普通高等教育“十一五”国家级规划教材教辅系列

DAXUE WULIXUE XUEXI ZHIDAO YU NENGLI XUNLIAN

大学物理学（第4版）学习指导与能力训练

主 编 陈中华 阎 明

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材教辅

大学物理学(第4版)
学习指导与能力训练

主编　陈中华　阎　明
编写　石长光　陈中华　阎　明
孙祖尧　葛　亮　裔国瑜
主审　王少杰

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是王少杰、顾牡、王祖源主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学物理学(第4版)》的配套指导和训练用书，由长期从事大学物理学教学的一线教师执笔编写．全书根据主教材的章节编排，全面而系统地给出每章的基本要求、重点概念及主要公式等学习指导内容，并对常见及疑难问题进行了全面概括和深入剖析，对课堂教学中不易展开的问题及诸多典型题目进行了详细探讨，帮助读者进一步掌握相关的物理概念．同时，通过解题要点及例题详解，举一反三，拓展读者分析和解决问题的思路，再辅以能力训练，通过适量的习题，帮助读者在解题和思考的过程中对物理概念和规律的认识产生新的飞跃．书末，附有与主教材上、下册配套的试卷共12份，便于学生在学期末对全书的掌握程度进行自测．

本书知识系统，讲解深入浅出，有“导”能“练”，好学易懂，适应面宽，无论是对教师备课、授课，还是对学生学习、复习和巩固课程的教学效果均大有裨益．本书适合于大学本科非物理专业的理工科学生使用，也可供相关的专业师生参考．

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学(第4版)学习指导与能力训练/陈中华，阎明主编．--上海：同济大学出版社，2014．1

ISBN 978-7-5608-5379-6

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①陈…②阎…　Ⅲ．①物理学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第288143号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材教辅系列

大学物理学(第4版)学习指导与能力训练

主编　陈中华　阎　明

责任编辑　张　莉　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021－65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　20.75

印　　数　1—5100

字　　数　517000

版　　次　2014年1月第1版　　2014年1月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-5379-6

定　　价　36.00元

前　言

以物理学基础知识为内容的大学物理学课程，包括经典物理、近代物理和物理学在科学技术中的应用知识等内容．这些都是非物理学专业的理工科大学生所必须掌握的基本理论和基础知识．同时，通过本课程的学习，可以培养学生正确地掌握科学的思维方式和研究问题的方法，从而提高科学素养．

随着我国改革开放后国民经济、科学技术迅速的发展，我国的高等教育也得到了十分迅猛的发展，教育的改革步伐一天也没有停止过．2005年，国家教育部大学基础物理教学指导委员会根据教学改革的要求和需要，重新制定并颁布了《非物理类理工学科大学物理课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)，这对本课程的建设、发展和高等教育教学质量的提高具有历史性的意义．然而，在当前形势下如何贯彻《基本要求》，如何学好大学物理，对于许多新入学的大学生而言仍然是一大难题，也是广大从事基础物理教学的教师面对的难题．虽然造成这个难题的原因十分复杂，需要多方面的努力寻求解决，但其中有一点是显而易见的：传统的应试教育，使得学生的独立性和自学能力明显不足，从中学进入大学后，难以适应大学的学习环境以及角色的变化．因此，我们必须给学生创造更好的学习条件，设置合理的学习“坡度”和提供更有效的学习途径，使他们能够在掌握知识的同时，不断提高独立自学的能力．在这一指导思想下，按照新的《基本要求》，我们组织了一批长期从事大学物理学教学的一线教师，根据王少杰、顾牡、王祖源主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学物理学(第4版)》的内容和次序，结合多年的教学经验和命题经验，编写了《大学物理学(第4版)学习指导与能力训练》一书，目的在于帮助学生在《基本要求》下，更好、更方便地学习大学物理学课程．

本书根据主教材的章节编排，全面而系统地给出每章的基本要求、重点概念及主要公式等学习指导内容，并对常见及疑难问题进行了全面概括和深入的剖析，对课堂教学中不易展开的问题及诸多典型题目进行了详细的探讨，可以帮助广大学生进一步掌握和认识相关的物理概念，同时通过解题要点及例题详解，举一反三，拓展学生分析和解决问题的思路，最后辅以能力训练，通过适量的习题，帮助学生在解题和思考的过程中对物理概念和规律的认识产生新的飞跃．本书有以下几个主要特点：

(1) 全面地体现《基本要求》，基本涵盖了《基本要求》的全部内容，同时，本书适用于重点和非重点院校(书中“*”号部分表示非重点高校或少课时对象可以不要求)．

(2) 为了方便学生真正理解和掌握所学知识，本书的重点在于对学生的“学习”进行“指导”，为此，基本上在每章都安排了“常见及疑难问题答疑”、“解题要点及例题详解”(第16,17章除外)等内容．

(3) 每章的“能力训练”中均配有一定数量的、难易分布合理的选择题、填空题、计算题(第16,17章除外)等，并于书末附有参考答案，目的是使学生获得系统的知识能力训练．

(4) 书末，还附有与主教材上、下册配套的三种不同类型的试卷共12份，便于学生在学期末对全书的掌握程度进行全面自测、自评。

(5) 为了使学生能方便地查阅相关的物理数据及常数，本书增加了书后附录，内容包括希腊字母表(附读音)，国际单位制中用以表示十进制倍数的词头及符号，国际单位制(SI)基本单

位，有关太阳、地球和月亮的数据等.

本书知识系统，行文优美，讲解深入浅出，有“导”能“练”，好学易懂，适应面宽. 无论是对教师备课、授课，还是对学生学习、复习和巩固课程的教学效果等均大有裨益. 尤其适合于大学本科非物理专业的理工科学生使用，也可供相关的专业师生参考.

本书由陈中华、阎明主编，参加编写的人员有上海电力学院石长光（第 14—17 章）、陈中华（第 11—13 章）、葛亮（第 1，2 章）、上海海事大学孙祖尧（第 9，10 章）、阎明（第 6—8 章）、裔国瑜（第 3—5 章）.

在本书的编写过程中，始终得到王少杰教授、顾牡教授和王祖源教授的关心和帮助，并由王少杰教授主审. 王少杰教授在百忙之中多次审读书稿，并时赐教益，多有臂助. 谨此向他们表示衷心的感谢！

由于作者水平与学识有限，加之编写时间紧迫，虽经多次校雠，书中疏漏与错误之处难免，真心希望广大教师和学生不吝赐正并多提宝贵建议，以便我们及时纠正，共同为我国大学物理教学质量的不断提高作出贡献.

编　者

2013 年 10 月

目　录

第 1 章　质点运动学

质点力学是以具有质量而形状和大小可忽略的物理模型 —— 质点为研究对象，并由质点运动学和质点动力学两部分所构成. 质点运动学是讨论如何定义和用数学语言描述物体的运动规律. 本章从运动的相对性出发，引入位置矢量、位移、速度和加速度等物理量来描述质点在空间的位置及位置变化，内容涉及一般曲线运动和圆周运动，同时阐述了在自然坐标系中法向加速度和切向加速度的物理意义以及相对运动的一般规律.

1.1　基本要求

(1) 理解质点模型及参考系和坐标系的概念；

(2) 掌握位置矢量、运动方程和轨道方程的概念及其计算方法；

(3) 明确位移和路程、速度和速率的区别，掌握位移、速度和加速度等物理量的意义和计算方法；

(4) 掌握圆周运动的角量描述和计算方法；

(5) 掌握法向加速度和切向加速度的概念及计算方法；

(6) 理解运动的相对性原理，能分析简单的质点相对运动问题.

1.2　重点概念及主要公式

1. 运动的一般描述

(1) 质点. 具有质量而形状和大小可忽略的物体，它是一个理想模型.

(2) 参照系. 是为描述物体的运动而选取的标准参照物.

(3) 坐标系. 为定量地描述物体的位置和位置随时间的变化而在参照系中建立的计算系统.

(4) 位置矢量. 是用于描述质点在空间位置的物理量.

在直角坐标系中　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

$\boldsymbol{r}$ 的大小为　$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

其方向一般用方向余弦表示[图 1-1(a)]，即

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \cos\beta = \frac{y}{r},\quad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

质点在 xOy 平面内运动时，$\tan\alpha = \dfrac{y}{x}$，如图 1-1(b) 所示.

位置矢量具有矢量性；在不同时刻，位置矢量一般不相同，因此具有瞬时性；对不同的参照系，同一质点某时刻的位置矢量是不同的，因此具有相对性.

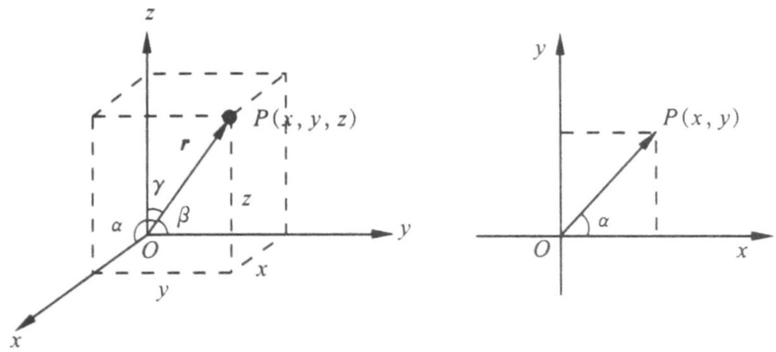

图 1-1

位置矢量的单位为米(m).

(5) 运动方程. $\boldsymbol{r}$ 随时间 t 的变化关系式 $\boldsymbol{r}(t)$ 称为运动方程.

在直角坐标系中表示为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},$$

或表示为参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

(6) 轨迹方程. 质点运动时,将其在空间所经历的各点所连成的曲线称为轨迹,描述该曲线的方程就是轨迹方程. 从运动方程中消去时间 t,即可求得轨迹方程.

(7) 位移. 表示某段时间内质点位置矢量改变的物理量. 即

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1.$$

位移是矢量,具有大小和方向,在直角坐标系中(图 1-2),

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \\ &= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

(8) 路程. 质点运动时其轨迹的长度. 路程是标量,只有大小,没有方向.

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

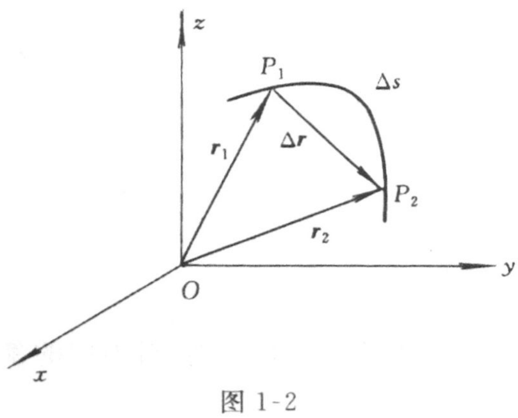

图 1-2

(9) 速度和速率. 描述质点位置改变快慢的物理量.

平均速度. 质点位置变化快慢的粗略描述:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k} = \bar{v}_x\boldsymbol{i} + \bar{v}_y\boldsymbol{j} + \bar{v}_z\boldsymbol{k}.$$

注 平均速度一定要指明是在哪一段时间内的平均速度.

瞬时速度.质点位置变化快慢的精确描述：

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}.$$

平均速率.质点路程变化快慢的粗略描述：$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

瞬时速率.质点路程变化快慢的精确描述：$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

速度描述的是质点位移对时间的变化率，是矢量，有大小和方向；速率指质点所经历的路程对时间的变化率，是标量，只有大小，没有方向.二者意义不同，但它们的瞬时值相同.某时刻瞬时速率与该时刻瞬时速度的大小相等，即 $v=|\boldsymbol{v}|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$.以上有关速度和速率的公式可参见图 1-2.

速度和速率的单位为米·秒$^{-1}$（$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$）.

（10）加速度.描述质点速度改变快慢的物理量.

平均加速度.质点速度改变的粗略描述：

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\boldsymbol{k}=\bar{a}_x\boldsymbol{i}+\bar{a}_y\boldsymbol{j}+\bar{a}_z\boldsymbol{k}.$$

瞬时加速度.质点速度改变的精确描述：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

加速度在自然坐标系中可分解为切向加速度和法向加速度.

切向加速度.加速度沿轨迹切向方向的分量，反映速度大小的变化，其大小为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

法向加速度.加速度沿轨迹法向方向的分量，反映速度方向的变化，其大小为

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho},$$

其中，ρ 为质点运动轨迹的曲率半径；在圆周运动中，ρ 为圆的半径.

2. 圆周运动

（1）角位置.质点的位置矢量和参考方向之间的夹角.

（2）角位移 $\Delta\theta$.表示某段时间内角位置的改变，并设逆时针方向为正，顺时针方向为负；单位为弧度(rad).

（3）角速度.描述质点的角位移随时间变化的物理量.$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

（4）角加速度.描述质点的角速度随时间变化的物理量.$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

（5）角量与线量的关系.$v=\omega R$，$a_\tau=R\beta$，$a_{\mathrm{n}}=R\omega^2$.

3. 相对运动

设有两个参考系K和K′,K′系相对于K系的速度为$\boldsymbol{v}_{K'K}$,质点A相对于参考系K的速度为$\boldsymbol{v}_{AK}$,相对于K′系的速度为$\boldsymbol{v}_{AK'}$,则有

$$\boldsymbol{v}_{AK} = \boldsymbol{v}_{AK'} + \boldsymbol{v}_{K'K}.$$

$\boldsymbol{v}_{AK}$,$\boldsymbol{v}_{AK'}$,$\boldsymbol{v}_{K'K}$分别称为绝对速度、相对速度、牵连速度.

质点A相对于K系的加速度为$\boldsymbol{a}_{AK}$,相对于K′系的加速度为$\boldsymbol{a}_{AK'}$,K′系相对于K系的加速度为$\boldsymbol{a}_{K'K}$,则有

$$\boldsymbol{a}_{AK} = \boldsymbol{a}_{AK'} + \boldsymbol{a}_{K'K}.$$

$\boldsymbol{a}_{AK}$,$\boldsymbol{a}_{AK'}$,$\boldsymbol{a}_{K'K}$分别称为绝对加速度、相对加速度、牵连加速度.

1.3 常见及疑难问题答疑

问题1 位移、路程有什么异同,在什么情况下它们的大小相等?竖直上抛公式$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$中$s$是路程还是位移?

答 这两个量都是描述质点位置变动情况的物理量.

位移描述的是质点在空间位置的变化,指明其位置改变的大小和方向.位移是矢量,大小为初位置到末位置的直线距离,方向从初位置指向末位置.

路程是质点运动路径的长度,是标量,只有大小,没有方向.

当质点作同方向直线运动时,在同一段时间内,二者的量值相等.

竖直上抛公式中的s表示位移的大小.若同时考虑上抛和下抛,则位移和路程两者大小不等.

问题2 位置矢量$\boldsymbol{r}$和位移$\Delta\boldsymbol{r}$有何区别?$|\Delta\boldsymbol{r}|$和$\Delta|\boldsymbol{r}|$意义相同吗?

答 位置矢量$\boldsymbol{r}$是从坐标原点指向质点所在位置的一个有向线段,描述了某时刻质点的位置,而位移$\Delta\boldsymbol{r}$是初位置引向末位置的有向线段,反映了质点位置的变化,二者意义不同.

末位置的位置矢量和初位置的位置矢量之差即为该段时间内的质点的位移,若取初位置为坐标原点,则末位置的位置矢量和位移一致.质点的瞬时速度为该时刻位置矢量对时间的一阶导数,而不是位移对时间的导数.

$|\Delta\boldsymbol{r}|$是矢量增量的模,$\Delta|\boldsymbol{r}|$为矢量模的增量,二者意义不同.$|\Delta\boldsymbol{r}|$表示位移的大小,$\Delta|\boldsymbol{r}|$等于位置矢量大小的改变量.

问题3 质点的运动方程为$x = x(t)$,$y = y(t)$.在计算质点的速度和加速度时,有人先求出$r = \sqrt{x^2 + y^2}$,然后根据$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$和$a = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$而求得结果;又有人先求出速度和加速度的分量,再合成求得结果,即$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$及$a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$.哪一种方法正确,为什么?

答 后一种方法正确.因为速度$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,前一种方法只考虑了位置矢量$\boldsymbol{r}$的量值$r$随时间

t 的变化，没有反映出 $\boldsymbol{r}$ 的方向随时间 t 的变化. 同样可知，对加速度的求法也是后一种方法正确.

问题 4 河中有一条船，岸上有人用绳通过定滑轮拖船，如果拉绳的速率 v 是均匀的，问船运动的速率 u 是否也是均匀的，谁的速率大，为什么？

答 尽管拉绳速率是均匀的，但由于定滑轮后绳上各点同时参与沿 AB 方向的运动和沿 BO 方向的运动，因此，船运动的速率 u 不等于拉绳的速率 v. 船运动过程中，β 随时间是变化的，故不能简单地用 $u = v\cos\beta$ 求船速.

设某时刻 t，船在位置 B 处. 建立坐标系如图 1-3 所示，设船到定滑轮的距离用 l 表示，AO 为 h，BO 为 x，在直角三角形 ABO 中，

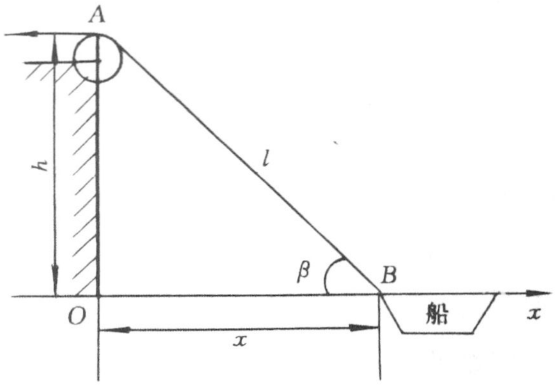

图 1-3

$$l^2 = x^2 + h^2,$$

两边同时对时间 t 求导，考虑到 h 是常量，

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

拉绳的速率 $\quad v = \dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}.$

船的速率

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}v = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v = v\sqrt{1+\left(\frac{h}{x}\right)^2}.$$

在拉绳过程中，v 不变，距离 x 变小，船速越来越快.

船的加速度 $\quad a = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v\dfrac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right] = -\dfrac{h^2}{x^3}v^2.$

其中，负号表示加速度的方向与坐标轴的方向相反，船作变加速直线运动.

问题 5 有人用步枪瞄准远处树上的梨，扣动扳机，在子弹出膛时梨恰好脱离树枝而自由下落，问子弹能击中梨吗？为什么？(不计空气阻力.)

答 能击中. 子弹和梨都具有相对地面的重力加速度 g. 但如果以梨为参考系来观察子弹，子弹却是作匀速直线运动，由于梨是在子弹的匀速直线运动的直线上，所以，子弹必能击中梨.

问题 6 物体在某一时刻开始运动，在 Δt 时间后，经任一路径回到出发点，此时速度的大小和开始时相同，但方向一般不同，试问在 Δt 时间内平均速度是否为零？平均加速度是否为零？

答 平均速度是 Δt 时间内物体的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与时间 Δt 的比值. 而在这段时间内位移为零，所以平均速度为零.

平均加速度是 Δt 时间内物体速度的增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与 Δt 的比值，由于初、末速度的方向不同，所以 $\Delta\boldsymbol{v}$ 不为零，平均加速度也不为零.

问题 7 一只兔子向着一棵大白菜跑去，它每秒钟所跑的距离是从它的鼻尖到大白菜的剩余距离之半，问兔子可否到达大白菜？它的平均速度的极限值为多少？

答 设 l 为兔子开始距大白菜的距离，兔子每秒钟跑的距离显然是 $\dfrac{l}{2}, \dfrac{l}{4}, \dfrac{l}{8}, \cdots$，为等比级数衰减，只有 t 趋于无限大时其总和才等于 l，也就是说只有时间为无限大才能跑到大白菜

处，所以兔子是不能跑到大白菜处的.

因为 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限值为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l}{2^n}=0$，故兔子的平均速度的极限值为零.

问题 8 圆周运动中质点的加速度是否一定和速度方向垂直?任意曲线运动的加速度是否一定不与速度方向垂直?

答 不管是圆周运动还是任意曲线运动，质点的加速度均为切向加速度和法向加速度的矢量和.

在匀速圆周运动中，速度的大小不变，质点的加速度为法向加速度，其方向与速度方向垂直，指向圆心.在变速圆周运动中，速度的大小也随时间的变化而变化，质点的加速度不但有法向分量还有切向分量，因此，加速度的方向一般不垂直于速度方向(切向)，也不一定指向圆心(法向).

在匀速率曲线运动中，只要速度方向有变化，加速度必然有法向分量，而且一定与沿曲线切向的速度方向垂直，并指向质点所在处曲线的曲率中心；在变速曲线运动中，切向加速度不为零，故加速度一定不与速度方向垂直，但一定指向轨迹的凹侧.

问题 9 有人说，考虑到地球的运动，一栋楼房的运动速率在夜里比白天大.这是相对什么参考系说的?

答 在太阳参考系中，地球上的一栋楼房的运动速度是地球绕太阳的公转速度与地球的自转速度之和，即 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{公}+\boldsymbol{v}_{自}$.

所谓白天就是所研究的物体面向太阳，黑夜就是物体背向太阳.无论白天还是黑夜，地球的自转速度都是相同的.由于白天时自转速度与公转速度的方向相反，故楼房的速率低些；黑夜时自转速度与公转速度的方向一致，故楼房的速率高些.

1.4 解题要点及例题详解

1. 已知运动方程，求位置矢量、位移、速度、加速度及轨迹方程等

解题要点 根据运动学中物理量的定义，使用数学知识解题.

例 1-1 一质点做平面曲线运动，已知其运动方程为 $x=3t(\mathrm{m})$，$y=1-t^2(\mathrm{m})$.求

(1) 质点运动的轨迹方程；

(2) $t=3\mathrm{s}$ 时的位置矢量；

(3) 第 2s 内的位移和平均速度；

(4) 第 2s 内的平均速率；

(5) $t=2\mathrm{s}$ 时的速度和加速度；

(6) t 时刻的切向加速度和法向加速度；

(7) $t=2\mathrm{s}$ 时质点所在处轨迹的曲率半径.

解 (1) 从运动方程中消去时间 t，得轨迹方程

$$y=1-\frac{x^2}{9}.$$

(2)
$$\boldsymbol{r}_3=x(3)\boldsymbol{i}+y(3)\boldsymbol{j}=9\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}(\mathrm{m}).$$

大小为
$$|\boldsymbol{r}_3|=\sqrt{81+64}\approx 12(\mathrm{m}),$$

方向由 $\boldsymbol{r}_3$ 与 x 轴正向夹角 $\alpha = \arctan\left[\frac{y(3)}{x(3)}\right] = -41°38'$ 表示.

(3) 第 2s 内的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = [x(2) - x(1)]\boldsymbol{i} + [y(2) - y(1)]\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}(\mathrm{m}).$$

大小
$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}(\mathrm{m}),$$

方向与 x 轴正向夹角 $\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{3}\right) = -45°$.

平均速度
$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}}{2-1} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}(\mathrm{m \cdot s^{-1}}).$$

大小
$$|\bar{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}(\mathrm{m \cdot s^{-1}}),$$

方向为
$$\alpha = \arctan\left(\frac{\bar{v}_y}{\bar{v}_x}\right) = \arctan\left(\frac{-3}{3}\right) = -45°.$$

(4) 在第 2s 内质点经历的路程为

$$\Delta s = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \sqrt{3^2 + 4t^2}\mathrm{d}t \approx 4.26(\mathrm{m}).$$

所以在第 2s 内的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{4.26}{1} = 4.26(\mathrm{m \cdot s^{-1}}).$$

(5) 由 $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j}$，当 $t = 2\mathrm{s}$ 时，

$$\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}.$$

$$|\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{9+16} = 5(\mathrm{m \cdot s^{-1}}),$$

方向为
$$\alpha = \arctan\left(\frac{-4}{3}\right) \approx -53°08'.$$

加速度
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -2\boldsymbol{j}(\mathrm{m \cdot s^{-2}}),$$

即 $\boldsymbol{a}$ 为恒矢量，其大小为 $2\mathrm{m \cdot s^{-2}}$，方向沿 y 轴负向.

(6) 由质点在 t 时刻的速率 $v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{9+4t^2}$ 得

切向加速度
$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4t}{\sqrt{9+4t^2}},$$

法向加速度
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{6}{\sqrt{9+4t^2}}.$$

(7) $t = 2\mathrm{s}$ 时刻的 $v_2 = 5\mathrm{m \cdot s^{-1}}$，$a_n = \frac{6}{\sqrt{9+16}} = 1.2\mathrm{m \cdot s^{-2}}$，由 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ 得 $t = 2\mathrm{s}$ 时的

ρ 为

$$\rho = \frac{v_2^2}{a_n} = \frac{25}{1.2} \approx 20.8(\mathrm{m}).$$

例 1-2 一直尺 AB，其端点 A 与 B 沿直线导槽 Ox 和 Oy 滑动，B 端以匀速 c 向下运动，求直尺上 M 点的速度和加速度(图 1-4). 设 $\overline{MA} = a, \overline{MB} = b, \angle OBA = \theta$.

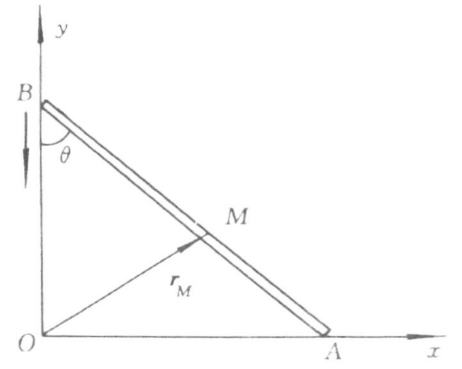

图 1-4

解 由图分析，得 B 和 M 的位置矢量

$$\boldsymbol{r}_B = y_B \boldsymbol{j} = (a+b)\cos\theta \boldsymbol{j}, \qquad ①$$

$$\boldsymbol{r}_M = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = b\sin\theta \boldsymbol{i} + a\cos\theta \boldsymbol{j}. \qquad ②$$

由式 ① 得

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y_B}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -(a+b)\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = -c\boldsymbol{j},$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{(a+b)\sin\theta}. \qquad ③$$

由式 ② 得

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_M}{\mathrm{d}t} = b\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} - a\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}.$$

代入式 ③ 可得

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{bc\cot\theta}{a+b}\boldsymbol{i} - \frac{ac}{a+b}\boldsymbol{j}.$$

$$\boldsymbol{a}_M = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_M}{\mathrm{d}t} = \frac{bc}{a+b}\left(-\csc^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{i} = \frac{-bc^2}{(a+b)^2\sin^3\theta}\boldsymbol{i}.$$

* **例 1-3** 细杆绕端点 O 在水平面内作匀角速旋转，角速度为 ω. 杆上一小环(可视为质点)相对杆作匀速运动，相对速度为 v. 设 $t=0$ 时刻小环位于杆的端点 O. (1) 证明小环的运动轨迹为阿基米德螺线；(2) 试求小环在任意时刻的速度和加速度.

解 (1) 本题采用平面极坐标较为方便.

因 v 和 ω 为常量，故小环的运动方程为

$$\begin{cases} r = vt, \\ \theta = \omega t. \end{cases}$$

消去 t，得小环运动的轨迹方程为

$$r = \frac{v}{\omega}\theta,$$

式中，$\dfrac{v}{\omega}$ 为常量，r 与 θ 成正比，此即阿基米德螺线的极坐标方程.

(2) 在平面极坐标中，小环速度的两分量为

径向速度
$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v,$$

横向速度 $$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\omega}\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\omega}\theta\omega = v\theta = v\omega t,$$

所以 t 时刻的速度 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_r + v\omega t\boldsymbol{e}_\theta,$$

其大小为 $$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = v\sqrt{1+\omega^2 t^2}.$$

速度方向指向轨迹(阿基米德螺线)的切线方向.

在平面极坐标系中,小环加速度的两个分量为

径向加速度 $$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0 - \frac{v}{\omega}\theta\omega^2 = -v\omega^2 t,$$

横向加速度 $$a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 2v\omega,$$

所以 t 时刻的加速度为

$$\boldsymbol{a} = -v\omega^2 t\boldsymbol{e}_r + 2v\omega\boldsymbol{e}_\theta,$$

其大小为 $$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = v\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}.$$

2. 已知加速度和初始条件,求运动方程和速度

解题要点 根据加速度和速度的定义,利用积分学知识解题.

例 1-4 一质点沿 x 轴方向运动,其加速度和时间的关系为 $a=-6t$,设 $t=0$ 时刻,质点在坐标原点以初速度为 $12\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 向 x 轴正方向运动(图 1-5),求

(1) 任意时刻质点的位置和速度;

(2) 沿 x 轴正方向质点最多走多远?何时又回到出发点?

(3) 在 $1\sim 3\text{s}$ 内质点的位移和路程.

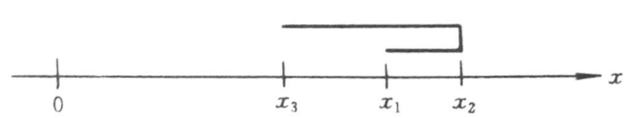

图 1-5

解 (1) 质点的加速度 $$a=-6t,$$

上式可变为 $$\frac{dv}{dt} = -6t,$$

左右两边同时积分,利用初始条件 $t=0$ 时,$v=12$,得 $\int_{12}^{v} dv = -\int_0^t 6t\,dt$,

解出 $$v = 12 - 3t^2,$$

由上式得 $$\frac{dx}{dt} = 12 - 3t^2,$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t (12-3t^2)dt,$$

$$x = 12t - t^3.$$

(2) 当质点的速度为零时，质点开始返回，即 $v = 12 - 3t^2 = 0$，

解得
$$t = 2(\text{负根舍去}).$$

当 $t = 2$ 时，$x_2 = 16$，即质点运动到 x 轴正方向的最远处时，$x = 16(\text{m})$.

再次回到出发点时，有 $x = 12t - t^3 = 0$，

解得
$$t = 3.46(\text{s}).$$

(3) 1 ~ 3s 内质点的位移　$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = 9\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{i} = -2\boldsymbol{i}(\text{m})$，考虑到 $t = 2\text{s}$ 时质点返回，则 1 ~ 3s 内质点的路程为

$$\Delta s = |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| = 12(\text{m}).$$

例 1-5　一质点沿 x 轴作加速运动，在 $t = 0$ 时刻，其位置和初速度分别为 x_0 和 v_0，求

(1) 当 $a = kt + c$，t 时刻的速度及运动方程；

(2) 当 $a = kv$，t 时刻的速度及运动方程；

(3) 当 $a = kx$，t 时刻的速度及运动方程.

解　(1) 由 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 得 $\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$，

积分
$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t = \int_0^t (kt + c)\mathrm{d}t,$$

$$v - v_0 = \frac{1}{2}kt^2 + ct,$$

$$v = v_0 + ct + \frac{1}{2}kt^2.$$

而
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t,$$

积分
$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(v_0 + ct + \frac{1}{2}kt^2\right)\mathrm{d}t,$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}ct^2 + \frac{1}{6}kt^3,$$

运动方程
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}ct^2 + \frac{1}{6}kt^3.$$

(2) 由 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kv$ 得　$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = k\mathrm{d}t$，

积分
$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int_0^t k\mathrm{d}t,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = kt,$$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{kt}.$$