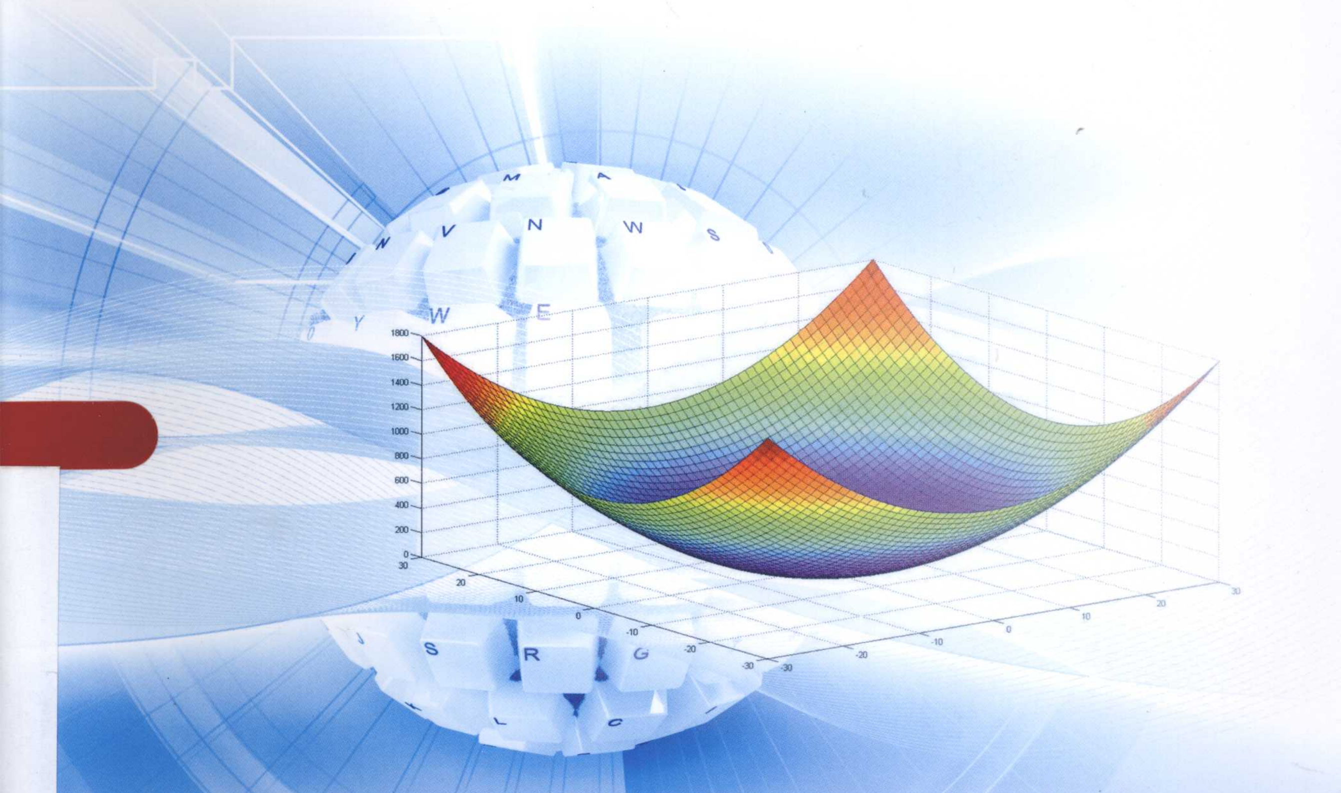
“十二五”高等院校研究生规划教材

最优化方法及应用案例

刘志斌　陈军斌　刘建军 ◎ 主编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等院校研究生规划教材

最优化方法及应用案例

刘志斌　陈军斌　刘建军　主编

石油工业出版社

内容提要

本书较全面地介绍了各类最优化问题的理论和方法，包括：最优化问题概述、线性规划、非线性规划、动态规划、多目标优化及应用、现代优化算法和综合应用案例。全书以方法为重点，编入了大量的最优化模型应用案例，在考虑到系统性的基础上，尽可能回避有关理论证明，做到实用性强。

本书以石油高校相关专业硕士研究生为教学对象，也可供相关专业教师和高年级本科学生作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法及应用案例/刘志斌，陈军斌，刘建军主编.
北京：石油工业出版社，2013.11
（高等院校研究生规划教材）
ISBN 978－7－5021－9829－9

Ⅰ.最…
Ⅱ.①刘…②陈…③刘…
Ⅲ.最优化算法－研究生－教材
Ⅳ.O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 250192 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011）
网　址：http://pip.cnpc.com.cn
编辑部：(010)64523579　发行部：(010)64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013 年 11 月第 1 版　2013 年 11 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：17.25
字数：440 千字

定价：35.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　　言

人类日常生活、社会活动及科学研究中无不涉及最优的问题。例如，怎样利用最少的时间获得更多的知识，怎样最好地利用人类的知识改造自然，如何利用最少的投资获得最大的经济效益；选择最优的方案，选择最佳的旅游路线，设计最优的火箭运行轨迹，设计最佳的钻井井身轨迹，实现最优的油田区块配产等等。从宏观上看，最优化可分为定性和定量两类。定性优化是指不用数量关系表达的最优的“决策”或“策略”，如：怎样最好地利用人类的知识改造自然，一个国家采用什么样的社会制度、体制或政策以获得最快的发展速度等。定量优化是指用数量关系描述的最优化问题，随着数学的深入发展，随着定量化思想的越来越重要，定量最优化理论及应用得到了飞速发展。随着计算机的快速发展，定量最优化理论与方法在应用实践中有了越来越宽阔的舞台。

最优化理论与方法作为应用数学最活跃的分支之一，在社会经济、工程技术领域有着非常广泛的应用。石油行业中的大量技术、工程问题都与“优化”密切相关。目前国内主要石油高校硕士研究生都开设了“最优化方法”课程。

2010 年 5 月 22 日在中国石油大学（北京）召开了本课程的教学和教材研讨会。参加会议的有西南石油大学、西安石油大学、东北石油大学、中国石油大学（华东）、中国石油大学（北京）五校的任课教师。与会人员就目前各版本的教材和讲义中存在的问题进行了深入的讨论，针对石油高校研究生教学的特点，对五校联合编写《最优化方法及应用案例》作为石油高校研究生“最优化方法”课程规划教材达成了共识。会议确定了教材大纲、目录结构及编写分工。初稿出来后，在西南石油大学试用了两届。

本书的最大特点是强调了实际应用案例分析，特别是在“综合应用案例”一章中对有关石油优化问题进行了深入讨论，融入了笔者的一些最新研究成果。本书还在理论方法应用方面做了一些探索，如 Matlab 优化工具箱求解优化模型。本书建议参考学时为 60 学时。但不同专业研究生可对相关内容作适当取舍。

本书由西南石油大学刘志斌、西安石油大学陈军斌、中国石油大学（北京）刘建军担任主编。具体编写分工如下：第一章由刘志斌编写；第二章由刘志斌、西南石油大学钟仪华编写；第三章由陈军斌编写；第四章由中国石油大学（华东）王艳编写；第五章由东北石油大学宋国亮编写；第六章由刘建军编写；第七章由刘志斌、陈军斌、刘建军编写；全书由刘志斌、陈军斌、钟仪华统稿。

本书在编写过程中，得到了各参编院校教务处、研究生院、理学院的大力支持，在此表示感谢！由于编者水平有限，教材中难免还有许多不当甚至错误之处，敬请广大读者提出宝贵意见。

编者

2013 年 6 月

目　　录

第 1 章　绪　论

1.1 最优化问题概述

最优化是一个既古老又现代的问题。人类在认识自然和战胜自然的过程中早就涉及各类最优问题。随着数学的深入发展，随着定量化思想越来越重要，慢慢地形成了有关最优化的理论；而最优化的理论反过来对实践的巨大推动是随着计算机的大力发展才表现出来的。

人们在日常生活、社会活动及科学研究中无不涉及最优的问题。例如，怎样利用最少的时间获得更多的知识，怎样最好地利用人类的知识改造自然，如何利用最少的投资获得最大的经济效益，选择最优的方案，选择最佳的旅游路线，设计最优的火箭运行轨迹，设计最佳的钻井井身轨迹，等等。

从宏观上看，最优化可分为定性和定量两类。定性优化是指不用数量关系表达的最优的“决策”或“策略”，如怎样最好地利用人类的知识改造自然，一个国家采用什么样的社会制度或方针、政策以获得最快的发展等。定量优化是指用数量关系描述的最优化问题。

本书主要讨论定量优化问题。从数学上看，定量的最优化问题就是寻找 n 元函数 $f(X)$ 的极值点。当 f 是普通函数，$X \in \mathbf{R}^n$，这类优化问题称为数学规划（Mathematical Programming，简称 MP），变量 X 可能没有限制也可能受有限个等式或不等式约束。其一般模型可表示成：

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{MP}) \quad && \min f(X) \quad (\max f(X)) \\
& && g_i(X) \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\
& && h_j(X) = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,p)
\end{aligned}
$$

其中 $f(X)$ 称为目标函数，$\min f(X)$（$\max f(X)$）表示目标函数 $f(x)$ 的最小值（最大值），$g_i(X) \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m)$，$h_j(x)=0 (j=1,2,\cdots,p)$ 称为约束条件，$g_i(X)$，$h_j(X)$ 称为约束函数。

因为 $\min f(X) = -\max(-f(X))$，所以极大和极小本质上是相同的，以后仅讨论极小化的问题。而一个等式约束 $h_j(X)=0$ 等价于两个不等式约束 $h_j(X) \geqslant 0$ 与 $-h_j(X) \geqslant 0$，因此上述数学规划问题可以写成统一的形式：

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{MP}) \quad && \min f(X) \\
&\text{s. t.} && g_i(X) \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{MP}) \quad && \min f(X) \\
&\text{s. t.} && X \in D \\
& && D = \{X \mid g_i(X) \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)\}
\end{aligned}
$$

其中，s. t. 是 subject to(such that)的缩写，可以翻译成：使得…满足…（约束条件）。

根据变量 X 有无约束条件可分为约束规划问题和无约束规划问题。如果目标函数 $f(X)$ 与约束函数 $g_i(X)$ 都是线性函数，则相应的优化问题称为线性规划，否则称为非线性规划。

1.2 最优化模型的建立

本节首先一般性地介绍最优化技术，然后再通过例子说明怎样从实际问题中形成最优化数学模型。

1.2.1 一般性描述

由于日常生活与科学研究中经常出现最优化问题，为解决这些问题，不仅形成了最优化理论，而且与之配套形成了一个新的科学分支——最优化技术。这一技术的本质就是将实际问题抽象成数学模型，并用最优化的有关理论求解其数学模型。

比如有多种工作要安排，先做哪些工作，后做哪些工作，每种工作人力、物力、技术手段如何使用，每种工作进行的时间如何，要达到什么样的指标，安排在什么位置进行等，都要具体安排。安排得好，效率就高；否则，就要误工。例如，制造一种产品，用什么原料，采用什么规格，什么工艺，什么工序，什么时间生产，生产多少，等等，采用不同方式对产品质量、产值都有影响。一座建筑或一个结构，当主要的要求确定之后，用什么结构形式，什么材料、什么规格，在保证满足相同技术要求情况下，方案不同，投资则会有很大区别。某一物资，产地和销地都很多，可以安排不同运输方案，运费也将有很大变化。城市、工厂、农村总的平面布局，及各个小的单位的平面布局等都有很多不同方案，用不同方案就会有不同效果。又如在企业的管理、经济发展的规划、军事行动的指挥等方面也都有最优化工作者的用武之地。

许多问题一般都有很多种可供选用的方案。要对这些方案作出选择，首先要确定一个鉴别好坏的标准。有了一个标准，就要求在这个标准衡量下，在技术条件允许的范围内找出一个或几个最好的方案，这就是最优化技术所研究的内容。

不过，在多数情况下，人们凭借经验已经有了一个较好的方案，这个方案已为长期实践所确认，它虽然不一定是最优的，但采用它所取得的效果还是较令人满意的，所以很长时期以来，很多部门还都认为最优化技术并不是非搞不可的。但随着生产的发展、科学的进步，一方面经验不够用了，另一方面方案的好坏所产生的不同后果也显著地被人们认识了。这时，用科学的方法来讨论最优化问题引起了人们广泛的注意。逐渐地，最优化这一课题不但吸引了一批数学工作者，更吸引了其他各领域各部门工作者的注意和研究。于是最优化技术有了专门术语，出现了专门杂志，编写了专门书籍，成立了专门组织。就这样，最优化技术从实践中产生，又在实践中得到不断发展。

特别是近几十年来，由于科学技术发展的需要，电子计算机这一有力计算工具的出现和更新升级为最优化技术的发展提供了有效的手段，使最优化技术获得了十分迅速的发展。就其应用来说，它几乎已深入到各个生产科研领域。

最优化理论的发展也很快。凸规划及有关理论、对偶理论、有关解的特性的理论、与计算方法直接有关的诸如收敛性、收敛速度等方面的研究，都有一些颇为出色的工作。最优化计算方法的进展更是惹人注目。最优化计算方法之所以能发展得这样快，这是与最优化技术的特点分不开的。因为最优化问题一旦被描述为数学问题之后，最需要迫切解决的问题就是求出解，如果不能求出解，则前功尽弃。因此，如果计算方法方面的工作多，那成果也就多。现在最优化计算方法方面的论文不仅出现在与最优化技术密切相关的杂志中，还出现在其他科技方面的专门杂志中。

广大科技工作者除从事最优化技术的理论、算法、应用等方面的专门研究外，还大力地进行推广应用工作。这推动了理论研究工作的发展，使理论研究工作有了方向。相信在未来的科技和生产中，最优化技术一定会得到更大的发展。

1.2.2 最优化建模

最优化技术工作一般被分为两个方面：一是由实际的生产或科技问题建立最优化数学模型；二是对所形成的数学问题做数学加工及求解。有关最优化的数学理论及计算方法，目前有许多参考文献，但怎样从实际问题抽象出数学模型却是一件十分重要而又困难的工作。

所谓建立数学模型是指在对实际问题深入研究的基础上，利用有关数学的知识和概念，对自然规律的真实描述(数学描述)或模拟。当然这种描述或模拟是为解决问题而进行的。每一问题并非只有唯一的数学描述，一种抽象的数学模型也可用于解决不同的实际问题。没有这部分工作，最优化技术将成为无源之水、无本之木。下面介绍两个简单例子，希望能使大家了解最优化技术与实际问题的密切联系，同时还试图给从实际问题建立数学模型一点启示。

1. 线性规划模型

某工厂生产 A、B、C 三种产品，每件产品所消耗的材料、工时以及能够获取的利润如表 1.1 所示。

表 1.1　某工厂产品信息表

产品	利润(元/件)	材料(千克/件)	工时(小时/件)
A	7	4	4
B	3	4	2
C	6	5	3

已知该厂每天的材料消耗不得超过 600 千克，工时不得超过 1400 小时。问每天生产 A、B、C 三种产品各多少件可使利润更大？

设 X_1 为生产 A 产品的件数，X_2 为生产 B 产品的件数，X_3 为生产 C 产品的件数，则有如下模型：

$$\max \quad 7X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 4X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leqslant 600 \\ 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leqslant 1400 \\ X_1, X_2, X_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

将这一模型进一步推广到更一般的情形，则得到著名的资源分配问题，这是线性规划模型最早的成功应用实例。

2. 非线性规划模型

传送能量的最优化问题。在能量传输系统中，传输网上有 n 个电站向 m 个负载输送电能。要求确定一个最经济的传送方案，即既能满足用户所需的能量，又能使各电站产生能量所需成本的总和为最低。

令：P_i 为第 i 个电站产生的能量，千瓦；$F_i(P_i)$ 为第 i 个电站产生能量 P_i 所需的成本，万元；

$L(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为传输过程中所造成的能量损耗，千瓦；D 为用户对能量的总需求量，千瓦。

则要求各电站产生能量所需成本的总和为最低就是目标函数，用户对能量的总需求量被满足就是其约束条件，即：

$$\min S = \sum_{i=1}^{n} F_i(P_i)$$

$$\text{s. t.} \sum_{i=1}^{n} P_i - L(P_1,P_2,\cdots,P_n) \geqslant D$$

1.3 最优解及算法概述

1.3.1 最优解的基本概念

为不失普遍性，现讨论：

$$\text{(MP)} \quad \min_{x\in D} f(X)$$

其中，$D=\{X|g_i(x)\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m)\}$。

定义 1.1 称 $D\subset \mathbf{R}^n$ 为(MP)的可行域(容许域)，并称 $X\in D$ 为(MP)的可行解(容许解)。

定义 1.2 若存在 $X^*\in D$，并对 $\forall X\in D$ 有 $f(X^*)\leqslant f(X)$，则称为 X^* 为(MP)的全局最优解(全局极小点)。X^* 组成的集合称为(MP)的最优解集。

定义 1.3 若存在 $X^*\in D$ 与 X^* 的 ε 邻域，有：

$$N_\varepsilon(X^*) = \{X \mid \| X - X^* \| \leqslant \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

并对 $\forall X\in D\cap N_\varepsilon(X^*)$有 $f(X^*)\leqslant f(X)$，则称 X^* 为(MP)的局部最优解(局部极小值点)。

显然，(MP)的任意全局最优解必为其局部最优解。

定义 1.4 设 $X\in D, h\in \mathbf{R}^n$，若 $\exists \delta>0$，对 $\forall \alpha\in(0,\delta)$，都有向量 $X+\alpha h$ 均在 D 内部，则称 h 为点 X 处的一个可行方向(容许方向)。

1.3.2 最优解算法概述

前述数学规划问题，不仅包含许多重要的理论分析，而且包括许多在实际应用中有着十分重要意义的数值求解方法。虽然从不同的问题和不同的角度出发，人们提出了许多各具特色的数值方法，但作为算法，它们却有着一些重要的共同点。在此将简单介绍一些(MP)问题最优解算法的基本概念。

求解$\min\limits_{X\in D} f(X)$的一种算法，通常是指一种产生点列$\{X^{(1)},X^{(2)},\cdots,X^{(n)},\cdots\}$的程序。该程序能从某个初始点 $X^{(1)}\in D$ 出发，依次产生 $X^{(2)},X^{(3)},\cdots$，并使该点列或该点列的子列收敛于式$\min\limits_{X\in D} f(X)$的最优解 X^*。在实际使用时，一种算法常表现为 $D\rightarrow D$ 的一种映射 F，F 常常满足以下两点要求：

$$X^{(k+1)} = F(X^{(k)}) \tag{1.1}$$

$$f(X^{(k+1)}) < f(X^{(k)}) \tag{1.2}$$

式(1.1)实际上常表现为 $X^{(k+1)}=X^{(k)}+\lambda_k P_k$。因此通常构造映射 F 的关键就在于设计一种能从 $X^{(k)}$ 出发、确定方向 P_k 与步长 λ_k 的方法，要求 $X^{(k+1)}$ 满足式(1.2)并使整个序列(或子列)具有收敛性。

不难看出，这里所说的算法实际上是一种迭代过程。因此，一种用于数学规划的算法还必须包括这种迭代过程的终止准则，即在一定的精度要求下以某一近似值代替最优解 X^* 的原则。常见的终止准则为如下 4 个不等式之一，即对事先给定 $\varepsilon>0$ 与正整数 k，若 4 个不等式：

$$\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \| < \varepsilon \tag{1.3}$$

$$\frac{\| X^{(k+1)} - X^{(k)} \|}{\| X^{(k)} \|} < \varepsilon \tag{1.4}$$

$$| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) | < \varepsilon \tag{1.5}$$

$$\frac{| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) |}{| f(X^{(k)}) |} < \varepsilon \tag{1.6}$$

之一成立，则可迭代终止，并认为 $X^* \approx X^{(k+1)}$。

以上仅仅是一种算法所包含的最基本的内容，作为一种较为理想的数学规划算法还应具备：

(1)通用性，即它能解决一类符合算法基本要求的问题，而不再对问题有其他苛求。

(2)稳定性，即它不应对问题中参数、迭代初始点位置等表现出较高的灵敏度。否则，算法的迭代效果将随过程出现大的差异。

(3)工作量较小，即算法不能占用过多的计算时间和有过分繁琐的计算准备。

(4)较快的收敛性，即算法产生的序列 $\{f(X^{(k)})\}$ 的下降速度或 $X^{(k)} \to X^*$ 的速度较快。为了度量这种速度，下面给出 $X^{(k)} \to X^*$ 的速度的定义。

定义 1.5 设 $X^{(k)}$ 收敛于 X^*，当 $k\to\infty$ 时如下渐近关系成立：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| X^{(k+1)} - X^* \|}{\| X^{(k)} - X^* \|^p} = \alpha$$

其中常数 $\alpha>0$，则称迭代过程是 p 阶收敛的。特别地，$p=1$ 时称为线性收敛，$p>1$ 时称为超线性收敛，$p=2$ 时称为平方收敛。

练 习 题 1

1. 建立优化模型应考虑哪些要素？

2. 讨论优化模型最优解的存在性、迭代算法的收敛性及停止准则。

第2章 线性规划

线性规划(Linear Programming,简称 LP)是优化问题的特殊情形,其模型中目标函数和约束条件函数均为决策变量的线性函数。由于其线性特性,使得线性规划的求解算法相对于非线性规划更成熟且简单。本章将围绕线性规划模型的建立、线性规划求解算法的原理以及线性规划的应用若干主题展开讨论。在讨论应用线性规划解决实际问题的范例时,本书将推崇以使用数学软件作为求解手段的方式,把问题讨论的重点集中在建立描述问题的线性规划模型上。

2.1 线性规划模型的建立及相关概念

2.1.1 模型的建立

在模型的建立上,线性规划和非线性规划可以遵循相同的方法和步骤,把它们分开讨论的主要原因是它们在求解算法上存在很大的差异。建立一个问题的线性规划模型,在充分理解问题的基础上,一般可遵循以下三个步骤。

(1)确定决策变量。对于一个决策问题,首先要明确待决策的内容或对象,然后设法将其变量化以确定决策变量。小型的线性规划问题可以只有较少的决策变量,大型问题则可能有上百个乃至成千上万个决策变量;有些问题的决策变量显而易见,有些则需要转化才能设出。

(2)确定目标函数。决策人面临着决策问题时,有一个进行方案决择的标准,即目标。在确定决策变量后,将决策目标表示为决策变量的函数并根据实际问题求其最小或最大,即得目标函数。线性规划模型中的目标函数应是决策变量的线性函数。

(3)确定约束条件。决策问题的约束条件,指在决策过程中决策变量受到一定条件的限制,或达到一些平凡意义下最低限度的要求。它们的数学表现形式往往是决策变量的等式或不等式,线性规划中则体现为决策变量的线性等式或线性不等式。例如,在生产经营的管理中,对资源(人力、物力、财力等)的使用常常是受到限制的,其资源使用量一般要受一定总量(上限)的限制或被要求满足最低使用量(下限)的要求。

下面,将运用上述方法和步骤讨论一些优化问题的模型建立。

[例 2.1](生产合理安排问题) 某厂计划在下一个生产周期内生产甲、乙两种产品,需要消耗 R_1,R_2,R_3 三种资源(如钢材、煤炭或设备台时等),已知每件产品对这三种资源的消耗、这三种资源可供使用的资源量及每单位产品可获得的利润如表 2.1 所示。问应如何安排生产计划,使得既能充分利用现有资源,又使总利润最大?试建立问题的数学模型。

表 2.1 产品与各资源关系、利润表

资源	单件消耗		可供使用的资源量
	甲	乙	
R_1	5	2	170
R_2	2	3	100
R_3	1	5	150
单件利润	10	18	—

解:(1)确定决策变量。本问题中,决策内容是“如何安排生产计划”,具体指在下一个生产周期,两种产品各应安排多大的产量。因此,可令下一个生产周期产品甲和乙的产量 x_1,x_2 作为本问题的决策变量。

(2)确定目标函数。问题的目标很清楚,即“使总利润最大”。由题设总利润值 z 可表示为决策变量的线性函数,即 $z=10x_1+18x_2$。

(3)确定约束条件。由于 R_1,R_2,R_3 的资源量都是有限的,故决策变量 x_1,x_2 必须满足下列约束条件:

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 170 & (\text{对资源 } R_1 \text{ 的限制}) \\ 2x_1+3x_2\leqslant 100 & (\text{对资源 } R_2 \text{ 的限制}) \\ x_1+5x_2\leqslant 150 & (\text{对资源 } R_3 \text{ 的限制}) \end{cases}$$

另外,产量不会取负值,所以 $x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$。

因此,本例的数学模型可归纳为如下线性规划问题:

$$\max z=10x_1+18x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 5x_1+2x_2\leqslant 170 \\ 2x_1+3x_2\leqslant 100 \\ x_1+5x_2\leqslant 150 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

其中,s. t. 是 subject to(such that)的缩写,可以翻译成:使得…满足…(约束条件)。

[例 2.2](合理下料问题) 用长度为 500 厘米的条材,截成长度为 98 厘米和 78 厘米两种毛坯,要求共截出长 98 厘米的毛坯 1000 根、78 厘米长的毛坯 2000 根,应怎样截才能使所用的原材料最少?试建立问题的数学模型。

解:设定本问题的决策变量不像例 2.1 中的问题那样直接,需要作一些简单分析。

考虑长度为 500 厘米的条材截成长为 98 厘米和 78 厘米两种毛坯的各种方案状态,如表 2.2 所示。有了这个方案表,描述问题就容易了。

表 2.2 各种截法方案表

方案序号	98 厘米的毛坯数(根)	78 厘米的毛坯数(根)	剩余(厘米)
1	0	6	32
2	1	5	12
3	2	3	70
4	3	2	50
5	4	1	30
6	5	0	10

设决策变量 $x_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 表示第 i 个方案所用的条材数。显然,目标函数可表示为:

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

约束条件就是要保证截出 1000 根 98 厘米和 2000 根 78 厘米的毛坯，即：

$$x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6\geqslant 1000$$

$$6x_1+5x_2+3x_3+2x_4+x_5\geqslant 2000$$

且由实际问题，决策变量应取非负整数值。

因此，问题的数学模型可描述为如下极小化整数线性规划问题：

$$\min z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6\geqslant 1000\\6x_1+5x_2+3x_3+2x_4+x_5\geqslant 2000\\x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0\text{ 且取整数值}\end{cases}$$

[例 2.3](0—1 背包问题)　一个旅行者要在背包里装一些最有用的旅行物品。背包容积为 a，携带物品总质量最多为 b。现有物品 m 件，第 j 件物品体积为 a_j，质量为 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$。为了比较物品的有用程度，假设第 j 件物品的价值为 $c_j(j=1,2,\cdots,m)$。若每件物品只能整件携带，每件物品都能放入背包中，并且不考虑物品放入背包后相互的间隙。问旅行者应当携带哪几件物品才能使携带物品的总价值最大？试建立问题的数学模型。

解：在有决策方案之前，每一件物品都有被选择和不被选择两种可能，为此，设 x_j 为第 j 种物品装入的数量，则对应于 m 件物品引入 m 个 0—1 变量：

$$x_j=\begin{cases}1\quad(\text{携带第 } j \text{ 件物品})\\0\quad(\text{不携带第 } j \text{ 件物品})\end{cases}\qquad(j=1,2,\cdots,m)$$

于是，目标函数即所携带物品的总价值表示为 $z=\sum\limits_{j=1}^{m}c_jx_j$ 。

约束条件方面，所携带物品的总体积不得超过 a，总质量不得超过 b。

因此，问题的数学模型可表述如下：

$$\max z=\sum_{j=1}^{m}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m}a_jx_j\leqslant a\\\sum\limits_{j=1}^{m}b_jx_j\leqslant b\\x_j=0\text{ 或 }1\qquad(j=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

这个模型中的决策变量只取 0、1 两个整数值，称作 0—1 整数规划，简称 0—1 规划。

0—1 变量的引入是本例建模的关键。0—1 变量除了便于表述状态外，在表达互斥的约束条件上也有其独到的作用，感兴趣的读者可参考相关文献。

与 0—1 背包问题相关的另一个问题是背包问题。其问题描述中物品可以部分装入，模型上除变量取值改为[0,1]区间外，其余完全相同，即：

$$\max z = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \leqslant a \\ \sum_{j=1}^{m} b_j x_j \leqslant b \\ x_j \in [0,1] \qquad (j = 1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

这两个看似非常相似的优化模型，在求解算法上却存在很大的差异。后者（背包问题）可以采用效率很高的“贪心算法”求解，而前者（0—1 背包问题）的求解则只能采用效率低得多的“动态规划”算法。

[例 2.4]（运输问题） 某公司有 3 个生产同类产品的工厂（简称产地 A_i，$i=1,2,3$），生产的产品由 4 个销售点（简称销地 B_j，$j=1,2,3,4$）销售，各工厂的生产量（用 a_i 表示）、各销售点的销售量（用 b_j 表示）以及各工厂到各销售点的单位产品运价（用 c_{ij} 表示）如表 2.3 所示。问该公司应如何调运产品，在满足各销售点的需要量的前提下，使总的运费为最小？

表 2.3 产量、销量与单位产品运价关系表

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量 a_i
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量 b_j	3	6	5	6	—

解：(1)确定决策变量。本问题中，决策内容是“如何制订调运方案”，具体指在一个产地和一个销地间各应安排多大的运量。因此，可令从产地 A_i 到销地 B_j 的运量 x_{ij}（$i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$）作为本问题的决策变量。

(2)确定目标函数。问题的目标很清楚，即“使总的运费为最小”。由题设总运费 z 可表为决策变量的线性函数，即 $z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$ 。

(3)确定约束条件。由表 2.3 可知，运输问题的总产量等于其总销量，即 $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$，所以该运输问题为产销平衡运输问题。由平衡运输问题，第一个约束条件是由各产地运往某一销地的物品数量之和等于该销地的销量，即 $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j (j = 1,2,3,4)$；第二个约束条件是由某一产地运往各销地的物品数量之和等于该产地的产量，即 $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i (i = 1,2,3)$；第三个约束条件是决策变量的非负条件，即 $x_{ij} \geqslant 0$（$i=1,2,3$，$j=1,2,3,4$）。

因此，问题的数学模型可表述如下：

$$\min z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,3,4) \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,3) \\ x_{ij} \geqslant 0 & (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

［例 2.5］（分派或指派问题）　有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别计作 E、J、G、R。现有甲、乙、丙、丁四人。他们将中文说明书翻译成不同语种说明书所需时间（单位：小时）如表 2.4 所示。若要求每一项翻译任务只分配给一个人去完成，每个人只接受一项任务。应指派何人去完成何工作所需总时间最少？

表 2.4　四人翻译所需时间表　　小时

人员 \ 任务	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

一般地，称表 2.4 为效率矩阵或者系数矩阵，其元素 $c_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示指派第 i 人去完成第 j 项任务所需的时间，或者称为完成任务的工作效率（或时间、成本等）。

解：(1)确定决策变量。本问题中，决策内容是“指派哪个人去完成哪项翻译任务”，具体指派第 i 人去完成第 j 项翻译任务。因此，引入 16 个 0—1 变量 x_{ij} 作为本问题的决策变量：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项翻译任务}) \\ 0 & (\text{不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项翻译任务}) \end{cases} \quad (i,j = 1,2,3,4)$$

(2)确定目标函数。问题的目标很清楚，即“4 个人完成任务所需的时间最少（或效率最高）”。由题设总时间 z 可表为决策变量的线性函数，即 $z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$ 。

(3)确定约束条件。第一个约束条件是第 j 项任务只能由 1 人去完成，即 $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1(j = 1,2,3,4)$；第二个约束条件是第 i 人只能完成 1 项任务，即 $\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1(i = 1,2,3,4)$。

因此，问题的数学模型可表述如下：

$$\min z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 & (j = 1,2,3,4) \\ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 & (i = 1,2,3,4) \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 & (i,j = 1,2,3,4) \end{cases}$$

2.1.2 模型及其分类

1. 一般形式

由 2.1.1 可知，每一个线性规划问题都可用一组决策变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 表示某一方案。这组决策变量的值就代表一个具体方案，一般这些变量的取值是非负连续的。有各种资源 b_i 和使用有关资源的技术数据 a_{ij}、创造新价值的数据 c_j($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$)，它们的对应关系可用表 2.5 表示。

表 2.5 线性规划问题的对应关系

活动	决策变量				资源
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
价值系数	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	

存在可以量化的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示；要有一个达到目标的要求，它可用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示，按问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

因此线性规划问题建立的一般数学模型形式如下：

目标函数

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{2.1}$$

约束条件

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{m} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{2.3}$$

2. 标准形式

由于目标函数和约束条件形式上的差异,线性规划模型可以有多种表现形式。为了便于讨论和制订统一的算法,规定线性规划模型的标准形式如下:

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.4}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \cdots, m) \quad (2.5) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \quad (2.6) \end{cases}$$

在该标准形式中,目标函数为求极小值(也可以规定为求极大值),除变量取值约束外,约束条件全为等式,且等式约束右端常数项全为非负值,即 $b_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m)$,决策变量也均取非负值。

对非标准形式的线性规划模型,可分别通过下列方法转化为标准形式。

(1)当目标函数为求极大值时,有:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

令 $z' = -z$,即转化为:

$$\min z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

(2)当约束条件的右端常数项 $b_i < 0$ 时,只需将等式或不等式两端同乘以(−1),则右端常数项必大于零。

(3)当约束条件为不等式约束时(变量取值约束除外),若不等式约束取“≤”,如 $6x_1 + 2x_2 \leqslant 24$,可令:

$$x_3 = 24 - (6x_1 + 2x_2)$$

则:

$$6x_1 + 2x_2 + x_3 = 24, x_3 \geqslant 0$$

同理,当约束条件取“≥”时,如 $10x_1 + 12x_2 \geqslant 18$,可令:

$$x_4 = (10x_1 + 12x_2) - 18$$

则:

$$10x_1 + 12x_2 - x_4 = 18, x_4 \geqslant 0$$

x_3 和 x_4 是新加上去的变量,取值均为非负,其中 x_3 称为松弛变量,x_4 称为剩余变量,有时不加区分统称为松弛变量。松弛变量或剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用的资源和超出的资源数,均未转化为价值和利润,所以引进模型后它们在目标函数中的价值分量均为零。

(4)当决策变量的取值约束为 $x \leqslant 0$ 时,令 $x' = -x$,有 $x' \geqslant 0$。

(5)当决策变量 x 的取值无任何约束时,令 $x = x' - x''$,其中 $x' \geqslant 0, x'' \geqslant 0$,则由 x' 和 x'' 表示的 x 不受任何取值约束。