列丛书

9 LECTURES
ON LINEAR ALGEBRA
□ Mr. Zhang

张宇 线性代数9讲

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

9 LECTURES ON LINEAR ALGEBRA

Mr. Zhang

张宇线性代数9讲

主编：张宇

编委（按姓氏笔画数）：张乐 张宇
李烈 陈涛 罗治文 胡金德 姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

张宇线性代数 9 讲/张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2014.2

ISBN 978－7－5640－8843－9

Ⅰ．①张…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料
Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 022797 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
　　　　　82562903（教材售后服务热线）
　　　　　68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市文阁印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张／11.5
字　　数／300 千字
版　　次／2014 年 3 月第 1 版　2014 年 3 月第 1 次印刷
定　　价／22.00 元

责任编辑／张慧峰
文案编辑／张慧峰
责任校对／孟祥敬
责任印制／边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

Preface 前言

——告诉你一个真正的线性代数

正像读者所期望地那样，本书依然会努力延续拙著《张宇高等数学 18 讲》的风格，与读者讲体己言、叙真心话，让读者学好这门课，考好这门试.

在代数学中，线性代数有着举足轻重的地位. 为什么这么说？用两句话可以通俗地说明原因：一是因为**线性代数研究的是量与量之间的“一次”(所谓线性)关系**，这是数学上最简单的关系；二是在现代科学理论和计算机的发展下，那些“非一次”(所谓非线性)关系，很多都可以转化为“一次”关系进行研究，从而将复杂问题大大化简.

对线性代数作出巨大贡献的数学家有莱布尼兹、克拉默、范德蒙德、柯西、高斯、凯莱、哈密尔顿、雅克比等等. 有人曾说，科学给人知识，历史给人智慧. 读者若感兴趣，可以认真去阅读一下这些数学大家和他们的学术生涯，定会给读者以巨大的启迪.

下面，我作为“导游”，带着读者进行一次宏观的线性代数之旅，请好好欣赏路途上的六大美景吧，别忘了找个好的角度“拍照留念”. 只不过请注意：**有的景点我会详细讲给你听，有的景点(尤其是第六个景点)，我故意说得很少，期望读者自己去感受并总结.**

一、从行列式讲起

大多数教材都是从“纯粹”的代数学角度来定义行列式的，很抽象，难于理解和接受. 我们将在正文中再谈此种定义法. 这前言中，我希望明确地给出行列式的本质定义，并且告诉读者，我们将要开始的线性代数这门课到底要学什么.

先看一个式子：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 我们称其为 2 阶行列式，其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示此元素所在的行数，第二个下标 j 表示此元素所在的列数，$i=1,2,j=1,2$，于是此行列式中有 4 个元素，并且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 这是一个什么样的计算规则？它背后有什么样的意义？

希望读者跟着我的思路走. 请你将此行列式的第一行的两个元素 a_{11}, a_{12} 看成一个 2 维向量 $(a_{11},a_{12}) \xlongequal{\text{记为}} \boldsymbol{\alpha}_1$(线性代数中，向量不需要在字母上加箭头写成 $\overrightarrow{\alpha_1}$，只要写 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可，以后类同，不再重复). 将此行列式的第二行的两个元素 a_{21}, a_{22} 看成另一个 2 维向量 $(a_{21},a_{22}) \xlongequal{\text{记为}} \boldsymbol{\alpha}_2$. 不失一般性，将其标在直角坐标上，且以这两个向量为邻边拼出一个平行四边形 $OABC$ 来，则 $S_{OABC}=?$

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的长度(模)为 l，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的长度(模)为 m，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 x 轴的正向的夹角为 α，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 x 轴的正向的夹角为 β，于是，如下图 1 所示，

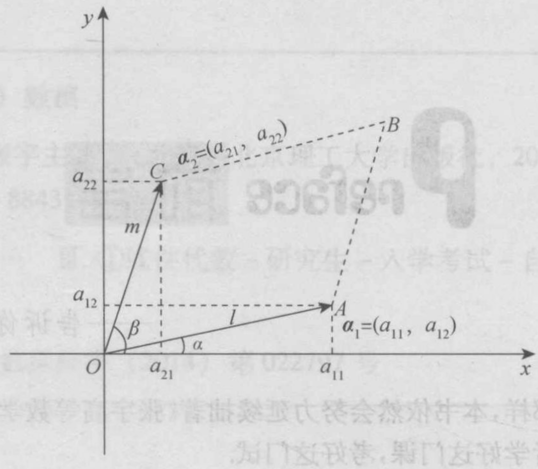


图 1

$$\begin{aligned} S_{OABC} &= l\cdot m\cdot\sin(\beta-\alpha)\\ &= l\cdot m(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)\\ &= l\cos\alpha\cdot m\sin\beta - l\sin\alpha\cdot m\cos\beta\\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\end{aligned}$$

于是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=S_{OABC}$.

我们看到了一个极其直观有趣的结论：2 阶行列式是由两个 2 维向量组成的，其（运算规则的）结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积. 这不仅得出了 2 阶行列式的计算规则，也能够清楚地看到其几何意义.

线性代数这门学问最大的一个特点是"可以作线性推广"——3 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是什么？我希望读者能够仿照上述定义回答出：**3 阶行列式是由 3 个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$ 组成的，其（运算规则的）结果为以这 3 个向量为邻边的平行六面体的体积.** 如下图 2 所示：

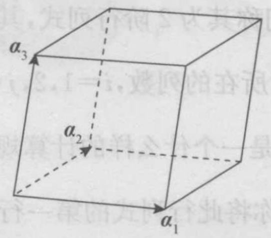


图 2

依此类推，我们便可以给出 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的本质定义：

n 阶行列式由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn})$ 组成，其结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.

由此看来，一个重要观点出现了：读者一开始，就应该把行列式看作是由若干个向量拼成的，并且要把这些向量作运算。

二、矩阵的本质是什么

假如英语系有 98 个女生，2 个男生，机械系有 95 个男生，5 个女生，你能把这个系统信息表达出来吗？这个问题的回答是显然而且简单的：

$$\begin{array}{c} \\ \text{男生人数} \\ \text{女生人数} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{英语} & \text{机械}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 95 \\ 98 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

在这个数表中，我们可以看到：第一列表达了英语系的男女生人数比，第二列表达了机械系的男女生人数比，而第一行表达了不同专业的男生人数比，第二行表达了不同专业的女生人数比。

这就是读者对**矩阵的初步认识——表达系统信息**。

但读者不可对矩阵的概念就此罢休。再看一个矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

事实上，我们不必再给这个矩阵赋予具体背景了，总之，可以抽象认为这是一个系统信息的表达即可。

重要的是，细心的读者能够把刚才我所讲的“一、从行列式讲起”与矩阵的概念结合起来思考吗？我给读者提供两个重要观点，供你在学习相关知识后参考：

重要观点 1：矩阵也是由若干个列(行)向量拼成的——上面那个矩阵可以看作由三个行向量(1,2,3)，(6,7,9)与(2,4,6)组成，也可以看作由三个列向量$(1,6,2)^T$，$(2,7,4)^T$与$(3,9,6)^T$组成；

重要观点 2：矩阵不能运算，但是其若干个列(行)向量之间存在着某种联系——你是否看到——(1,2,3)与(2,4,6)这两个向量是平行的(存在线性关系)，而(1,2,3)与(6,7,9)，(2,4,6)与(6,7,9)却不存在这种线性关系。**这种关系反映了矩阵的本质**——**以后称之为矩阵的秩**，这个秩是 2。

事实上，矩阵作为线性代数中“线性变换”的手段，更需要读者去仔细体会，这就留待读者深入学习后再作总结吧。

三、线性代数中的一号人物——向量

有了前面两个标题的铺垫，可以让**线性代数的主人翁——向量**出场了。上面指出，矩阵中的若干个列(行)都是向量，它们之间存在着某种联系，这种联系说到底，就是**线性无关的向量个数(独立信息的个数)的问题**，也就是这若干个向量组成的向量组中，有几个就足够代表这个向量组，其他的向量都可以由这几个向量线性表示出来。比如，你看到向量组(1,2,3)，(6,7,9)与(2,4,6)，有三个成员，可是，(2,4,6)这个向量可以由(1,2,3)这个向量的 2 倍来表示，于是，(2,4,6)这个向量就是“多余”的，不是独立的信息。

进一步地，我们可以通过仔细排查，找到在一个向量组中，能够代表该向量组中所有成员的一组向量，比如上面这个向量组的(1,2,3)和(6,7,9)，把它们组成的向量组叫**极大线性无关组，这个组就是向量组的"代表"**. 今后会发现，这个极大线性无关组中的代表的个数对于同一个向量组来说，是唯一的，事实上，**代表的个数就是独立信息的个数，这个个数就叫做秩**. 秩就是独立信息的个数，就是"代表"中有这几个独立信息就足够表示所有的其他信息了.

极大线性无关组是向量组的"代表"，而矩阵就是由向量组拼成的，所以**矩阵的秩、向量组的秩都反映了"代表"的问题，本质完全相同.**

读者研读完这一部分就会发现下面这个重要观点：我们致力于搞清楚的，就是向量与向量之间的关系——这种关系"非白即黑"——要么"独立"，要么"多余". 在充斥着诸多抽象理论和方法的向量组问题上，把握住上述重要观点，才不会迷失.

四、线性方程组与向量组其实是一回事儿

我们来看一般的非齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

该方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

就是若干个列向量拼成的，且其增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

就是系数阵再添加一个列向量拼成的.

仔细观察，把上述方程组写成向量的形式便不难看出，**该方程组的未知数就是向量组中各成员的系数**：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},j=1,2,\cdots,n,\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

所以从本质上说，**方程组问题就是向量组问题，方程组和向量组是同一个问题的两种表现形式，其本质一样，所以解决方法也一样.**

求解线性方程组，就是对增广阵作初等行变换，化成行阶梯型矩阵，然后求解. 这个基本方法贯穿这门课程始终.

接下来，该方程组有无穷多解时，如何表示出所有的解？这又是某个(无穷)向量组用什么“代表”来表示的问题. 这个“代表”就是基础解系. 于是，解线性方程组便成了这一部分的关键. 只是希望读者发现：解方程组所得到的解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，不就是描述向量与向量之间关系的表示系数吗？

五、顺理成章地引入向量空间

现在来引入向量空间的概念，已经是水到渠成.

齐次线性方程组的解是向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，其全部解的集合就是一个向量组，也叫做解空间，这个解空间就叫一个向量空间.

向量空间的基就是向量组中的极大线性无关组，还是“代表问题”，空间的维数就是基的个数，就是矩阵或者向量组的秩的问题，就是“代表”的个数.

求一个向量在一组基下的坐标表示，就是解决一个非齐次方程组的问题——事实上已经很明显——坐标就是方程组的解.

综上所述，以下三个问题是等价的：

(1)求非齐次方程组的解；(2)求一个向量由一组向量线性表示的系数；(3)求一个向量在一组基下的坐标(唯一解).

所以读者会发现，只要研究完向量组与方程组问题，这一部分便可迎刃而解.

六、二次型化标准形

这一个话题的目的是：**如何把一个二次齐次式的复杂表示(含有交叉项)通过变换得到简单表示(只含平方项)**，这种简单表示有着巨大的意义. 而这种变换的实质就是**用正交变换把实对称矩阵相似对角化.**

这几句话高度概括，涵义深刻. 想知道这几句话多么精妙吗？那就开始自己的独立探索吧.

以上六点，我是本着“字斟句酌”的态度写出来的，请读者研究完本书的全部内容后反复阅读，补充完善，并熟稔于心，必能认识到一个真正的线性代数.

七、关于本书

本书是由各位作者在多年讲授线性代数或者高等代数课程和考研辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

本书各位作者曾经分别参与清华大学《线性代数(第二版)》教材的编写、考研数学命题、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》线性代数部分的编写、同济大学《线性代数(第五版)》的《习题全解与考研指导》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义. 期间，清华大学谭泽光教授、浙江大学蔡燧林教授与作者们进行了很多交流、给予作者们很多帮助，特别表示感谢.

现在，在北京理工大学出版社的大力支持下，作者们将线性代数这门课程按照考研数学考试大纲的要求，细分为 9 讲，称为《张宇线性代数 9 讲》，奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高线性代数学习水平的读者们参考.

本书每一讲由“内容精讲”“例题精解”“习题精练”三部分组成，所有习题都配有详细解答过

程，供读者参考.

“内容精讲”全面准确地阐述了本科教学基本要求和考研数学大纲中线性代数所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

“例题精解”通过精心挑选或者编制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

“习题精练”给读者留下了作业：独立完成这些优秀的试题，既检验自己的学习成果，又培养自己独立做题的能力，且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢？我提四个建议.

（1）坚持不懈，细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲：“一天不练功，只有我知道；三天不练功，同行也知道；一月不练功，观众全知道.”复习数学，我们建议读者也一定要这样，捧着这本书，每天都要看内容，每天都要做题目，坚持不懈，细水长流，便可水到渠成.

（2）不求初速，但求加速

一开始读数学书，总会吃力一些，遇到的困难多一些，这很正常，我们不要畏难，应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂，把每一个难点攻克，这样，开始复习的速度就会慢一些. 但是，只要能够坚持，复习了一定的内容之后，你便会发现，复习速度不断提高，理解能力和解题能力都会显著增强. 这符合数学学习的规律，请读者把握住.

（3）独立思考，定期检验

复习一个知识，先要读基本的概念、定理和公式，然后看例题，再去做习题. 只有通过做题，才能知道自己是否真正掌握了这个知识. 一定不要翻着答案做题，稍有不会就看答案，这样效果不好. 读者先不要看答案，自己独立地去做，调动起自己所有的知识储备，看能不能做出来，做出来了，自然很好，即使做不出，时间也没有白费，其他的知识在你脑子里过了一遍，也是一种复习. 只是要注意，如果全力以赴也未做出题目，看完答案后要好好总结经验. 在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段，都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

（4）吸取教训，善于总结

人没有不犯错误的，尤其在学习数学的过程中，做错题，不会做题，是再平常不过的了. 人们常说：“失败是成功之母”，就是这个意思. 我们常告诉学生：如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题，可能会有两种态度，一种态度是消极的，题目不会做，心情不好，自暴自弃，复习效率大打折扣；一种态度是积极的，题目做不出，正是找到了自己复习的薄弱环节，找到了自己的不足之处，正是遇到了自己提高、进步的机会，我们当然支持后面一种态度，这才是正确的态度. 所以，希望在考研复习的过程中，读者准备一个笔记本，通过不会做或者做错的题目，认真分析自己到底问题出在哪里，哪些知识还复习不到位，吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高你的数学水平，是有极大帮助的.

本书答疑地址：http://weibo.com/zhangyumaths.

最后，我要再次感谢前考研数学命题组的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予了本书很大的支持和帮助. 我无意用“水平有限”作为遁词，诚心接受读者和同行专家的批评指正.

张宇

2014年3月　于北京

Contents 目录

第 1 讲　行列式的基本概念与计算

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一	行列式的概念
	数学二	
	数学三	
会	数学一	应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式
	数学二	
	数学三	
掌握	数学一	行列式的性质
	数学二	
	数学三	

内容精讲

一、行列式的定义

1. 排列和逆序

排列　由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列，如 23145 是一个 5 级排列，41352 也是一个 5 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

逆序　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，若 $i_s>i_t$，且 i_s 排在 i_t 前面，则称这两个数构成一个逆序.

逆序数　一个排列中，逆序的总数称为该排列的逆序数，记作 $\sigma(i_1i_2\cdots i_n)$，如 $\sigma(231564)=3$，$\sigma(621534)=8$. 由小到大顺排的排列称为自然排序，如 12345，显然，自然排序的逆序数为 0.

奇排列和偶排列　排列的逆序数为奇数时，该排列称为奇排列；排列的逆序数为偶数时，该排列称为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 列下标排列求和，故共有 $n!$ 项之和. 注意到行下标已经顺排，而列下标是任一个 n 级排列，故每项由取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积组成，每项的正负号取决于 $(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$. 若列下标为奇排列时，应附加负号；列下标为偶排列时，应附加正号.

【注】 (1)如:请确定“$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$”这一展开项前的正负号.答:首先将行下标顺排为 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$,然后计算 $\sigma(25134)=4$,为偶排列,故该项前为正号.

(2)上述 n 阶行列式利用逆序的定义和教材中对于2,3阶行列式的定义是完全一致的.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

二、行列式的性质

性质1 行列互换,其值不变,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.故对行成立的性质,对列也适用.

性质2 行列式中某行(列)元素全为零,则行列式为零.

性质3 行列式中某行(列)元素有公因子 $k(k\neq 0)$,则 k 可提到行列式外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】 (1)本书用 kⓘ表示 i 行乘 k,$k[j]$表示 j 列乘 k 倍;

(2)以后称等式从右到左的运算为“**倍乘**”性质

性质4 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【注】 等式从右到左是两个行列式之和.如果两个行列式的其他元素对应相等,只有一行(列)不同时,可以相加,相加时其他元素不变,不同元素的行(列)对应相加即可.

性质5 行列式中两行(列)互换,行列式的值反号.

【注】 (1)以后用ⓘ↔ⓙ表示第 i 行与第 j 行互换,$[i]\leftrightarrow[j]$表示第 i 列与第 j 列互换;

(2)以后称上述运算为“**互换**”性质.

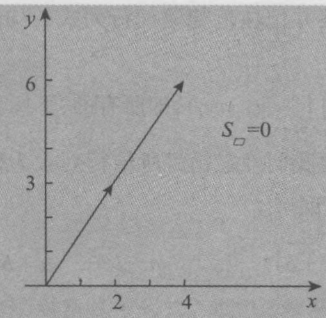
性质6 行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例,则行列式为零.

性质7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

【注】 (1)以后用ⓘ$+k$ⓙ表第 j 行的 k 倍加到第 i 行,$[i]+k[j]$表第 j 列的 k 倍加到第 i 列;

(2)以后称上述运算为“**倍加**”性质.

【注】 以上7个性质均可由本书前言中“一、从行列式讲起”所介绍的行列式的几何背景直观地得到,而不需复杂抽象的分析,如性质6所说到的“两行元素对应成比例,则行列式为零”,可取 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$,因向量(2,3)与向量(4,6)为平行向量,故 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=S_{\Box}=0$,如下图所示,一目了然.



三、行列式的展开定理

超过 3 阶的行列式，若还用“一”的定义法展开，则太麻烦了，下面提出行列式的展开定理.

1. 余子式

在行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记成 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式

余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}；即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

但行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和结果为零，即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0, i\neq k;$$
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0, j\neq k.$$

【注】 余子式与代数余子式是行列式展开定理的核心概念，关于它们的重要且灵活的使用请参看例 1.18 至例 1.20.

四、范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

【注】(1)首先，读者要仔细观察并记住范德蒙德行列式的构成：它的每一列为$(x_i^0=1,x_i^1,x_i^2,\cdots,x_i^{n-1})^{\mathrm{T}}$，共$n$个元素，$i=1,2,\cdots,n$.

(2)其次，要记住其计算结果为$\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$，即所有的"下标大的元素减去下标小的元素"的乘积.

(3)这样一来，读者不难发现，只要我们确定题目所给行列式为范德蒙德行列式，便只需盯住该行列式的第二行元素，写出$\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$即可.

如：
$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xlongequal{①+②} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$
$$=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a).$$

例题精解

一、行列式的定义

★

理解行列式的定义应抓住以下四条：

(1)n阶行列式的全部展开式总共有$n!$项；

(2)每项是取自不同行、不同列的n个元素的乘积；

(3)当行下标顺排时，其每项的正负号由$(-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)}$决定.

例 1.1 用定义计算下列行列式：

$$(1)D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad (2)C_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 (1)D_n中第1列中只能取非零元素a_{11}，第2列中只能取a_{22}，…，第n列中只能取a_{nn}，故$n!$项中只有一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$不为零，且行下标已顺排，列下标也顺排，故

$$D_n=(-1)^{\sigma(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

且显然

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

上述三个行列式从左至右分别称为**主对角线行列式**、**左下三角形行列式**、**右上三角形行列式**，其值为主对角元素的乘积.

(2)同理，C_n的第1行只能取a_{1n}，第二行取$a_{2,n-1}$，…，第n行取a_{n1}. 正负号由$\sigma(n(n-1)\cdots 21)=\dfrac{n(n-1)}{2}$决定，故

$$C_n=(-1)^{\sigma(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

显然有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

上述三个行列式从左至右分别称为**副对角线行列式**、**左上三角形行列式**、**右下三角形行列式**，其值为副对角元素的乘积再乘以$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

【注】 (1)注意，并非行列式中副对角元素连乘这一项总是取负号，而应是当$n=2,3,6,7,\cdots$时取负号；当$n=4,5,8,9,\cdots$时取正号.

(2)本题也可以用行列式展开定理计算.

(3)对角线行列式(三角形行列式还可以利用性质化成对角线行列式)是行列式的最简形式，有很多行列式可通过行列式的性质化成三角形行列式来计算.

例 1.2 利用行列式的定义证明：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}\neq 0.$$

证明 由行列式定义知其是$n!$项的代数和，每项是不同行不同列的n个元素的积．上述行列式中除主对角元素乘积一项是奇数1外，其余各项(共$n!-1$项)的每项中至少有一个2，故均是偶数．$n!-1$个偶数之和仍是偶数，再和1相加，是奇数，不可能是零，故上述行列式不等于零.

【注】 进一步地，该行列式等于多少呢？请见例1.8.

例 1.3 利用定义证明：若$n(n\geqslant 2)$阶行列式$|\boldsymbol{A}|$的元素为1或-1时，则$|\boldsymbol{A}|$等于偶数.

证明 因$|\boldsymbol{A}|$中元素是1或-1，由行列式定义知，行列式共有$n!$项，此时每项为1或-1，设r项为-1，则$n!-r$项为1，因为$n!$ $(n\geqslant 2)$是偶数，

$$|\boldsymbol{A}|=(n!-r)\cdot 1+r\cdot(-1)=n!-2r,$$

从而得证$|\boldsymbol{A}|$是偶数.

【注】 考研数学命题重视对考生基础的考查，故希望读者在基本概念题上要下足功夫.

二、数值行列式的计算

★

这类问题的特点是：(1)阶数不高(一般为3阶或者4阶)；(2)元素均为具体数值.

解决此类问题的一般思路是：

用好前面所讲的"倍乘""互换""倍加"性质，让行列式中出现尽可能多的零元素，再用展开法展开即可. 读者应多加训练.

例 1.4 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -3 & 7 & -1 \\ 7 & -9 & 2 \end{vmatrix}.$$

分析 利用倍加性质，将某列(行)元素除其中一个(如本题中的-1)外的其余元素消为零(取-1是为了方便消该列其余元素3,2为零)，然后展开，降成低阶行列式计算.

解 利用$a_{23}=-1$，消$a_{13}=3$，$a_{33}=2$为零，且展开

$$\begin{vmatrix}2&-5&3\\-3&7&-1\\7&-9&2\end{vmatrix}\xlongequal[③+2②]{①+3②}\begin{vmatrix}-7&16&0\\-3&7&-1\\1&5&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\times(-1)\begin{vmatrix}-7&16\\1&5\end{vmatrix}$$

$$=-35-16=-51.$$

例 1.5 计算行列式：

$$\begin{vmatrix}3&4&5&11\\2&5&4&9\\5&3&2&12\\14&-11&21&29\end{vmatrix}.$$

分析 行列式元素中没有±1，利用倍加性质直接消零计算比较烦琐．故先利用倍加性质，化出一个元素为 1 或 −1，再利用这个元素消同列（行）其余元素为零，然后再展开．

解
$$\begin{vmatrix}3&4&5&11\\2&5&4&9\\5&3&2&12\\14&-11&21&29\end{vmatrix}\xlongequal{①-②}\begin{vmatrix}1&-1&1&2\\2&5&4&9\\5&3&2&12\\14&-11&21&29\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{[3]-[1]\\ [4]-2[1]}]{[2]+[1]}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&7&2&5\\5&8&-3&2\\14&3&7&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&2&5\\8&-3&2\\3&7&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②-2③]{①-5③}\begin{vmatrix}-8&-33&0\\2&-17&0\\3&7&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&33\\-2&17\end{vmatrix}$$

$$=136+66=202.$$

例 1.6 计算行列式：

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-5}{2}&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}\\1&-1&\frac{3}{5}&\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{9}{2}&\frac{-2}{5}&\frac{5}{2}\\\frac{-1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{-1}{7}&\frac{3}{7}\end{vmatrix}.$$

分析 不同分母的两个分数之间的加减运算比较烦琐．为简化运算，可提出公因子，将行列式化成整数的行列式再进行运算．

解

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-5}{2}&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}\\1&-1&\frac{3}{5}&\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{9}{2}&\frac{-2}{5}&\frac{5}{2}\\\frac{-1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{-1}{7}&\frac{3}{7}\end{vmatrix}=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-5}{2}&\frac{1}{5}&\frac{1}{2}\\1&-1&\frac{3}{5}&\frac{3}{2}\\\frac{2}{3}&\frac{9}{2}&\frac{-2}{5}&\frac{5}{2}\\-1&2&-1&3\end{vmatrix}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&-5&1&1\\3&-2&3&3\\2&9&-2&5\\-3&4&-5&6\end{vmatrix}$$