21世纪大学公共数学系列教材

运筹学通论

（第三版）

● 魏权龄　胡显佑　严　颖　编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

运筹学通论

（第三版）

● 魏权龄　胡显佑　严　颖　编著

Math

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

运筹学通论/魏权龄等编著. —3版. —北京：中国人民大学出版社，2013.8
21世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-17862-2

Ⅰ.①运… Ⅱ.①魏… Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第169375号

21世纪大学公共数学系列教材
运筹学通论（第三版）
魏权龄　胡显佑　严颖　编著
Yunchouxue Tonglun

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司	**版　　次**	1987年5月第1版
规　　格	185 mm×260 mm　16开本		2014年2月第3版
印　　张	22.5插页1	**印　　次**	2014年2月第1次印刷
字　　数	538 000	**定　　价**	39.80元

总　　序

进入21世纪以来，现代科学技术大潮汹涌澎湃，深刻地影响到人类社会的进步和发展。新的时代呼唤新的高素质的人才，呼唤教育有更多的创新和更大的发展。

在诸多教育中，数学教育具有特殊地位和作用。数学作为科学的“皇后”、一门具有丰富内容的知识体系，在其发展过程中，与其他学科交叉渗透，广泛应用，已成为科学发展的强有力的工具和原动力。数学以其特有的哲学属性，又是人们的思维训练的体操。正如美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中指出的，“数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号，等等。它们是普遍适用并且强有力的思考方式。运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法。数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界。”“数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用。”同样的，数学是一种文化，一门艺术，同样可以为人们提供美的熏陶。多年来，我国高校的数学教育为了适应新形势，已经由以自然学科为主的部分专业扩展到包括人文社科专业在内的所有学科，课程建设和教学改革广泛而深入，硕果累累。

教材建设是教学改革的核心，为了进一步推动我国高等教育数学课程的建设和发展，我们组织国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干编写并推出了“21世纪大学公共数学系列教材”。系列教材的宗旨是，面向世界，面向未来，面向现代化，总结和巩固我国高等教育长期以来数学课程改革和教材建设的成果，更好地发挥数学教育的工具功能、数学素质教育功能、文化修养功能。

系列教材将涵盖理、工、医、农、经济学、管理科学、人文社科等多学科，在总体把握数学教育的功能定位的基础上，充分考虑不同学科的特点和需求，区分出不同层次和侧重点，并参照相关专业通行的教学大纲编写。例如，理、工学科的公共数学课同时是专业基础课，更要注重课程的工具功能，更强调与后续课程的有机衔接，而人文社科则更侧重于发挥其文化素质教育的功能。

系列教材力求将传统和创新相结合。相对而言，公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系，具有简洁、严谨和逻辑性强的特点。历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材。我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时，注意加入新的因素，主要目的是：使内容更能适应各个学科发展和创新的需要；使结构更加优化便于施教；使形式更为多样化、立体化，教学手段更为丰富。

我们深知，一部好的数学教材不仅需要对数学学科的深刻理解，而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼，尤其是需要作者的专业水准和敬业精神。我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作，是难能可贵的，这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证。

第三版前言

《运筹学通论》（第一版，1987 年）是“经济应用数学基础”系列教材的第五册，该系列教材是受教育部委托编写的高等院校财经专业的试用教材。现在，该教材单独出版，归入“21 世纪大学公共教学系列教材”。

本书作者都是于 1980 年前后开始在中国人民大学从事科研和教学工作的教师。在教学相长的过程中，我们切身感受到数学基础对于经济、管理和财经各专业学生的重要性。而运筹学各分支的内容也早已深入到有关学科领域和专业的教材之中。数学的概念、数学的运算，乃至数学的推理和证明，对于培养学生运用数学语言进行描述和创造都是必不可少的。计算机和计算机网络技术的飞速发展和普及，使学生迫切地需要学习更多的数学和用数学进行创造。与已有的其他不同类型的运筹学教材相比，本书更注重运筹学各分支相关的模型和基础理论，阅读本书时可结合以下两书进行：《数据、模型与决策》（Bernard W. Taylor 著，第 10 版，中国人民大学出版社，2011），包括很多运筹学的案例；《实用运筹学——运用 Excel 建模和求解》（叶向编著，中国人民大学出版社，2007），主要讲述用 Excel 建模和求解。

本书的第二版（2001 年 3 月）是在 1987 年 5 月第一版的基础上进行的。在讲述运筹学各主要分支时，增加了某些较为简单的证明。一方面有利于说清道理；另一方面通过运筹学的教学，训练学生用数学进行创造的能力。个别章节做了加强。例如，对策论和非线性规划。增加对策论的内容，是为了适应当今经济、管理和财经领域中较多地运用经济对策论研究现实问题的需要；加强非线性规划中的某些理论内容（特别是 Kuhn-Tucker 定理），是因为经济学等领域（例如，微观经济学、数理经济学、数量经济学等）中的讨论都是以它们作为基础进行的。同时，对运筹学中的新领域——数据包络分析（即 DEA）的内容，增加了新的一章。也删除了某些章节，例如“质量管理”一章。此外，增加了“线性规划”一章。本书的以后各章节中（例如，非线性规划、多目标规划、整数规划、对策论、数据包络分析等）需要线性规划的某些内容。

现在的《运筹学通论》是第三版（2014 年 1 月），保持了第二版的基本结构和内容。

除对较多笔误进行了改正之外，对某些章节的内容进行了修改和增补，例如第 6 章（数据包络分析（DEA））中的总体效率关于规模效率和技术效率的分解公式；使用输出型 DEA 模型 FG，ST 和 WY 评估决策单元的规模收益状况和是否呈现“拥挤迹象”等。

参加本书编写的有胡显佑（第 1、4、5、8、9 章）、魏权龄（第 2、3、6、7 章）和严颖（第 10、11、12、13 章）。在使用本书的过程中，我们得到了有关院校老师们的帮助和支持，在此表示衷心的谢意。中国人民大学出版社的有关同志为本书的再版提出了宝贵的建议，付出了辛勤的劳动，对此深表感谢。

作者

2014 年 1 月

目 录

第1章 线性规划简介 …… 1
§1.1 基本概念 …… 1
§1.2 线性规划问题解的性质 …… 6
§1.3 单纯形表 …… 9
§1.4 单纯形方法 …… 16
§1.5 对偶线性规划 …… 25
§1.6 对偶单纯形方法 …… 31
§1.7 对偶线性规划的应用 …… 36
习题一 …… 42
参考文献 …… 46

第2章 非线性规划 …… 47
§2.1 例子 …… 47
§2.2 预备知识 …… 49
§2.3 凸集、凸函数与凸规划 …… 54
§2.4 非线性规划的库恩-塔克定理 …… 61
§2.5 单变量极值问题的解法 …… 68
§2.6 无约束极值问题的解法 …… 73
§2.7 罚函数方法 …… 78
§2.8 线性约束条件下线性逼近的方法 …… 84
习题二 …… 89
参考文献 …… 91

第3章 多目标数学规划 …… 93
§3.1 多目标数学规划的特点 …… 93

§3.2 解集 …… 96
§3.3 像集 …… 101
§3.4 线性加权和模型 …… 106
§3.5 评价函数方法 …… 109
§3.6 最简单的“交互式”方法 …… 115
习题三 …… 118
参考文献 …… 121

第4章 整数规划 …… 122
§4.1 整数规划的例子 …… 122
§4.2 分枝定界法 …… 125
§4.3 割平面法 …… 132
习题四 …… 139
参考文献 …… 141

第5章 对策论 …… 142
§5.1 对策论的基本概念 …… 142
§5.2 矩阵对策及其解 …… 146
§5.3 矩阵对策的线性规划解法 …… 153
§5.4 二人有限非零和对策 …… 157
§5.5 n 人非合作对策 …… 163
§5.6 不完全信息对策 …… 167
习题五 …… 170
参考文献 …… 172

第6章 数据包络分析(DEA) …… 173
§6.1 多指标评价的 DEA 模型 C^2R …… 174
§6.2 C^2R 模型之下的生产可能集 T_{C^2R} …… 180
§6.3 “技术有效”、“规模有效”与 C^2R 模型 …… 182
§6.4 DEA 模型 BC^2,FG 和 ST …… 184
§6.5 DEA 有效(C^2R),(FG),(ST)和(BC^2)之间的关系 …… 188
§6.6 总体效率的分解公式 …… 192
§6.7 输出 DEA 模型 WY 与规模收益评估 …… 194
§6.8 DEA 有效性和多目标问题的有效解 …… 198
习题六 …… 204
参考文献 …… 206

第7章 动态规划 …… 208
§7.1 最短路问题与“最优化原则” …… 208

§7.2　多阶段配置问题 …… 213
§7.3　“背包”问题 …… 216
§7.4　资源分配问题 …… 221
§7.5　随机型采购问题 …… 225
习题七 …… 228
参考文献 …… 230

第8章　图与网络 …… 231
§8.1　基本概念 …… 231
§8.2　中国邮路问题与货郎担问题 …… 234
§8.3　最短通路问题 …… 241
§8.4　最大流问题 …… 245
§8.5　最小树问题 …… 250
习题八 …… 252
参考文献 …… 255

第9章　统筹方法 …… 257
§9.1　统筹图 …… 257
§9.2　统筹图上有关参数的计算 …… 262
习题九 …… 265
参考文献 …… 266

第10章　决策分析 …… 267
§10.1　决策的基本概念 …… 267
§10.2　概率的确定 …… 268
§10.3　效用函数 …… 269
§10.4　信息的价值 …… 274
§10.5　决策树 …… 278
习题十 …… 284
参考文献 …… 286

第11章　排队论 …… 287
§11.1　排队系统的描述及排队论研究的问题 …… 287
§11.2　指数、爱尔朗及泊松分布 …… 290
§11.3　泊松过程与生灭过程 …… 293
§11.4　基本的排队模型 …… 298
习题十一 …… 312
参考文献 …… 313

第 12 章　库存理论 …… 314
§ 12.1　库存模型中的几个要素 …… 314
§ 12.2　确定性库存模型 …… 315
§ 12.3　随机性库存模型 …… 322
习题十二 …… 326
参考文献 …… 328

第 13 章　模拟 …… 329
§ 13.1　引论 …… 329
§ 13.2　均匀随机数的生成 …… 334
§ 13.3　一般随机数产生的基本方法 …… 336
§ 13.4　几类重要的连续随机数的产生 …… 339
§ 13.5　几类重要的离散随机数的产生 …… 341
§ 13.6　随机向量的生成 …… 345
习题十三 …… 347
参考文献 …… 350

第 1 章

线性规划简介

线性规划是运筹学中研究较早，理论和算法比较成熟的一个重要分支. 它主要研究在线性等式(或不等式)的限制条件下，使得某一线性目标函数取得最小值(或最大值)的问题. 早在 1939 年，苏联的数学家康托洛维奇(Л. В. Канторович，1975 年诺贝尔经济学奖获得者)就提出了生产组织和管理中的线性规划模型. 20 世纪 40 年代末，美国的丹齐格 (G. B. Dantzig)提出了求解一般线性规划的单纯形方法. 库普曼(T. C. Koopmans)和查恩斯 (A. Charnes)对于线性规划的理论和应用也做出了突出的贡献. 目前可供计算大规模线性规划问题的计算机软件也较为成熟. 因而线性规划的方法在生产计划、运输、军事等领域都得到了重要的应用.

本书的许多内容，如非线性规划、整数规划、博弈论、多目标规划和 DEA 分析等都需要应用线性规划的方法. 本章所介绍的线性规划的基本理论和方法，主要目的正是为本书的其他各章做好必要的理论准备，至于线性规划理论和方法的更为系统、全面的论述，可参阅文献[4]和[5].

§1.1 基本概念

1. 线性规划问题的一般形式

为了说明线性规划问题的特点，我们首先研究一些例子.

例 1 (生产计划问题)某企业利用三种原料 B_1, B_2, B_3 生产 A_1, A_2 两种产品. 三种原料的月供应量(吨)，生产一吨产品 A_1, A_2 所需各种原料的数量以及单位产品的价格(万元/吨)如表 1—1 所示. 那么该企业应如何安排生产计划，才能使总收益最大?

解 设生产产品 A_i 的数量为 x_i(吨/月)，$i=1,2$. 则因原料 B_1 的月供应量为 150(吨)，因此应有

$$x_1+x_2\leqslant 150$$

表 1—1

单位产品消耗（原料＼产品）	A_1	A_2	原料月供应量（吨/月）
B_1	1	1	150
B_2	2	3	240
B_3	3	2	300
单位产品价格(万元/吨)	2.4	1.8	

类似可得 $2x_1+3x_2\leqslant 240$ 和 $3x_1+2x_2\leqslant 300$，此时该企业的总收益为 $2.4x_1+1.8x_2$. 由于产品数量不能取负值，因此应有 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$. 这样，所研究的问题可写成

$$\max f=2.4x_1+1.8x_2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 150 \\ 2x_1+3x_2\leqslant 240 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 300 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

例 2 某种物资要由 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 运往 n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 若产地 A_i 的产量为 a_i 吨，$i=1,2,\cdots,m$；销地 B_j 的需求量为 b_j 吨，$j=1,2,\cdots,n$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$（总供给=总需求）. 各产地到各销地的物资单位运价如表 1—2 所示，那么应如何组织调运工作，才能使总运费最小？

表 1—2

运价（产地＼销地）	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量(吨)
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量(吨)	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

解 设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数量，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$. 则由产地 A_i 运往各个销地的物资总量应等于其产量 a_i，即

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

类似地，各产地运往销地 B_j 的物资数量应等于其需求量，即

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,2,\cdots,n$$

此时，总运价为 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$，且 $x_{ij}\geqslant 0$，　$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$.

于是，运输问题可写成

$$\min f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=1,2,\cdots,n\\ x_{ij}\geqslant 0, & i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

这一问题是线性规划最早研究的问题之一，并且已有了一些特殊的求解方法.

例 3 （营养配方问题）某饲料厂利用 n 种原料配制含有 m 种营养成分 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的饲料，要求每单位饲料中含各种营养成分的数量不得少于 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 个国际单位. 已知原料 B_j 含有营养成分 A_i 的数量为 c_{ij}（$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）个国际单位，其单价为 b_j，$j=1,2,\cdots,n$. 问应如何配料，可使饲料满足营养要求，且成本最低?

解 设每单位饲料中选用原料 B_j 的数量为 x_j（$j=1,2,\cdots,n$）单位. 由于每单位饲料中含 A_i 的数量不得少于 a_i，故应有

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\geqslant a_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_j=1$$

此时，单位饲料的成本为 $\sum_{j=1}^{n}b_jx_j$. 于是营养配方问题可写成

$$\min f=\sum_{j=1}^{n}b_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j\geqslant a_i, & i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & \\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

由上面的例子可以看出，它们的经济背景虽有区别，但其数学模型却有共同的特点：要确定一组变量的值，使之满足一组线性等式或线性不等式，并使一个线性目标函数取得最小值（或最大值），这类问题都称为线性规划问题.

一般地，具有 n 个变量的线性规划问题的一般形式可以记为

$$\min f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\quad\left(\text{或}\max f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\right)$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j * b_i, & i=1,2,\cdots,m & (1.1)\\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n & (1.2)\end{cases}$$

其中“$*$”表示“$\geqslant$”或“$\leqslant$”或“$=$”中的某一个. 线性函数 $f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ 称为线性规划问题的目标函数. 式(1.1),式(1.2)称为线性规划问题的约束条件. 满足约束条件的一组 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的值称为线性规划的一个可行解. 如果存在一个可行解使目标函数取得最小值(或最大值),则该可行解称为线性规划问题的最优解.

2. 两个变量线性规划问题的图解法

为了进一步研究线性规划问题解的性质,我们首先讨论两个变量的线性规划问题的图解法.

例 4 用图解法求下面线性规划问题的最优解.

$$\max\ f=3x_1+4x_2$$
$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ \qquad x_2\leqslant 3 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解 我们把 x_1, x_2 看做平面直角坐标系中某个点的坐标,则满足任一约束不等式的所有的点(x_1, x_2)就位于一个半平面上. 如满足不等式 $x_1+x_2\leqslant 6$ 的所有的点都在以 $x_1+x_2=6$ 为边界的左下平面上. 在此例中共有五个约束不等式,所以这五个半平面的公共部分(见图 1—1)中的点就是线性规划问题的可行解. 这一公共部分(图 1—1 中的区域 $OABCD$)称为线性规划问题的可行解区域. 它是一个凸区域.

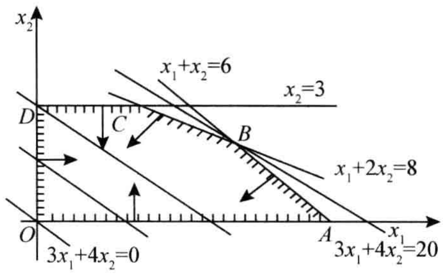

图 1—1

为了求出此线性规划问题的最优解,我们将 f 看做参数,则 $f=3x_1+4x_2$ 表示坐标平面上的一族平行直线. 直线 $3x_1+4x_2=f$ 上的任意一点的坐标对应的目标函数值均为 f. 我们称这样的直线为等值线(或等高线).

令 f 分别取值 0,2,4 等,就可以作出一族等值线,由此观察目标函数值变化时,等值线的变化规律. 由图 1—1 可以看出,当 f 取值越大时,对应的等值线离原点越远. 我们只要选取等值线中既与可行解区域有公共点,又尽可能与原点距离远的那一条就可以了. 由图 1—1 看出通过 B 点的等值线满足这一要求. 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1+2x_2=8 \end{cases}$$

可得 B 点坐标 $x_1=4$, $x_2=2$. 对应的目标函数值为 $f_{\max}=3\times 4+4\times 2=20$. 因此线性规划问题的最优解为 $x_1=4$, $x_2=2$,最优值为 $f_{\max}=20$. 不难看出,该线性规划问题的最优解是唯一的.

例 5 用图解法解线性规划问题.

$$\max\ f=x_1+x_2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 6 \\ x_1+2x_2\leqslant 8 \\ \qquad x_2\leqslant 3 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解　由于约束条件与例 4 完全相同，所以可行解区域仍为图 1—1 中的凸区域 $OABCD$. 因目标函数 $f=x_1+x_2$ 所确定的任一等值线平行于直线$x_1+x_2=6$. 由图 1—1 可以看出，图中线段 AB 上的任意一点都是此线性规划问题的最优解. 例如，$x_1=4$，$x_2=2$(B 点)，或$x_1=6$，$x_2=0$(A 点)都是最优解，对应的目标函数的最优值为 $f_{\max}=6$. 这一线性规划问题有无穷多解.

例 6　用图解法求解线性规划问题.

$$\min\ f=2x_1+2x_2$$

$$\begin{cases} x_1-x_2\geqslant 1 \\ x_1-2x_2\geqslant 0 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解　在直角坐标系中，确定各约束不等式所对应的半平面，其公共部分为图 1—2 中的无界凸区域.

在目标函数 $f=2x_1+2x_2$ 中，令参数 $f=0,2,\cdots$ 作出等值线. 由图 1—2 直接可看出在 B 点取得最优值. B 点坐标为 $x_1=1$，$x_2=0$，所以最优值为 $f_{\min}=2$.

在例 6 中，如果是求目标函数 $f=2x_1+2x_2$ 的最大值，则由图 1—2 看出，不论设参数取多大的正数 M，等值线 $2x_1+2x_2=M$ 总可以与可行解区域有公共点. 这时线性规划的最优值无上界，因而无最优解.

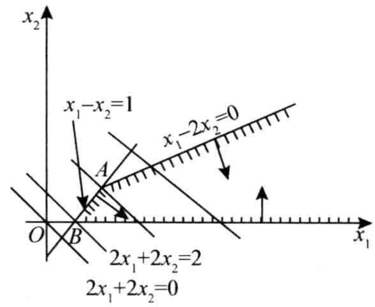

图 1—2

例 7　用图解法求解线性规划问题.

$$\min\ f=3x_1-2x_2$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 1 \\ 2x_1+3x_2\geqslant 6 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

解　在直角坐标系中，作出各约束不等式所表示的半平面(见图 1—3)，则由图 1—3 可知，各半平面无公共部分，因而线性规划问题无可行解，更无最优解.

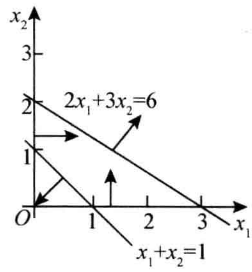

图 1—3

由上面的几个例子，可以得到几个重要结论：

(1)线性规划问题可能没有可行解(如例 7). 当线性规划问题有可行解时，它可能不存在最优解(最优值无界)，如例 6 中求目标函数最大值的情形；也可能仅有唯一的最优解，如例 4 和例 6；还可能有无穷多个最优解，如例 5.

(2)线性规划问题的可行解区域都是“凸”区域，这一区域可能有界，也可能无界(如例

6).

(3)若线性规划问题存在最优解,则最优值必可在可行解区域的顶点上达到. 如例 4 中的 B 点;例 5 中的 A 点、B 点等.

上述结论还可以推广到含有 n 个变量的线性规划问题.

§1.2 线性规划问题解的性质

1. 线性规划问题的标准形式

为便于研究线性规划问题的求解方法和解的性质,我们首先规定线性规划问题的标准形式. 如果一个线性规划问题满足以下条件,就称为标准形式的线性规划问题:

(1)求目标函数的最小值.

(2)所有变量均要求取非负值.

(3)所有的约束条件(变量非负约束除外)必须为等式.

具有 n 个变量的标准形式的线性规划问题可记为

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(\mathrm{LP})\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

如果记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则线性规划问题(LP)可记为

$$\min f=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$$(\mathrm{LP})\begin{cases} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0} \end{cases}$$

它称为线性规划问题的矩阵形式.

满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为问题(LP)的可行解. 问题(LP)的可行解集合记为

$$R=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$$