香港中學適用

數學 5A

（修訂版）

教師手冊

孫淑南

第 1 章 序列：等差序列和等比序列

額外例題

	例題
§1.1　序列	**1**
§1.2　等差序列	**2, 3, 4**
§1.3　等比序列	**5, 6**
§1.4　等差中項和等比中項	**7, 8**

例 1　(§1.1)

已知某序列的通項可從 $T(n) = 12 - 3n$ 求得。判斷以下每個數是否該序列其中一項。若答案為是，指出該數是該序列的第幾項。

(a) -4

(b) 0

(c) 12

解

(a)
$$\begin{aligned} T(n) &= -4 \\ 12 - 3n &= -4 \\ -3n &= -16 \\ n &= 5\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\because$ n 不是整數。

$\therefore$ 否，-4 不是該序列其中一項。

(b)
$$\begin{aligned} T(n) &= 0 \\ 12 - 3n &= 0 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore$ 是，0 是該序列的第 4 項。

(c)
$$\begin{aligned} T(n) &= 12 \\ 12 - 3n &= 12 \\ -3n &= 0 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

$\because$ n 不是正整數。

$\therefore$ 否，12 不是該序列其中一項。

例 2　(§1.2)

判斷以下各序列是否等差序列。

(a) $13, 20, \cdots, 6 + 7n, \cdots$

(b) $2, 4, \cdots, 2^n, \cdots$

解

(a)
$$\begin{aligned} T(k+1) - T(k) &= 6 + 7(k+1) - (6 + 7k) \\ &= 6 + 7k + 7 - 6 - 7k \\ &= 7\text{，而這是一個常數} \end{aligned}$$

$\therefore$ 已知序列是等差序列。

(b) $T(k+1)-T(k)=2^{k+1}-2^k$

$=2^k\cdot 2-2^k$

$=2^k$，而這不是一個常數

$\therefore$ 已知序列不是等差序列。

注意：一般來說，若一個序列的通項 $T(n)=a+bn$，則該序列必定是等差序列，其中公差是 b。

例 3　(§1.2)

在一個等差序列中，$T(5)=-50$ 及 $T(25)=-20$。求

(a) 首項和公差；

(b) 通項 $T(n)$；

(c) 第一個正數項。

解

(a) 設首項是 a 而公差是 d，

則 $T(5)=a+4d=-50$ ....**(i)**

$T(25)=a+24d=-20$ ..... **(ii)**

(ii) − (i)：$20d=30$

$d=\dfrac{3}{2}$

將 $d=\dfrac{3}{2}$ 代入 **(i)**，

$a+4\left(\dfrac{3}{2}\right)=-50$

$a=-56$

$\therefore$ 首項是 -56 而公差是 $\dfrac{3}{2}$。

(b) 通項 $T(n)=a+(n-1)d$

$=-56+(n-1)\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$=\dfrac{3}{2}n-57\dfrac{1}{2}$

(c) 設 $T(k)>0$，

則 $\dfrac{3}{2}k-57\dfrac{1}{2}>0$

$\dfrac{3}{2}k>\dfrac{115}{2}$

$k>38\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ $T(39)$ 是第一個正數項。

$T(39)=\dfrac{3}{2}(39)-57\dfrac{1}{2}$

$=1$

$\therefore$ 第一個正數項是 1。

例 4　(§1.2)

求在 1 000 與 3 000 之間 (包括 1 000 和 3 000) 既不是 3 的倍數，亦不是 5 的倍數的整數的數目。

解

在 1 000 與 3 000 之間所有 3 的倍數形成一個等差序列 1 002，1 005，⋯，3 000，其中通項 $=1\,002+(n-1)(3)$ 而末項是 3 000。

$\therefore$ $1\,002+(n-1)(3)=3\,000$

$n=667$

在 1 000 與 3 000 之間所有 5 的倍數形成一個等差序列 1 000，1 005，⋯，3 000，其中通項 $=1\,000+(m-1)(5)$ 而末項是 3 000。

$\therefore$ $1\,000+(m-1)(5)=3\,000$

$m=401$

在 1 000 與 3 000 之間所有 15 的倍數形成一個等差序列 1 005，1 020，⋯，3 000，其中通項 $=1\,005+(s-1)(15)$ 而末項是 3 000。

$\therefore$ $1\,005+(s-1)(15)=3\,000$

$s=134$

在 1 000 與 3 000 之間整數的數目
$= 3\,000 - 999 = 2\,001$

在 1 000 與 3 000 之間既不是 3 的倍數，亦不是 5 的倍數的整數的數目
$= 2\,001 - n - m + s$
$= 2\,001 - 667 - 401 + 134$
$= \underline{\underline{1\,067}}$

例 5 (§1.3)

已知一個等比序列的第 2 項與第 3 項的和是 60。若該序列的第 2 項比首項大 10，求第 5 項。

解

設首項是 a 而公比是 R，

則 $T(2) + T(3) = aR + aR^2 = 60$ .... **(i)**
$T(2) - T(1) = aR - a = 10$ .... **(ii)**

從 **(i)**，$a(R + R^2) = 60$ .... **(iii)**

從 **(ii)**，$a(R - 1) = 10$ .... **(iv)**

$\frac{\textbf{(iii)}}{\textbf{(iv)}}$：$\frac{R + R^2}{R - 1} = 6$

$R + R^2 = 6R - 6$

$R^2 - 5R + 6 = 0$

$(R - 3)(R - 2) = 0$

$R = 3$ 或 2

將求得的 R 值代入 **(iv)**，

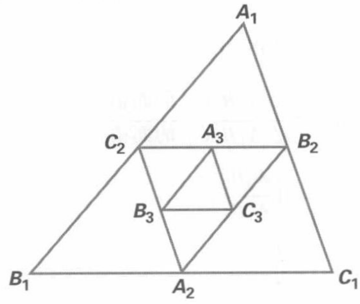
當 $R = 3$ 時，$a(3 - 1) = 10$
$a = 5$

$\therefore\ T(5) = aR^4$
$= 5(3)^4$
$= \underline{\underline{405}}$

當 $R = 2$ 時，$a(2 - 1) = 10$
$a = 10$

$\therefore\ T(5) = aR^4$
$= 10(2)^4$
$= \underline{\underline{160}}$

例 6 (§1.3)



在圖中，連接 $\triangle A_1B_1C_1$ 各邊的中點，形成第二個三角形 $A_2B_2C_2$；連接 $\triangle A_2B_2C_2$ 各邊的中點，形成第三個三角形 $A_3B_3C_3$；如此類推。

(a) 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周界是 384 cm，求第六個三角形的周界。

(b) 若 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面積是 768 cm^2，求第四個三角形的面積。

解

(a) 設第 n 個三角形的周界是 P_n。
這些三角形的周界形成一個等比序列，其中首項 $a = 384$ cm，

公比 $R = \frac{P_2}{P_1}$

$= \frac{A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1}$

$= \frac{\frac{1}{2}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)}{(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore\ P_6 = aR^5$

$= \left[384\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]$ cm

$= 12$ cm

$\therefore$ 第六個三角形的周界是 12 cm。

(b) 設第 n 個三角形的面積是 H_n。

這些三角形的面積形成一個等比序列，其中

首項 $a' = 768\text{ cm}^2$，

$$\text{公比 } R' = \frac{\triangle A_2B_2C_2 \text{ 的面積}}{\triangle A_1B_1C_1 \text{ 的面積}} = \left(\frac{A_2B_2}{A_1B_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ H_4 = a'(R')^3$

$= \left[768\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]\text{ cm}^2$

$= 12\text{ cm}^2$

$\therefore$ 第四個三角形的面積是 12 cm^2。

例 7 (§1.4)

(a) 若 x，a，b，y 是一個等差序列，試以 x 和 y 表示 a 和 b。

(b) 由此在 $-\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{2}$ 之間插入兩個等差中項。

解

(a) 公差 $= a - x$

$\therefore\ y = x + 3(a - x)$

$a = x + \frac{y - x}{3}$

$a = \frac{2x + y}{3}$

$b = x + 2(a - x)$

$= x + 2\left(\frac{y - x}{3}\right)$

$b = \frac{x + 2y}{3}$

(b) 設 $x = -\sqrt{2}$ 和 $y = \sqrt{2}$，從 **(a)**，

$a = \frac{-2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{3}$

$a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$b = \frac{-\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{3}$

$b = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ 所求的兩個等差中項是 $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{3}$。

例 8 (§1.4)

(a) 在 $\frac{9}{x}$ 與 $\frac{x^2}{3}$ 之間插入兩個等比中項，答案以 x 表示。

(b) 若在 **(a)** 所得的兩個等比中項的正的等比中項是 $\frac{3}{\sqrt{2}}$，求 x 的值。

解

(a) $\frac{9}{x}$，$\frac{9}{x}r$，$\frac{9}{x}r^2$，$\frac{x^2}{3}$ 形成一個等比序列。

$\therefore\ \frac{9}{x}r^3 = \frac{x^2}{3}$

$r^3 = \frac{x^3}{27}$

$r = \frac{x}{3}$

$\therefore$ 所求的兩個等比中項是 3 和 x。

(b) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{3 \cdot x}$

$\frac{9}{2} = 3x$

$x = \frac{3}{2}$

習題題解（附選題指引）

在各習題的「選題指引」中，屬於剪裁課程所不需要的題目，其題號將用藍色顯示。

習題 1A（第 5 頁）

選題指引

類型 **目的**

① 根據已知序列的首幾項，求其他的項。
② 根據已知序列的通項，求該序列的項。
③ 求序列的通項。
④ 判斷某個數是否已知序列的項。

類型	程度一題目	程度二題目
①	1	6
②	2, 3	7, 8
③	4	9
④	5	

1. (a) 接著的兩項是 31 和 33。

(b) 接著的兩項是 $\frac{1}{7}$ 和 $\frac{1}{8}$。

(c) 接著的兩項是 18 和 24。

2. (a) $T(n) = 2n - 5$

$T(1) = 2(1) - 5 = -3$

$T(2) = 2(2) - 5 = -1$

$\therefore$ 該序列的首兩項是 -3 和 -1。

(b) $T(n) = (n-1)(2n-1)$

$T(1) = (1-1)[2(1)-1] = 0$

$T(2) = (2-1)[2(2)-1] = 3$

$\therefore$ 該序列的首兩項是 0 和 3。

(c) $T(n) = (-1)^{n+1}$

$T(1) = (-1)^{1+1} = 1$

$T(2) = (-1)^{2+1} = -1$

$\therefore$ 該序列的首兩項是 1 和 -1。

3. (a) $T(n) = n + 3$

$T(2) = 2 + 3 = 5$

$T(6) = 6 + 3 = 9$

(b) $T(n) = 2n - 5$

$T(2) = 2(2) - 5 = -1$

$T(6) = 2(6) - 5 = 7$

(c) $T(n) = (n+3)(2n-5)$

$T(2) = (2+3)[2(2)-5] = -5$

$T(6) = (6+3)[2(6)-5] = 63$

4. (a) 觀察已知各項：

$T(1) = -1 = -(1)$

$T(2) = -2 = -(2)$

$T(3) = -3 = -(3)$

$T(4) = -4 = -(4)$

$\therefore\ T(n) = -n$

(b) 觀察已知各項：

$T(1) = -2 = -2(1)$

$T(2) = -4 = -2(2)$

$T(3) = -6 = -2(3)$

$T(4) = -8 = -2(4)$

$\therefore\ T(n) = -2n$

習題 1A 題解（續）

(c) 觀察已知各項：

$T(1) = -1 = -[2(1) - 1]$
$T(2) = -3 = -[2(2) - 1]$
$T(3) = -5 = -[2(3) - 1]$
$T(4) = -7 = -[2(4) - 1]$
$\therefore\ T(n) = -(2n - 1)$
$= \underline{\underline{1 - 2n}}$

5. (a) $T(n) = 29$
$2n + 7 = 29$
$2n = 22$
$n = 11$
$\therefore$ 是，29 是該序列的第 11 項。

(b) $T(n) = 28$
$2n + 7 = 28$
$2n = 21$
$n = 10.5$
$\because$ n 不是整數。
$\therefore$ 否，28 不是該序列的其中一項。

(c) $T(n) = 3$
$2n + 7 = 3$
$2n = -4$
$n = -2$
$\because$ n 不是正整數。
$\therefore$ 否，3 不是該序列的其中一項。

6. (a) $\because\ T(1) = 5$
$T(2) = 5 - 3 = 2$
$T(3) = 2 - 3 = -1$
$T(4) = -1 - 3 = -4$
$\therefore\ T(5) = -4 - 3 = -7$
$T(6) = -7 - 3 = -10$
$T(7) = -10 - 3 = -13$
$T(8) = -13 - 3 = -16$
$\therefore$ 該序列接著的四項是 -7，-10，-13 和 -16。

(b) $\because\ T(1) = a$
$T(2) = a \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{3}$
$T(3) = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{9}$
$T(4) = \frac{a^3}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^4}{27}$
$\therefore\ T(5) = \frac{a^4}{27} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^5}{81}$
$T(6) = \frac{a^5}{81} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^6}{243}$
$T(7) = \frac{a^6}{243} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^7}{729}$
$T(8) = \frac{a^7}{729} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^8}{2\,187}$
$\therefore$ 該序列接著的四項是 $\frac{a^5}{81}$，$\frac{a^6}{243}$，$\frac{a^7}{729}$ 和 $\frac{a^8}{2\,187}$。

7. (a) $T(n) = \frac{2^n}{512}$
$T(1) = \frac{2^1}{512} = \frac{1}{256}$
$T(2) = \frac{2^2}{512} = \frac{1}{128}$
$T(3) = \frac{2^3}{512} = \frac{1}{64}$
$T(4) = \frac{2^4}{512} = \frac{1}{32}$
$\therefore$ 該序列的首四項是 $\frac{1}{256}$，$\frac{1}{128}$，$\frac{1}{64}$ 和 $\frac{1}{32}$。

(b) $T(n) = \frac{2n - 1}{2n + 1}$
$T(1) = \frac{2(1) - 1}{2(1) + 1} = \frac{1}{3}$
$T(2) = \frac{2(2) - 1}{2(2) + 1} = \frac{3}{5}$
$T(3) = \frac{2(3) - 1}{2(3) + 1} = \frac{5}{7}$
$T(4) = \frac{2(4) - 1}{2(4) + 1} = \frac{7}{9}$

習題 1A 題解（續）

$\therefore$ 該序列的首四項是 $\underline{\frac{1}{3}，\frac{3}{5}，\frac{5}{7}\text{ 和 }\frac{7}{9}}$。

(c) $T(n) = (2n-1)(-2)^n$

$T(1) = [2(1)-1](-2)^1 = -2$

$T(2) = [2(2)-1](-2)^2 = 12$

$T(3) = [2(3)-1](-2)^3 = -40$

$T(4) = [2(4)-1](-2)^4 = 112$

$\therefore$ 該序列的首四項是 $\underline{-2，12，-40\text{ 和 }112}$。

8. (a) $T(n) = n^2 - 3$

$T(1) = 1^2 - 3 = \underline{\underline{-2}}$

$T(3) = 3^2 - 3 = \underline{\underline{6}}$

$T(11) = 11^2 - 3 = \underline{\underline{118}}$

(b) $T(n) = 5 + 2^{n-1}$

$T(1) = 5 + 2^{1-1} = \underline{\underline{6}}$

$T(3) = 5 + 2^{3-1} = \underline{\underline{9}}$

$T(11) = 5 + 2^{11-1} = \underline{\underline{1\,029}}$

(c) $T(n) = (-1)^n(n-3)$

$T(1) = (-1)^1(1-3) = \underline{\underline{2}}$

$T(3) = (-1)^3(3-3) = \underline{\underline{0}}$

$T(11) = (-1)^{11}(11-3) = \underline{\underline{-8}}$

9. (a) 觀察已知各項：

$T(1) = 3^3 = [2(1)+1]^3$

$T(2) = 5^3 = [2(2)+1]^3$

$T(3) = 7^3 = [2(3)+1]^3$

$T(4) = 9^3 = [2(4)+1]^3$

$\therefore\ T(n) = \underline{\underline{(2n+1)^3}}$

(b) 觀察已知各項：

$T(1) = 13 = 18 - 5(1)$

$T(2) = 8 = 18 - 5(2)$

$T(3) = 3 = 18 - 5(3)$

$T(4) = -2 = 18 - 5(4)$

$\therefore\ T(n) = \underline{\underline{18 - 5n}}$

(c) 觀察已知各項：

$T(1) = 3 = \frac{3}{2^{(1)-1}}$

$T(2) = \frac{3}{2} = \frac{3}{2^{(2)-1}}$

$T(3) = \frac{3}{4} = \frac{3}{2^{(3)-1}}$

$T(4) = \frac{3}{8} = \frac{3}{2^{(4)-1}}$

$\therefore\ T(n) = \underline{\underline{\frac{3}{2^{n-1}}}}$

習題 1B（第 10 頁）

選題指引

類型	目的
①	辨認等差序列。
②	求等差序列的某些項或公差。
③	求等差序列的通項或未知項。
④	求等差序列的項數或未知項。
⑤	等差序列在日常生活中的應用。

類型	程度一題目	程度二題目
①	1	
②	2, 4	9
③	3, 5	8, 10
④	6, 7	11, 12, 13
⑤		14, 15

習題 1B 題解（續）

1. (a) 兩個連續項之間的差

$= 4 - 2 = 6 - 4 = 8 - 6 = 10 - 8 = 2$

$\therefore$ 是，已知序列是等差序列，其中公差是 2。

(b) 兩個連續項之間的差

$= 13 - 16 = 10 - 13 = 7 - 10 = 4 - 7$
$= -3$

$\therefore$ 是，已知序列是等差序列，其中公差是 -3。

(c) 兩個連續項之間的差

$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$= 1\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$

$= 1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore$ 是，已知序列是等差序列，其中公差是 $\frac{1}{2}$。

(d) $\because$ $100 - 10 \neq 1\,000 - 100$

$\therefore$ 否，已知序列不是等差序列。

2. (a) $a = 2$，$d = 3$

$\therefore$ $T(1) = 2$
$T(2) = 2 + 3 = 5$
$T(3) = 5 + 3 = 8$

$\therefore$ 該序列的首三項是 2，5 和 8。

(b) $a = 70$，$d = 17$

$\therefore$ $T(1) = 70$
$T(2) = 70 + 17 = 87$
$T(3) = 87 + 17 = 104$

$\therefore$ 該序列的首三項是 70，87 和 104。

(c) $a = -1$，$d = -2$

$\therefore$ $T(1) = -1$
$T(2) = -1 + (-2) = -3$
$T(3) = -3 + (-2) = -5$

$\therefore$ 該序列的首三項是 -1，-3 和 -5。

(d) $a = \frac{1}{4}$，$d = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $T(1) = \frac{1}{4}$

$T(2) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

$T(3) = -\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ 該序列的首三項是 $\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{4}$ 和 $-\frac{3}{4}$。

3. (a) $d = 7 - 4 = \underline{\underline{3}}$

$\because$ $a = 4$，$d = 3$

$\therefore$ $T(n) = 4 + (n-1)(3)$
$= 4 + 3n - 3$
$= \underline{\underline{3n + 1}}$

(b) $d = 2 - (-2) = \underline{\underline{4}}$

$\because$ $a = -2$，$d = 4$

$\therefore$ $T(n) = -2 + (n-1)(4)$
$= -2 + 4n - 4$
$= \underline{\underline{4n - 6}}$

習題 1B 題解（續）

(c) $d = -1 - 10 = \underline{\underline{-11}}$

$\because \ a = 10, \ d = -11$

$\therefore \ T(n) = 10 + (n-1)(-11)$
$= 10 - 11n + 11$
$= \underline{\underline{-11n + 21}}$

(d) $d = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = \underline{\underline{-1}}$

$\because \ a = \frac{4}{3}, \ d = -1$

$\therefore \ T(n) = \frac{4}{3} + (n-1)(-1)$
$= \frac{4}{3} - n + 1$
$= \underline{\underline{-n + \frac{7}{3}}}$

4. 由於 $x-(-7)$ 和 $(1-x)-x$ 都等於公差，所以

$x-(-7) = (1-x)-x$
$x + 7 = 1 - 2x$
$3x = -6$
$x = -2$

$\therefore$ 公差 $= x-(-7)$
$= -2 + 7$
$= \underline{\underline{5}}$

5. (a) 設該序列的首項和公差分別是 a 和 d。

$T(1) = a = 3$ .... **(1)**
$T(4) = a + 3d = 18$ .... **(2)**

從 **(1)**，$a = 3$。
將 $a = 3$ 代入 **(2)**，
$3 + 3d = 18$
$3d = 15$
$d = 5$

$\therefore \ T(n) = 3 + (n-1)(5)$
$= 3 + 5n - 5$
$= \underline{\underline{5n - 2}}$

$T(10) = 5(10) - 2$
$= \underline{\underline{48}}$

(b) 設該序列的首項和公差分別是 a 和 d。

$T(5) = a + 4d = 24$ .... **(1)**
$T(9) = a + 8d = 40$ .... **(2)**

(2) – (1)：$4d = 16$
$d = 4$

將 $d = 4$ 代入 **(1)**，
$a + 4(4) = 24$
$a = 8$

$\therefore \ T(n) = 8 + (n-1)(4)$
$= 8 + 4n - 4$
$= \underline{\underline{4n + 4}}$

$T(10) = 4(10) + 4$
$= \underline{\underline{44}}$

6. (a) 首項 $= 12$
公差 $= 18 - 12 = 6$

$\therefore \ T(n) = 12 + (n-1)(6)$
$= 12 + 6n - 6$
$= 6n + 6$

若 $T(n) = 114$，
則 $6n + 6 = 114$
$6n = 108$
$n = 18$

$\therefore$ <u>該序列有 18 項。</u>

(b) 首項 $= 82$
公差 $= 73 - 82 = -9$

$\therefore \ T(n) = 82 + (n-1)(-9)$
$= 82 - 9n + 9$
$= 91 - 9n$

若 $T(n) = 1$，
則 $91 - 9n = 1$
$-9n = -90$
$n = 10$

$\therefore$ <u>該序列有 10 項。</u>

習題 1B 題解（續）

7. (a) 首項 = 27

公差 = 24 − 27 = −3

$\therefore\ T(n) = 27 + (n-1)(-3)$
$= 27 - 3n + 3$
$= 30 - 3n$

對於 $T(n) < 0$，

$30 - 3n < 0$
$30 < 3n$
$n > 10$

∴ 當 $T(n)$ 是第一個負數項時，$n = \underline{\underline{11}}$

(b) 首項 = 50

公差 = 42 − 50 = −8

$\therefore\ T(n) = 50 + (n-1)(-8)$
$= 50 - 8n + 8$
$= 58 - 8n$

對於 $T(n) < 0$，

$58 - 8n < 0$
$58 < 8n$
$n > 7.25$

∴ 當 $T(n)$ 是第一個負數項時，$n = \underline{\underline{8}}$

8. (a) 公差 $= (x-3) - (x-8)$
$= x - 3 - x + 8$
$= \underline{\underline{5}}$

(b) ∵ 首項 a 是 $x-8$，而公差 d 是 5。

$\therefore\ T(n) = x - 8 + (n-1)(5)$
$= x - 8 + 5n - 5$
$= \underline{\underline{x + 5n - 13}}$

(c) $T(11) = x + 5(11) - 13$
$= \underline{\underline{x + 42}}$

9. (a) 設該序列的首項和公差分別是 a 和 d。

$T(1) = a = 10$ .... **(i)**

$T(8) = a + 7d = -11$ .... **(ii)**

從 **(i)**，$a = 10$ 。

將 $a = 10$ 代入 **(ii)**，

$10 + 7d = -11$
$7d = -21$
$d = -3$

∴ $\underline{\text{公差是 } -3\text{。}}$

(b) 從 **(a)**，$a = 10$ 和 $d = -3$，

$\therefore\ T(n) = 10 + (n-1)(-3)$
$= 10 - 3n + 3$
$= 13 - 3n$

$\therefore\ T(12) = 13 - 3(12)$
$= \underline{\underline{-23}}$

10. (a) 設該序列的首項和公差分別是 a 和 d。

$T(7) = a + 6d = -18$ ...... **(i)**

$T(20) = a + 19d = -57$ .....**(ii)**

(ii) − **(i)**：$13d = -39$
$d = -3$

將 $d = -3$ 代入 **(i)**，

$a + 6(-3) = -18$
$a = 0$

$\therefore\ T(n) = 0 + (n-1)(-3)$
$= \underline{\underline{-3n + 3}}$

(b) $T(3) - T(9) = [-3(3) + 3] - [-3(9) + 3]$
$= \underline{\underline{18}}$

11. (a) 首項 = 40

公差 = 32 − 40
= −8

$\therefore\ T(n) = 40 + (n-1)(-8)$
$= 40 - 8n + 8$
$= 48 - 8n$

習題 1B 題解（續）

若 $\quad T(n) = -32$，
則 $\quad 48 - 8n = -32$
$\qquad -8n = -80$
$\qquad n = 10$

$\therefore$ 該序列有 10 項。

對於 $T(n) < 0$，$48 - 8n < 0$
$\qquad 48 < 8n$
$\qquad n > 6$

第一個負數項 $= T(7)$
$\qquad = 48 - 8(7)$
$\qquad = \underline{\underline{-8}}$

(b) 首項 $= 85$
公差 $= 79 - 85$
$\qquad = -6$

$\therefore \quad T(n) = 85 + (n-1)(-6)$
$\qquad = 85 - 6n + 6$
$\qquad = 91 - 6n$

若 $\quad T(n) = -17$，
則 $\quad 91 - 6n = -17$
$\qquad -6n = -108$
$\qquad n = 18$

$\therefore$ 該序列有 18 項。

對於 $T(n) < 0$，$91 - 6n < 0$
$\qquad 91 < 6n$
$\qquad n > 15\frac{1}{6}$

第一個負數項 $= T(16)$
$\qquad = 91 - 6(16)$
$\qquad = \underline{\underline{-5}}$

12. (a) 首項 $= -80$
公差 $= -68 - (-80)$
$\qquad = 12$

$\therefore \quad T(n) = -80 + (n-1)(12)$
$\qquad = -80 + 12n - 12$
$\qquad = 12n - 92$

若 $\quad T(n) = 124$，
則 $\quad 12n - 92 = 124$
$\qquad 12n = 216$
$\qquad n = 18$

$\therefore$ 該序列有 18 項。

對於 $T(n) > 0$，$12n - 92 > 0$
$\qquad 12n > 92$
$\qquad n > 7\frac{2}{3}$

第一個正數項 $= T(8)$
$\qquad = 12(8) - 92$
$\qquad = \underline{\underline{4}}$

(b) 首項 $= -64$
公差 $= -55 - (-64)$
$\qquad = 9$

$\therefore \quad T(n) = -64 + (n-1)(9)$
$\qquad = -64 + 9n - 9$
$\qquad = 9n - 73$

若 $\quad T(n) = 35$，
則 $\quad 9n - 73 = 35$
$\qquad 9n = 108$
$\qquad n = 12$

$\therefore$ 該序列有 12 項。

對於 $T(n) > 0$，$9n - 73 > 0$
$\qquad 9n > 73$
$\qquad n > 8\frac{1}{9}$

習題 1B 題解（續）

$$\text{第一個正數項} = T(9) = 9(9) - 73 = \underline{\underline{8}}$$

13. 設該序列的首項和公差分別是 a 和 d。

$$T(9) - T(3) = 42$$
$$\therefore\ (a + 8d) - (a + 2d) = 42$$
$$6d = 42$$
$$d = 7$$

(a) $T(21) - T(20) = d = \underline{\underline{7}}$

(b)
$$T(n) - T(20) = 105$$
$$[a + (n - 1)d] - (a + 19d) = 105$$
$$(n - 20)d = 105$$
$$(n - 20)(7) = 105$$
$$n - 20 = 15$$
$$\therefore\ n = \underline{\underline{35}}$$

14. (a) $a = 14$，$d = 2$

$$\therefore\ T(n) = 14 + (n - 1)(2) = 14 + 2n - 2 = 2n + 12$$

∴ <u>第 n 排有 $(2n + 12)$ 個座位。</u>

(b) 若 $T(n) = 28$，

則 $2n + 12 = 28$
$$2n = 16$$
$$n = 8$$

∴ <u>該演講廳共有 8 排座位。</u>

15. (a) 各排中紅玫瑰的數目形成一個等差序列，其中 $a = 1$ 和 $d = 3 - 1 = 2$。

$$\therefore\ T(n) = 1 + (n - 1)(2) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

$$T(101) = 2(101) - 1 = 201$$

∴ <u>第 101 排中有 201 朵紅玫瑰。</u>

(b) 在偶數排中白玫瑰的數目形成一個等差序列，其中 $a = 2$ 和 $d = 4$。

$$\therefore\ T(n) = 2 + (n - 1)(4) = 2 + 4n - 4 = 4n - 2$$

第 100 排中白玫瑰的數目等於該序列第 $\left(\frac{100}{2}\right)$ 項的值。

$$\therefore\ T(50) = 4(50) - 2 = 198$$

∴ <u>第 100 排中有 198 朵白玫瑰。</u>

習題 1C (第 15 頁)

選題指引

類型 **目的**

① 辨認等比序列。
② 求等比序列的某些項或公比。
③ 求等比序列的通項或未知項。
④ 求等比序列的項數。
⑤ 等比序列在日常生活中的應用。

類型	程度一題目	程度二題目
①	1	
②	2, 5	11, 12
③	3, 4, 6	8, 9
④	7	10
⑤		13, 14

習題 1C 題解（續）

1. (a) 兩個連續項的比

$= \frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = \frac{256}{64} = 4$

$\therefore$ 是，已知序列是等比序列，其中公比是 4。

(b) 兩個連續項的比

$= \frac{2}{-1} = \frac{-4}{2} = \frac{8}{-4} = \frac{-16}{8} = -2$

$\therefore$ 是，已知序列是等比序列，其中公比是 -2。

(c) $\because \frac{T(2)}{T(1)} = \frac{-9}{-3} \neq \frac{-54}{-27} = \frac{T(4)}{T(3)}$

$\therefore$ 否，已知序列不是等比序列。

(d) $\because \frac{T(2)}{T(1)} = \frac{25}{15} \neq \frac{35}{25} = \frac{T(3)}{T(2)}$

$\therefore$ 否，已知序列不是等比序列。

2. (a) $T(1) = 5$

$T(2) = 5(3) = 15$

$T(3) = 15(3) = 45$

$\therefore$ 該序列的首三項是 5，15 和 45。

(b) $T(1) = 8$

$T(2) = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

$T(3) = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

$\therefore$ 該序列的首三項是 8，4 和 2。

(c) $T(1) = 27$

$T(2) = 27\left(-\frac{1}{3}\right) = -9$

$T(3) = -9\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$

$\therefore$ 該序列的首三項是 27，-9 和 3。

(d) $T(1) = -9$

$T(2) = -9\left(-\frac{1}{9}\right) = 1$

$T(3) = 1\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{9}$

$\therefore$ 該序列的首三項是 -9，1 和 $-\frac{1}{9}$。

3. (a) $R = \frac{14}{7} = 2$

$\because a = 7，R = 2$

$\therefore T(n) = 7(2)^{n-1}$

(b) $R = \frac{-100}{-200} = \frac{1}{2}$

$\because a = -200，R = \frac{1}{2}$

$\therefore T(n) = -200\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(c) $R = \frac{-12}{4} = -3$

$\because a = 4，R = -3$

$\therefore T(n) = 4(-3)^{n-1}$

(d) $R = \frac{-7\frac{1}{2}}{15} = -\frac{1}{2}$

$\because a = 15，R = -\frac{1}{2}$

$\therefore T(n) = 15\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

4. (a) 通項 $= 2(3)^{n-1}$

第 5 項 $= 2(3)^{5-1}$

$= 162$

(b) 通項 $= -4(2)^{n-1}$

$= -2^{n+1}$

第 5 項 $= -2^{5+1}$

$= -64$

習題 1C 題解（續）

(c) 通項 $= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}$

第 5 項 $= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{5-1}$

$= \underline{\underline{\frac{1}{162}}}$

(d) 通項 $= -0.25(-4)^{n-1}$

$= -\left(\frac{1}{4}\right)(-1)^{n-1}4^{n-1}$

$= \underline{\underline{(-1)^n 4^{n-2}}}$

第 5 項 $= (-1)^5 4^{5-2}$

$= \underline{\underline{-64}}$

5. 設該序列的首項和公比分別是 a 和 R。

$R = 2$ .... **(i)**

$T(5) = aR^4 = \frac{32}{3}$ .... **(ii)**

將 **(i)** 代入 **(ii)**，

$a(2)^4 = \frac{32}{3}$

$a = \frac{2}{3}$

$\therefore$ $\underline{該等比序列的首項是 \frac{2}{3}。}$

6. (a) 設該序列的首項和公比分別是 a 和 R。

$T(1) = a = 7$ .... **(1)**

$T(4) = aR^3 = 56$ .... **(2)**

將 **(1)** 代入 **(2)**，

$7R^3 = 56$

$R^3 = 8$

$R = 2$

$\therefore$ $T(n) = \underline{\underline{7(2)^{n-1}}}$

$T(8) = 7(2)^{8-1}$

$= \underline{\underline{896}}$

(b) 設該序列的首項和公比分別是 a 和 R。

$T(3) = aR^2 = 27$ .... **(1)**

$T(5) = aR^4 = 243$ .... **(2)**

$\frac{\textbf{(2)}}{\textbf{(1)}}$ ：$R^2 = 9$

$R = \pm 3$

將 $R = 3$ 代入 **(1)**，

$a(3)^2 = 27$

$a = 3$

將 $R = -3$ 代入 **(1)**，

$a(-3)^2 = 27$

$a = 3$

$\therefore$ 當 $R = 3$ 時，

$T(n) = 3(3)^{n-1}$

$= \underline{\underline{3^n}}$

當 $R = -3$ 時，

$T(n) = 3(-3)^{n-1}$

$= \underline{\underline{(-1)^{n-1}3^n}}$

當 $T(n) = 3^n$ 時，$T(8) = 3^8$

$= \underline{\underline{6\,561}}$

當 $T(n) = (-1)^{n-1}3^n$ 時，

$T(8) = (-1)^{8-1}3^8$

$= \underline{\underline{-6\,561}}$

7. (a) 首項 $= 1$

公比 $= \frac{3}{1} = 3$

$\therefore$ $T(n) = 1(3)^{n-1}$

$= 3^{n-1}$

若 $T(n) = 3^{11}$，

則 $3^{n-1} = 3^{11}$

$\therefore$ $n - 1 = 11$

$n = 12$

$\therefore$ $\underline{該序列有 12 項。}$

習題 1C 題解（續）

(b) 首項 $= -2$

公比 $= \frac{-4}{-2} = 2$

$\therefore\ T(n) = -2(2)^{n-1}$

$= -2^n$

若 $T(n) = -64$，

則 $-2^n = -64$

$2^n = 2^6$

$\therefore\ n = 6$

$\therefore$ 該序列有 6 項。

8. (a) 通項 $= \underline{\underline{3(2\sqrt{3})^{n-1}}}$

第 6 項 $= 3(2\sqrt{3})^{6-1}$

$= 3 \times 2^5 \times 3^{\frac{5}{2}}$

$= 3 \times 2^5 \times 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}$

$= \underline{\underline{864\sqrt{3}}}$

(b) 通項 $= \underline{\underline{\sqrt{3}(-2)^{n-1}}}$

第 6 項 $= \sqrt{3}(-2)^{6-1}$

$= \sqrt{3} \cdot (-1)^5 \cdot 2^5$

$= -2^5 \cdot \sqrt{3}$

$= \underline{\underline{-32\sqrt{3}}}$

(c) 通項 $= 1(x^2)^{n-1}$

$= \underline{\underline{x^{2n-2}}}$

第 6 項 $= x^{2(6)-2}$

$= \underline{\underline{x^{10}}}$

9. (a) 公比 $= \frac{3\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

$\because\ a = 3,\ R = \sqrt{2}$

$\therefore\ T(n) = \underline{\underline{3(\sqrt{2})^{n-1}}}$

(b) 公比 $= \frac{-\frac{4}{3}}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$

$\because\ a = 4,\ R = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ T(n) = \underline{\underline{4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}}$

(c) 公比 $= \frac{x^3}{x} = \underline{\underline{x^2}}$

$\because\ a = x,\ R = x^2$

$\therefore\ T(n) = x(x^2)^{n-1}$

$= \underline{\underline{x^{2n-1}}}$

10. (a) 首項 $= 9$

公比 $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore\ T(n) = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$= 3^2 \times \frac{1}{3^{n-1}}$

$= \frac{1}{3^{n-3}}$

若 $T(n) = \frac{1}{27}$，

則 $\frac{1}{3^{n-3}} = \frac{1}{27}$

$\frac{1}{3^{n-3}} = \frac{1}{3^3}$

$\therefore\ n - 3 = 3$

$n = 6$

$\therefore$ 該序列有 6 項。

習題 1C 題解（續）

(b) 首項 $= \frac{1}{81}$

公比 $= \dfrac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{81}} = -3$

$\therefore \quad T(n) = \frac{1}{81}(-3)^{n-1}$

若 $\quad T(n) = -3$，

則 $\quad \frac{1}{81}(-3)^{n-1} = -3$

$$(-3)^{n-1} = -243$$
$$(-3)^{n-1} = (-3)^5$$

$\therefore \quad n-1 = 5$

$$n = 6$$

$\therefore$ 該序列有 6 項。

11. (a) 設該序列的首項和公比分別是 a 和 R。

$T(1) = a = 16$ ....**(1)**

$T(5) = aR^4 = 81$ ....**(2)**

將 **(1)** 代入 **(2)**，

$16R^4 = 81$

$R^4 = \frac{81}{16}$

$R = \pm\frac{3}{2}$

$\therefore$ 所求的公比是 $\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$。

當 $R = \frac{3}{2}$ 時，

第 4 項 $= 16\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$= \underline{\underline{54}}$

當 $R = -\frac{3}{2}$ 時，

第 4 項 $= 16\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

$= \underline{\underline{-54}}$

(b) 設該序列的首項和公比分別是 a 和 R。

$T(2) = aR = 125$ ....**(1)**

$T(5) = aR^4 = -8$ ....**(2)**

$\frac{\textbf{(2)}}{\textbf{(1)}}$：$\frac{aR^4}{aR} = \frac{-8}{125}$

$R^3 = \frac{-8}{125}$

$R = -\frac{2}{5}$

$\therefore$ 所求的公比是 $-\frac{2}{5}$。

將 $R = -\frac{2}{5}$ 代入 **(1)**，

$a\left(-\frac{2}{5}\right) = 125$

$a = -\frac{625}{2}$

$\therefore$ 第 4 項 $= -\frac{625}{2}\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

$= \underline{\underline{20}}$

12. (a) 由於 $a+m$，$a+3m$，$a+11m$ 是一個等比序列的三個連續項，所以

$$\frac{a+3m}{a+m} = \frac{a+11m}{a+3m}$$
$$(a+3m)^2 = (a+11m)(a+m)$$
$$a^2 + 6ma + 9m^2 = a^2 + 12ma + 11m^2$$
$$2m^2 + 6ma = 0$$
$$2m(m+3a) = 0$$
$$m = 0 \text{ (捨去) 或 } -3a$$

$\therefore \quad m = \underline{\underline{-3a}}$

(b) 對於 $a \neq 0$，

公比 $= \frac{a+3m}{a+m}$

$= \frac{a+3(-3a)}{a+(-3a)}$

$= \frac{-8a}{-2a}$

$= \underline{\underline{4}}$