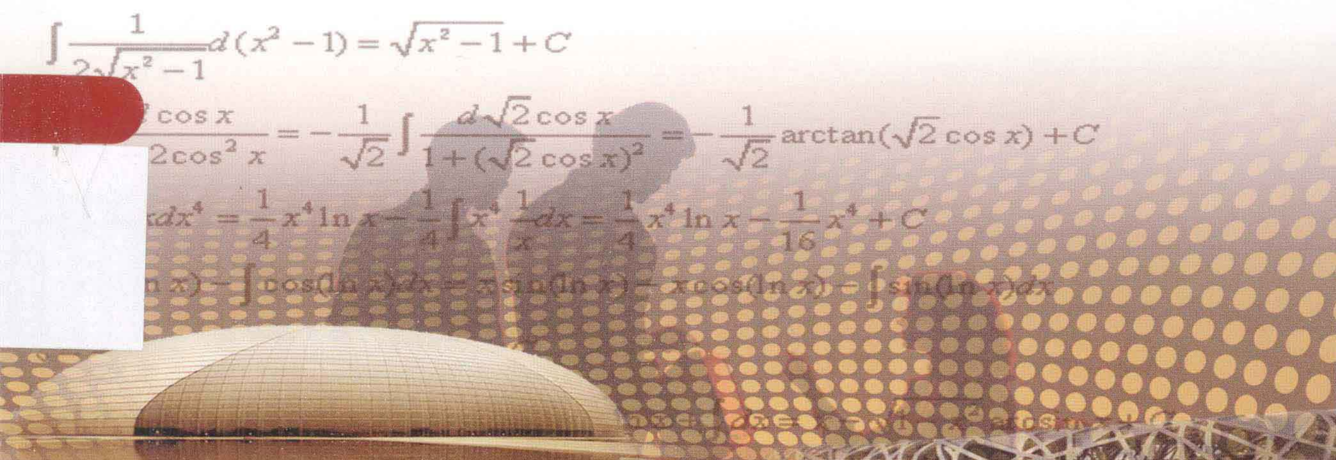
高等学校教材

高等数学习题详解

第二版

宋国华 崔景安 主编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

高等学校教材

高等数学习题详解

第二版

宋国华　崔景安　主编

石油工业出版社

内容提要

本书对北京高等教育精品教材《高等数学(第二版)》所编入的习题及总习题作了详细解答,有助于学生在学习中查阅、巩固所学知识,培养自学能力,开拓解题思路,掌握解题方法。

本书可与北京高等教育精品教材《高等数学(第二版)》配套使用,也可单独作为高等数学课程的辅助教材和考研辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题详解/宋国华,崔景安主编.—2版.
北京:石油工业出版社,2013.9
(高等学校教材)
ISBN 978-7-5021-9721-6

Ⅰ.高…
Ⅱ.①宋…②崔…
Ⅲ.高等数学—高等学校—题解
Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 185379 号

出版发行:石油工业出版社
(北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011)
网　址:http://pip.cnpc.com.cn
编辑部:(010)64523579　发行部:(010)64523620
经　销:全国新华书店
印　刷:北京中石油彩色印刷有限责任公司

2013 年 9 月第 2 版　2013 年 9 月第 2 次印刷
787×1092 毫米　开本:1/16　印张:20.5
字数:508 千字

定价:35.00 元
(如出现印装质量问题,我社发行部负责调换)
版权所有,翻印必究

第二版前言

《高等数学》第一版出版后，得到了许多同行教师及学生的使用与厚爱，并于 2011 年被评为北京高等教育精品教材。这次修订的第二版，是根据近年来工科院校学生实际和建筑类院校学科专业需求，使教材在系统性、科学性、应用性方面更加有利于学生理性精神的培养、科学素质的锻造、分析解决实际问题能力的提高。

《高等数学习题详解（第二版）》是与《高等数学（第二版）》教材配套的辅导教材，对全书习题及各章总习题的解题方法及过程进行较为详细的说明和分析，使其成为学生学习高等数学的“导学”。

习题配备是教材重要组成部分，直接关系到教学目标的实现和教学效果的提高。为了培养学生应用数学的意识和能力，《高等数学习题详解（第二版）》借鉴了国内外一些优秀教材配备习题的优点，并根据第一版出版以来广大同行和读者在教学实践中提出的意见和建议对部分习题进行了调整，删减了抽象且运算复杂的例题与习题，增加了部分具有土木、管理等实际背景的例题与习题，部分题目给出了多种解法，并对该类题目的解法进行系统的归纳、总结，引导学生深入学习。

《高等数学习题详解（第二版）》修订人分别是：第一章、第三章张蒙，第二章吕亚芹，第四章程士珍，第五章白羽，第六章代西武，第七章崔景安，第八章、第十一章侍爱玲，第九章、第十章王晓静，第十二章刘长河，习题集的统稿和定稿由主编宋国华教授负责。

本书得以再版，诚挚感谢北京市属高等学校人才强教深化计划（No：PHR201107123）的支持和石油工业出版社的协作。

在本书再版之际，我们对第一版期间收到的专家、学者及使用本套教材的教师、同学们提出的宝贵意见和建议表示衷心的感谢，真诚地期望能够继续受到关注并且得到使用本套教材的专家、同仁和读者朋友们的批评指导，不胜感激。限于水平，本套教材的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正，希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使这套教材日趋成熟。

编者

2013 年 4 月

第一版前言

《高等数学习题详解》是与《高等数学》教材配套的辅导教材。

《高等数学》(上、下册)是在2002年北京市教育委员会教改立项的基础上，于2007年确立的北京市高等学校精品教材立项课题，是课题组成员多年教学改革和实践工作的总结。

目前国内外《高等数学》教材版本较多，主要适用于一般工科院校。本书的特点是结合建筑类院校学科专业需求和地方工科院校学生实际，遵照“在基础课的教学中，要以应用为目的”，着重思想方法及应用的介绍，以“必须”、“够用”为度，坚持“服务于技术基础课、专业课”的原则；在教材内容编排上，注重对知识的重点、难点分析，以及知识点的概括和归纳总结；注重相关知识在工程实践中的应用，选编了部分有工程实践背景的例题和习题；注重学生入学前基础知识差别，以及专业之间需求重点的差别。在习题选编方面，既考虑到对教材基本知识的消化理解，以巩固所学知识；又考虑到后续各专业基础课和专业课的学习，使之为工程教育服务；同时考虑到报考研究生学生的需求。由于目前“高等数学”课程学时普遍减少和相关专业对“高等数学”课程要求的差异，以及地方院校生源的水平、层次之间的差别和部分学生考研等需要，在教材内容及例题的配备方面，尽量融教材、解题方法、学习指导为一体的结构形式。

为了教学的需求，我们编写了《高等数学》(上、下册)和与之配套的《高等数学习题详解》。其中，《高等数学》上册包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、微分方程共七章；《高等数学》下册包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数共五章。每节后配有习题，每章后配有总习题。《高等数学习题详解》对全书习题及各章总习题的解题方法及过程进行较为详细的说明和分析。

《高等数学》各章参加编写的撰稿人分别是：第一章刘颖，第二章吕亚芹，第三章马龙友、李泽妤，第四章程士珍，第五章和第八章宋国华，第六章代西武，第七章窦家维，第九章李泽妤，第十章寿玉亭、李泽妤，第十一章马龙友、宋国华，第十二章刘长河、张艳。《高等数学习题详解》各章撰稿人分别是：第一章和第三章张蒙，第二章吕亚芹，第四章程士珍，第五章白羽，第六章代西武，第七章窦家维，第八章和第十一章侍爱玲，第九章和第十章王晓静，第十二章张艳、刘长河。整套教材的内容结构由主编宋国华教授和李泽妤教授主持设计制定，并负责统稿和定稿。

本教材出版前，邀请了沈阳航空工业学院、沈阳建筑大学和北京建筑工程学院部分教师对《高等数学》教材进行了认真的审查。同时在北京建筑工程学院部分专业进行试用，根据大家的意见和建议，编写组又做了进一步的修改。为了本套教材的出版，北京市教育委员会高教处、北京建筑工程学院教务处等单位的领导、专家和同行给予了热情的关心和极大的帮助，在此，我们一并表示诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中的错误和不当之处，敬请读者和同行批评指正。

编者

2009年6月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第一章 函数与极限

习题 1—1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{2x+1}$;　(2) $y=\arccos\sqrt{2x}$;　(3) $y=\sqrt{x}+\ln(3-x)$;

(4) $y=\sqrt{6-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;　(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;　(6) $y=\arcsin(2x-1)$;

(7) $y=e^{\frac{2}{x}}$;　(8) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;　(9) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(10) $y=\sqrt{x-1}\ln|x-3|$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{2x+1}$; $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ 2x+1\geqslant 0.\end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为$\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$.

(2) $y=\arccos\sqrt{2x}$; $\begin{cases}|\sqrt{2x}|\leqslant 1,\\ 2x\geqslant 0.\end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

(3) $y=\sqrt{x}+\ln(3-x)$; $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 3-x>0.\end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为$[0,3)$.

(4) $y=\sqrt{6-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$; $\begin{cases}6-x\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ 解不等式组可得函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,6]$.

(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; $4-x^2>0$,解不等式可得函数的定义域为$(-2,2)$.

(6) $y=\arcsin(2x-1)$; $|2x-1|\leqslant 1$,解不等式可得函数定义域为$[0,1]$.

(7) $y=e^{\frac{2}{x}}$; $x\neq 0$,函数定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(8) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$; $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$,解不等式可得函数定义域为$[-1,3]$.

(9) $y=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 函数定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(10) $y=\sqrt{x-1}\ln|x-3|$; $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\neq 0.\end{cases}$ 解不等式组可得函数定义域为$[1,3)\cup(3,+\infty)$.

2. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同,为什么?

(1) $f(x)=1$, $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(2) $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}$;

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$.

解 (1) $f(x)$和$g(x)$的定义域都为$(-\infty,+\infty)$，且$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1=f(x)$，所以$f(x)$和$g(x)$是相同的；

(2) $f(x)$的定义域为$[1,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，$f(x)$和$g(x)$的定义域不同，所以$f(x)$和$g(x)$是不同的；

(3) $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f(x)$和$g(x)$的定义域不同，所以$f(x)$和$g(x)$不相同.

3. 下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇又非偶函数？

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$； (2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\sin x-\cos x+1$； (4) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

(5) $f(x)=\dfrac{10^x+10^{-x}}{2}$； (6) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$； (8) $f(x)=x^2+\cos x$；

(9) $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$； (10) $f(x)=5x^2-\cos x+1$；

(11) $f(x)=x^3+\sin x-\dfrac{1}{x}$； (12) $f(x)=\sin x+\cos x$.

解 (1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；因为$f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数.

(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；因为

$$f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数.

(3) $f(x)=\sin x-\cos x+1$；因为$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$，所以$f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，即$f(x)$是非奇非偶函数.

(4) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；因为$f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数.

(5) $f(x)=\dfrac{10^x+10^{-x}}{2}$；因为$f(-x)=\dfrac{10^{-x}+10^x}{2}=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数.

(6) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；因为$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；因为

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数.

(8) $f(x)=x^2+\cos x$；因为

$$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x),$$

所以$f(x)$是偶函数.

(9) $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$；因为

$$f(-x)=(e^{-x}+e^x)\cdot\sin(-x)=-(e^x+e^{-x})\cdot\sin x=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数.

(10) $f(x)=5x^2-\cos x+1$；因为

$$f(-x)=5(-x)^2-\cos(-x)+1=5x^2-\cos x+1=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数．

(11) $f(x)=x^3+\sin x-\dfrac{1}{x}$；因为

$$f(-x)=(-x)^3+\sin(-x)-\frac{1}{-x}=-x^3-\sin x+\frac{1}{x}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数．

(12) $f(x)=\sin x+\cos x$；因为

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x, f(-x)\neq f(x), f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数．

4. 证明 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})(a>0,a\neq 1)$ 是奇函数．

证明 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是对称区间，且

$$f(-x)=\log_a[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]=\log_a\frac{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数．

5. 下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期．

(1) $y=(\sin 3x)^2$；　(2) $y=x\cos x$；　(3) $y=\cos 8x$；　(4) $y=2+\sin\pi x$.

解 (1) 是周期函数，$T=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) 不是周期函数；

(3) 是周期函数，$T=\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$；

(4) 是周期函数，$T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

6. 求函数 $f(x)=\sin 3x+\tan\dfrac{x}{2}$ 的周期．

解 因为 $\sin 3x$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{3}$，$\tan x$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$，所以 $y=\sin 3x+\tan\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期是 $\dfrac{2\pi}{3}$ 和 2π 的最小公倍数，即 2π.

7. 求函数 $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x$ 的最小正周期．

解 $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x=-\dfrac{1}{2}[\cos 4x-\cos 2x]$，$\cos 4x$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，$\cos 2x$ 的最小正周期为 π，所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π.

8. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，考察复合函数 $f[g(x)]$，$f[f(x)]$，$g[f(x)]$ 的奇偶性．

解 由已知 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，所以 $f[g(-x)]=f[g(x)]$，$f[g(x)]$ 是偶函数；$f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$，$f[f(x)]$ 是奇函数；$g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$，$g[f(x)]$ 是偶函数．

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

9. 求下列函数的反函数．

(1) $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),x>0$ ；　　(2) $y=\begin{cases}1+x, x\leqslant 0,\\ e^x, \quad x>0;\end{cases}$

(3) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$；　　(4) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解　(1) $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right),x>0$；由原函数解出 $x=y\pm\sqrt{y^2+1}$，且 $x>0$，故 $x=y+\sqrt{y^2+1}$，所以反函数为 $y=x+\sqrt{x^2+1}$，$(-\infty<x<+\infty)$；

(2) $y=\begin{cases}1+x, x\leqslant 0,\\ e^x, \quad x>0.\end{cases}$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$y=1+x$，$x=y-1$，$y\in(-\infty,1]$，当 $x>0$ 时，$y=e^x$，$x=\ln y$，$y\in(1,+\infty)$，所以反函数为 $y=\begin{cases}x-1, x\in(-\infty,1],\\ \ln x, \quad x\in(1,+\infty).\end{cases}$

(3) $y=\frac{2^x}{1+2^x}$；由原函数解出 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，且 $0<y<1$，所以反函数为

$$y=\log_2\frac{x}{1-x},(0<x<1).$$

(4) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$. 当 $x>0$ 时，$x=\tan\frac{y}{2}$，当 $x<0$ 时，$x=-\tan\frac{y}{2}$，故反函数为

$$y=\pm\tan\frac{x}{2},x\in[0,\pi).$$

10. 求函数 $y=\begin{cases}x, x<1,\\ x^2, 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, x>4.\end{cases}$ 的反函数．

解　当 $x<1$ 时，$y=x\Rightarrow x=y$，$y<1$；

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}$，$1\leqslant y\leqslant 16$；

当 $x>4$ 时，$y=2^x\Rightarrow x=\log_2 y$，$y>16$.

综上所述，反函数为 $y=\begin{cases}x, \quad x<1,\\ \sqrt{x}, \quad 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, x>16.\end{cases}$

11. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$的函数值．

解　$f(0)=\sqrt{4+0^2}=2$；　　$f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$；

$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$；　　$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}=\frac{\sqrt{4a^2+1}}{|a|}$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3, \quad -3\leqslant x\leqslant 0,\\ -x^3, 0\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(1)$.

解　$f(-2)=(-2)^3=-8$；　$f(1)=-1^3=-1$.

13. 设 $f(x)=\arcsin x$，求下列函数值．

(1) $f(0)$；　(2) $f(-1)$；　(3) $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；　(4) $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

解 (1)$f(0)=\arcsin 0=0$；　(2)$f(-1)=\arcsin(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$；

(3)$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$；　(4)$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$.

14. 设 $f(x)=3^x$，$\varphi(x)=2x^2$，求 $\varphi[f(x)]$.

解 $\varphi[f(x)]=\varphi[3^x]=2(3^x)^2=2\times 9^x$.

15. 设 $f(x)=\operatorname{sgn}x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$.

解 $f[f(x)]=f[\operatorname{sgn}x]=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}x)=\operatorname{sgn}x$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

$g[g(x)]=g\left[\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$，$(x\neq 0)$；

$f[g(x)]=f\left[\dfrac{1}{x}\right]=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\operatorname{sgn}x$，$(x\neq 0)$.

16. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$和 $f\{f[f(x)]\}$.

解 $$f[f(x)]=f\left[\frac{x}{1-x}\right]=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}\quad\left(x\neq 1,x\neq\frac{1}{2}\right);$$

$$f\{f[f(x)]\}=f\left\{\frac{x}{1-2x}\right\}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}\quad\left(x\neq 1,x\neq\frac{1}{2},x\neq\frac{1}{3}\right).$$

17. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这个复合函数分别对应于给定自变量 x_1 和 x_2 的函数值.

(1)$y=u^2$，　$u=\cos x$，　$x_1=\dfrac{\pi}{3}$，　$x_2=\dfrac{\pi}{6}$；

(2)$y=\sin u$，　$u=3x$，　$x_1=\dfrac{\pi}{9}$，　$x_2=\dfrac{\pi}{6}$；

(3)$y=\sqrt{u}$，　$u=1+x^3$，　$x_1=2$，　$x_2=0$；

(4)$y=e^u$，　$u=\tan x$，　$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，　$x_2=0$；

(5)$y=u^3$，　$u=e^x$，　$x_1=1$，　$x_2=-1$.

解 (1)$y=\cos^2 x$，　$y_1=\cos^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{4}$，　$y_2=\cos^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}$；

(2)$y=\sin 3x$，　$y_1=\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$y_2=\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{6}\right)=1$；

(3)$y=\sqrt{1+x^3}$，　$y_1=\sqrt{1+2^3}=3$，　$y_2=\sqrt{1+0^3}=1$；

(4)$y=e^{\tan x}$，　$y_1=e^{\tan\frac{\pi}{4}}=e$，　$y_2=e^{\tan 0}=1$；

(5)$y=e^{3x}$，　$y_1=e^3$，　$y_2=e^{-3}$.

18. 分解下列各函数.

(1)$y=(2x+5)^4$；　(2)$y=\cos(4-3x)$；　(3)$y=\sin e^x$；

(4) $y=\arctan(x^2)$；　(5) $y=\ln\cos x^3$；　(6) $y=\arcsin\sqrt{x^3}$；

(7) $y=e^{3x+1}$；　(8) $y=\cos^2(2x+1)$；　(9) $y=\sqrt{\lg\sin x}$.

解　(1) $y=u^4, u=2x+5$；　(2) $y=\cos u, u=4-3x$；

(3) $y=\sin u, u=e^x$；　(4) $y=\arctan u, u=x^2$；

(5) $y=\ln u, u=\cos v, v=x^3$；　(6) $y=\arcsin u, u=\sqrt{v}, v=x^3$；

(7) $y=e^u, u=3x+1$；　(8) $y=u^2, u=\cos v, v=2x+1$；

(9) $y=\sqrt{u}, u=\lg v, v=\sin x$.

19. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,3]$，求 $f(\ln x)$ 的定义域.

解　由 $0\leqslant\ln x\leqslant 3$ 解得 $1\leqslant x\leqslant e^3$，所以 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1,e^3]$.

20. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$，求 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ 的定义域.

解　由 $1\leqslant\dfrac{1}{x+1}\leqslant 2$ 解得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$，所以 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

21. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(-x)$.

解　$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$；　$f(-x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

22. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，并作出 $f(x)$ 的图形.

解　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；　$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$.

$f(x)$ 的图形如图 1－1 所示.

23. 三角形两边之长 a,b 一定，夹角 θ 不定，试将三角形面积 S 用 θ 的函数写出来，并指出这个函数的定义域.

解　$S=\dfrac{底\times高}{2}=\dfrac{a\cdot|AD|}{2}=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\theta\,(0<\theta<\pi)$.

其图形如图 1－2 所示.

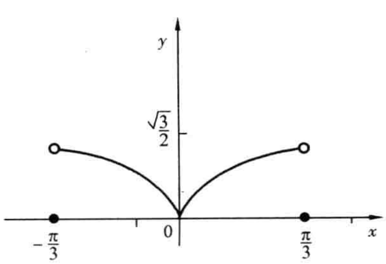


图 1－1

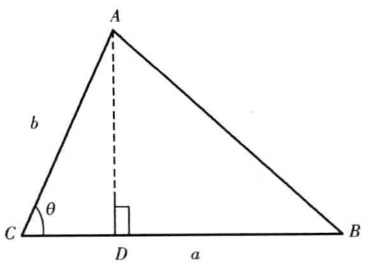


图 1－2

24. 某人从美国到加拿大度假，他把美元兑换成加拿大元时，币面值增加 12%，回国后他发现把加拿大元兑换成美元时，币面值减少了 12%，把这两件事中美元与加拿大元互相兑换的关系分别用函数表示出来，并证明这两个函数不互为反函数(表明一来一去的兑换后，他亏损了一些钱).

解 设 $f(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数，$g(x)$ 为将 x 元加拿大元兑换成美元数，则

$$f(x)=x(1+12\%)=1.12x\ (x\geqslant 0),\quad g(x)=x(1-12\%)=0.88x\ (x\geqslant 0).$$

由 $g[f(x)]=g(1.12x)=0.88\times 1.12x=0.9856x$ 可知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不互为反函数，且他亏损了一些钱.

25. 京沪运输公司规定货物的吨公里运价为：在 $a$km 以内每千米 k 元，超过 $a$km，超过部分每千米为 $\frac{4}{5}k$ 元. 求运价 m 和里程 s 之间的函数关系.

解 当 $0<s\leqslant a$ 时，$m=ks$；当 $s>a$ 时，$m=ka+\frac{4}{5}k(s-a)$，即运价 m 与里程 s 间的函数关系为 $m=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a,\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a.\end{cases}$

习题 1—2

1. 观察下面各数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，哪些数列收敛？哪些数列发散？对收敛数列，写出它们的极限.

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　(2) $x_n=\frac{1}{n}(-1)^n$；　(3) $x_n=n(-1)^n$；

(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$；　(5) $x_n=3+\frac{1}{n^2}$；　(6) $x_n=\frac{2^n-1}{5^n}$；

(7) $x_n=\frac{3n+1}{n}$；　(8) $x_n=\frac{5+(-1)^n}{2}$；　(9) $x_n=n^2-\frac{1}{n}$；

(10) $x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$；　(11) $x_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$；　(12) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$.

解 (1) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$；　(2) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$；

(3) 发散；　(4) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 1$；

(5) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 3$；　(6) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 0$；

(7) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 3$；　(8) 发散；

(9) 发散；　(10) 收敛，$n\to\infty$ 时，$x_n\to 1$；

(11) 发散；　(12) 发散.

*2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$，要使 $|a_n-0|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$，只需 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，均有 $|a_n-0|<\varepsilon$ 成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) $\left|a_n-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n-3-6n-2}{3(3n+1)}\right|=\frac{5}{3(3n+1)}<\frac{9}{3(3n+1)}<\frac{1}{n+\frac{1}{3}}<\frac{1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$,要使$\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$,只需$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$即可．于是$\forall\varepsilon>0$,存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,均有$\left|a_n-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$;

(3) $|a_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n^2+1}+n)}<\frac{1}{n}$.

$\forall\varepsilon>0$,要使$|a_n-1|<\varepsilon$,只需$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{\varepsilon}$即可．于是$\forall\varepsilon>0$,存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,均有$|a_n-1|<\varepsilon$成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}=1$.

*3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$,并举例说明:数列$\{|x_n|\}$有极限,但数列$\{x_n\}$未必有极限．

证明 $\forall\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,故存在自然数$N$,使得当$n>N$时,均有$|x_n-a|<\varepsilon$成立．又因为$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$,故当$n>N$时均有$||x_n|-|a||<\varepsilon$成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.例如$x_n=(-1)^n$,$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$,但是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在．

*4. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$.

证明 因为数列$\{x_n\}$有界,故存在$M>0$,对一切n,均有$|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,所以对$\frac{\varepsilon}{M}>0$,存在自然数$N$,使得当$n>N$时,均有$|y_n-0|<\frac{\varepsilon}{M}$,即$|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,于是当$n>N$时,恒有$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$成立,由定义可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

习题 1—3

1. 对图 1—3(教材图 1—45)所示函数,求下列极限,若极限不存在,说明理由．

(1)$\lim\limits_{x\to1}f(x)$;　　(2)$\lim\limits_{x\to1}g(x)$;　　(3)$\lim\limits_{x\to1}h(x)$.

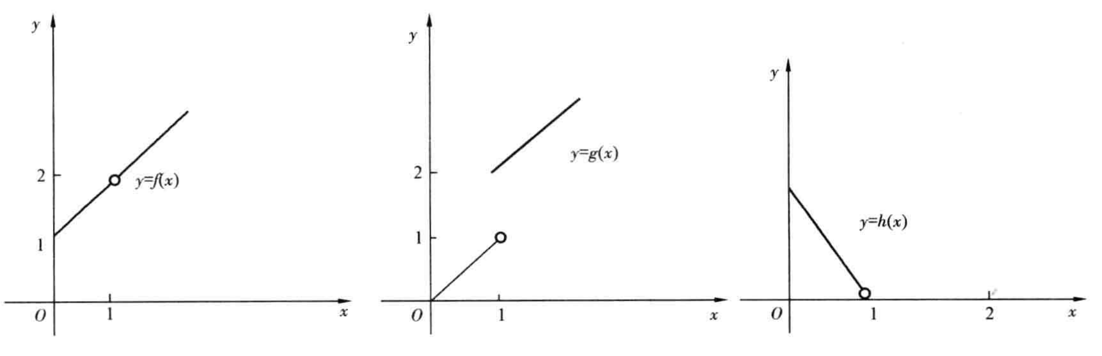


图 1—3

解 (1)因为$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=2$,所以极限存在,且$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$;

(2)因为 $\lim\limits_{x\to1-0}g(x)=1\neq\lim\limits_{x\to1+0}g(x)=2$,所以极限不存在;

(3)因为 $\lim\limits_{x\to1-0}h(x)=\lim\limits_{x\to1+0}h(x)=0$,所以极限存在,且$\lim\limits_{x\to1}h(x)=0$.

2. 对图 1—4(教材图 1—46)所示函数,下列极限,哪些是对的? 哪些是错的?

(1) $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=1$;　(2) $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$;　(3) $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=1$;　(5) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=0$;　(6) $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=-1$;

(7) $\lim\limits_{x\to-2+0}f(x)=1$;　(8)$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在;　(9) $\lim\limits_{x\to-2-0}f(x)=1$;

(10) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$不存在 .

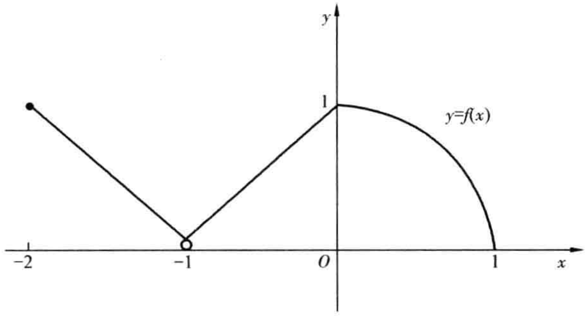


图 1—4

解　(1)对;　(2)错,$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$;

(3)对;　(4)错,$\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=0$;

(5)对;　(6)错,因为 $f(x)$在$(1,+\infty)$上没有定义,所以 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)$不存在;

(7)对;　(8)对,因为 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)$不存在,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在;

(9)错,因为 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上没有定义,所以 $\lim\limits_{x\to-2-0}f(x)$不存在;

(10)对,因为 $\lim\limits_{x\to-2-0}f(x)$不存在,所以 $\lim\limits_{x\to-2}f(x)$不存在 .

3. 图 1—5(教材图 1—47)中所示函数,下列极限中,哪些是对的? 哪些是错的?

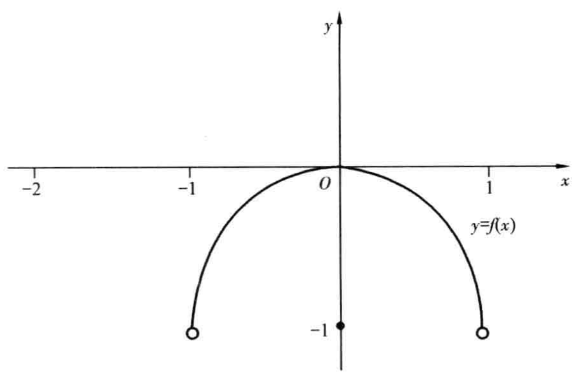


图 1—5

(1) $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=0$;　(2) $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$;　(3) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-1$;

(4) $\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=-1$;　(5) $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=0$;　(6) $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$;

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com