



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

杨 荣 郑文瑞 编著

概率论与数理统计 (第2版)

清华大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

杨 荣 郑文瑞 编著

概率论与数理统计 (第2版)

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要包括:随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析。

与本书配套的有习题课教材、教师用书、电子教案。本教材的编写遵循加强基础,强化应用,整体优化,注意后效的原则;注重数学在经济管理领域中的应用,选编了大量有关的例题与习题;具有结构严谨、逻辑清楚、循序渐进、结合实际等特点,可作为高等学校经管类、人文社科类及相关专业的教材或教学参考书。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨荣,郑文瑞编著. -- 2版. -- 北京:清华大学出版社, 2014
(经济管理数学基础)

ISBN 978-7-302-33669-3

I. ①概… II. ①杨… ②郑… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第206341号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

责任校对:刘玉霞

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市金元印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×230mm 印 张:21.75 字 数:412千字

版 次:2005年9月第1版 2014年2月第2版 印 次:2014年2月第1次印刷

印 数:1~3500

定 价:32.00元

产品编号:053434-01

“经济管理数学基础”系列教材编委会

主 任 李辉来

副主任 孙 毅

编 委 (以姓氏笔画为序)

王国铭 白 岩 术洪亮 孙 毅

刘 静 李辉来 张旭利 张朝凤

陈殿友 杨 荣 杨淑华 郑文瑞

“经济管理数学基础”系列教材总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学。在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”具备了更丰富的内涵和更广泛的外延。数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大展身手，产生了前所未有的推动力。

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用。数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模。数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的。微积分、线性代数等是建立确定性模型的基本数学工具。第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性。概率论、数理统计和随机过程是建立随机性模型的基本数学方法。第三类为模糊性模型，即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性。模糊数学理论是建立模糊性模型的基本数学手段。

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程，它们都是必修的重要基础理论课。通过学习，学生可以掌握这些课程的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础。在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力。

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程。为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与主教材配套的电子教案和教师用书（习题解答）。该系列教材内容涵盖了教育部大学数学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面向21世纪课程”教材和国家“十五”规划教材的成果，同时也凝聚了作者们多年来在大学数学教

学方面积累的经验. 本系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性, 注意体现时代的特点, 本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则, 力争做到科学性、系统性和可行性的统一, 传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际, 通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合, 突出数学的应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源, 提高学生的数学人文素养, 使数学思维延伸至一般思维. 总之, 本系列教材体现了现代数学思想与方法, 建立了后续数学方法的接口, 考虑了专业需求和学生动手能力的培养, 并使教材的系统性和文字简洁性相统一.

在教材体系与内容编排上, 认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求, 对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容, 其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授.

“经济管理数学基础”系列教材中主教材在每节后面都配备了习题, 有的主教材在每章后面还配备了总习题, 其中(A)题是体现教学基本要求的习题, (B)题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题的参考答案, 供读者参考. 该系列教材中的习题课教程旨在帮助学生全面、系统、深刻地理解、消化主教材的主要内容, 使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识, 并综合运用所学知识分析、处理和解决经济管理及相关领域中的某些数学应用的问题. 每章首先概括主要内容和教学要求, 继之进行例题选讲、疑难问题解答, 有的章节还列出了常见错误类型分析, 最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示.

自本教材问世以来, 许多同行提出了许多宝贵的意见, 结合我们在吉林大学的的教学实践经验, 以及近年来大学数学课程教学改革成果, 我们对本系列教材进行了修订、完善. 本次修订的指导思想是: ①突出数学理论方法的系统性和连贯性; ②加强经济管理的实际应用的引入和数学建模解决方法的讲述; ③文字力图简洁明了, 删繁就简; ④增加了实际应用例题和习题.

在本系列教材的编写过程中, 吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持, 吉林大学公共数学教学与研究中心吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

“经济管理数学基础”系列教材编委会

2013年8月

前 言

经济管理数学基础《概率论与数理统计》自 2005 年 8 月出版以来,受到了同行专家、广大同学以及读者的广泛关注,对本教材提出了许多宝贵的意见. 针对上述意见,结合我们在吉林大学的的教学实践和教学改革以及大学数学教育发展的需要,我们对本教材进行了修订、完善.

根据本次修订的指导思想,考虑到广大读者考研的需要,我们对每一章都进行了适当的修改,以更加符合考研大纲的要求. 重点修订了行文体例和文字叙述,增加了实际应用例题和习题.

本次修订工作 1~5 章由杨荣教授负责,6~10 章由郑文瑞教授完成,全书由杨荣统稿. 考虑到数理统计在内容上的完整性,我们介绍了加“*”号的 9,10 章,这部分内容可供有需要的学生在今后的学习中参考使用. 在本教材的修订过程中,得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院和清华大学出版社的大力支持和帮助,吴晓俐女士承担了本教材修订的编务工作,在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中的错误和不当之处,敬请读者批评指正.

编 者

2013 年 12 月

第 1 版前言

本书是依据经济类、管理类、人文社科类专业对概率论与数理统计课程的教学要求而编写的。

本书着眼于对工程实践与经济活动作定量分析与预测的实际需要,着重阐明了概率统计的基本理论与常用的统计方法。概率论与数理统计的内容涉及到实变函数与测度论,但考虑到经济管理类数学课程的要求与特点,本书仅以普通的微积分和少量线性代数知识为基础,有些概念的引入和某些定理(如中心极限定理)的证明进行了简化处理。在编写时,力求突出重点,对基本概念、重要公式和定理注重其实际意义的解释说明,力求通俗易懂。书中大多数例题和习题都体现了经济管理的特色,让学生更多地见识应用数学知识和方法解决经济问题的实例,增强他们的应用意识,提高分析问题、解决问题的动手能力。

本书共分 10 章,内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析。第 1~5 章由杨荣编写,第 6~10 章由郑文瑞编写。研究生王军林、朱复康、杨旭辉、陈明杰、高懿、徐忠海及姜政毅完成了本书的排版及制图的全部工作。清华大学林元烈教授审阅了全书。

由于水平有限,书中的错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正,以期不断完善。

作 者

2005 年 8 月



清华大学出版社 教学资源支持

尊敬的老师：您好！

为了更好地开展教学工作，提高教学质量，我们将通过两种方式为您提供与教材配套的教学资源。

方式一：请您登录清华大学出版社教师服务网：
<http://www.wqbook.com/teacher> 清华大学教师服务网是隶属于清华大学出版社数字出版网“文泉书局”的频道之一，将为各位老师提供高效便捷的免费索取样书、电子课件、申报教材选题意向、清华社各学科教材展示、试读等服务。

方式二：请您完整填写如下教辅申请表，加盖公章后传真给我们，我们将会为您提供与教材配套的教学资源。

主教材名					
作者		ISBN			
申请教辅资料					
申请使用单位	(学校) (院系) (课程名称) (学期) 采用本教材 册				
主讲教师	姓名		电话		
	通信地址			邮编	
	e-mail		MSN/QQ		
声明	保证本材料只用于我校相关课程教学，不用本材料进行商业活动				
您对本书的意见			系/院主任：_____（签字） (系 / 院办公室章) ____年__月__日		

编辑联系方式：100084 北京市海淀区双清路学研大厦

清华大学出版社理工分社 佟丽霞

1-62770175-4156 邮箱：tonglx@tup.tsinghua.edu.cn

目 录

第 1 章 随机事件与概率	1
1.1 随机事件	1
1.1.1 随机现象	1
1.1.2 随机试验与随机事件	1
1.1.3 随机事件的关系和运算	3
1.2 随机事件的频率与概率	7
1.2.1 频率	7
1.2.2 概率	8
1.2.3 古典概型	11
1.2.4 几何概型	16
1.3 条件概率	18
1.3.1 条件概率与乘法公式	18
1.3.2 全概率公式	22
1.3.3 贝叶斯公式	23
1.4 事件的独立性	25
1.5 伯努利概型	29
习题 1	31
第 2 章 随机变量及其概率分布	35
2.1 随机变量及其分布函数	35
2.1.1 随机变量	35
2.1.2 随机变量的分布函数	36
2.2 离散型随机变量及其概率分布	39
2.2.1 离散型随机变量及其概率分布	39
2.2.2 几种常用的离散型随机变量及其分布	41
2.3 连续型随机变量及其概率密度	48
2.3.1 连续型随机变量及其概率密度	48
2.3.2 均匀分布和指数分布	52
2.4 正态分布	54
2.4.1 正态分布	54
2.4.2 标准正态分布	55

2.4.3 标准正态分布的上 α 分位点	59
2.5 随机变量的函数的分布	59
2.5.1 离散型随机变量的函数的分布	59
2.5.2 连续型随机变量的函数的分布	61
习题 2	64
第 3 章 多维随机变量及其概率分布	69
3.1 二维随机变量	69
3.1.1 二维随机变量及其分布函数	69
3.1.2 二维离散型随机变量及其概率分布	70
3.1.3 二维连续型随机变量及其概率密度	73
3.1.4 均匀分布和正态分布	77
3.2 边缘分布及随机变量的独立性	79
3.2.1 边缘分布	79
3.2.2 随机变量的独立性	83
3.3 条件分布	87
3.3.1 离散型随机变量的条件分布	87
3.3.2 连续型随机变量的条件分布	89
3.4 两个随机变量的函数的概率分布	91
3.4.1 二维离散型随机变量的函数的分布	92
3.4.2 二维连续型随机变量的函数的分布	94
3.5 n 维随机变量	102
习题 3	105
第 4 章 随机变量的数字特征	110
4.1 数学期望	110
4.1.1 数学期望的概念	110
4.1.2 随机变量函数的数学期望	114
4.1.3 数学期望的性质	117
4.2 方差	120
4.2.1 方差及其计算公式	120
4.2.2 方差的性质	125
4.2.3 随机变量的标准化	126
4.3 协方差与相关系数	126
4.3.1 协方差	127

4.3.2 相关系数	128
4.4 矩	132
4.4.1 原点矩和中心矩	132
4.4.2 协方差矩阵	133
4.4.3 n 维正态分布	134
习题 4	136
第 5 章 大数定律及中心极限定理	141
5.1 大数定律	141
5.1.1 切比雪夫不等式	141
5.1.2 依概率收敛	142
5.1.3 大数定律	143
5.2 中心极限定理	145
5.2.1 依分布收敛	145
5.2.2 中心极限定理	146
习题 5	151
第 6 章 数理统计的基本知识	153
6.1 总体与样本	153
6.1.1 总体	153
6.1.2 样本	154
6.2 直方图与样本分布函数	155
6.2.1 直方图	155
6.2.2 样本分布函数	158
6.3 统计量及其分布	160
6.4 常用统计量的分布	166
6.4.1 χ^2 分布	166
6.4.2 t 分布	169
6.4.3 F 分布	172
习题 6	174
第 7 章 参数估计	177
7.1 参数的点估计	177
7.1.1 矩估计法	177
7.1.2 最大似然估计法	180
7.2 估计量的评选标准	187
7.2.1 无偏性	187

7.2.2 有效性	191
7.2.3 一致性	191
7.3 参数的区间估计	193
7.4 正态总体均值与方差的区间估计	194
7.4.1 单个正态总体均值与方差的区间估计	194
7.4.2 两个正态总体均值差与方差比的区间估计	198
7.4.3 单侧置信区间	203
7.4.4 大样本置信区间	205
习题 7	206
第 8 章 假设检验	211
8.1 假设检验的基本概念	211
8.2 单个正态总体的参数假设检验	214
8.2.1 单个正态总体均值的假设检验	215
8.2.2 单个正态总体方差的假设检验	218
8.3 两个正态总体的参数假设检验	222
8.3.1 两个正态总体均值差的假设检验	222
8.3.2 两个正态总体方差比的假设检验	224
8.4 非参数假设检验	227
8.5 其他分布参数的假设检验	233
8.5.1 指数分布参数的假设检验	233
8.5.2 二项分布参数的假设检验	234
8.5.3 泊松分布参数的假设检验	236
习题 8	238
*第 9 章 回归分析	242
9.1 一元线性回归分析	242
9.1.1 回归分析的基本概念	242
9.1.2 常数 a, b 的最小二乘估计	243
9.1.3 回归系数的显著性检验和置信区间	250
9.1.4 预测与控制	255
9.2 可线性化的非线性回归方程	259
9.3 多元线性回归分析	264
习题 9	269

*第 10 章 方差分析	272
10.1 单因素试验的方差分析	272
10.2 双因素试验的方差分析	278
10.2.1 无交互作用的双因素试验的方差分析	279
10.2.2 有交互作用的双因素试验的方差分析	283
习题 10	290
习题参考答案	292
附表	308
参考文献	331

第 1 章 随机事件与概率

概率论是研究随机现象的统计规律的学科,是统计学的理论基础.事件和概率是概率论中最基本的两个概念.本章重点介绍概率论的两个最基本概念:随机事件及其概率.主要内容包括:随机试验、样本空间、随机事件的频率与概率、条件概率以及事件的独立性等概率论中的最基本概念.介绍古典概型和几何概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式及二项概率公式等计算概率的基本公式.这些内容是进一步学习概率论的基础.

1.1 随 机 事 件

1.1.1 随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象,一类是在一定条件下必然发生的现象,称为**确定性现象**.例如,在没有外力作用下,作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动;人从地面向上抛起的石块经过一段时间必然落到地面;在标准大气压下,水加热到 100°C 必然会沸腾;等等.

另一类现象是在一定条件下可能发生也可能不发生的现象,称为**随机现象**.例如,投掷一枚硬币,我们不能事先预知将出现正面还是反面;投掷一枚骰子出现的点数也不能预知;从一大批产品中任取一个产品,这个产品可能是正品,也可能是废品,其结果带有偶然性.但人们通过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性.概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象这种规律性的一门数学学科.其理论和方法被广泛地应用于自然科学、社会科学、工程技术和经济管理等诸多领域.

1.1.2 随机试验与随机事件

为了研究和揭示随机现象的统计规律性,我们要对随机现象进行大量重复观察.我们把观察的过程称为试验,满足下列条件的试验称为**随机试验**,本书以下简称**试验**.一般地,一个随机试验要求满足下列条件:

- (1) 可重复性: 试验可以在相同条件下重复进行多次,甚至进行无限多次;
- (2) 可观测性: 每次试验的结果具有多种可能性,并能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 随机性: 试验之前不能准确预言该次试验将出现哪一种结果.

我们用 E 表示一个试验, 用 ω 表示随机试验 E 的最基本的结果, 称为**样本点**, 用 $\Omega = \{\omega\}$ 表示随机试验 E 的最基本结果的集合, 称为**样本空间**或**基本空间**.

例 1.1.1 在投掷一枚硬币观察其出现正面还是出现反面的试验中, 有两个样本点: 正面、反面. 样本空间为 $\Omega = \{\text{正面}, \text{反面}\}$. 记 $\omega_1 = \text{“正面”}$, $\omega_2 = \text{“反面”}$, 则样本空间可表示为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 1.1.2 投掷一枚骰子, 观察出现的点数, 则基本结果是“出现 i 点”, 分别记为 $\omega_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, 则试验的样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

例 1.1.3 将一枚硬币抛掷两次, 观察正面出现的次数, 记为 $\omega_i (i = 0, 1, 2)$, 则样本空间为

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}.$$

也可简记为 $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

例 1.1.4 记录某电话台在一分钟内接到的呼叫次数, 则样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

例 1.1.5 测量某一零件的长度, 考察其观测结果与真正长度的误差, 样本空间可取作 $[-M, M]$, 其中 M 为最大误差. 如果无法确定这一最大值, 将 Ω 取作 $(-\infty, +\infty)$ 也可.

对于随机现象, 我们关心的通常是在随机试验中某一结果是否会出现, 或会出现什么结果, 这些结果称为**随机事件**. 习惯上, 用大写字母 A, B, C 等表示.

例如在例 1.1.2 中, 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 如果以 A 表示“得到的为偶数点”, 则显然 $A = \{2, 4, 6\}$, B 表示“得到的点数大于等于 3”, 则 $B = \{3, 4, 5, 6\}$. 这里 A, B 均为随机事件, 它们都由 Ω 中的若干个样本点所构成.

由此可见, 准确地讲, **随机事件**是由若干个样本点组成的集合, 或者说是样本空间的子集. 称某个事件 A 发生, 当且仅当该事件所包含的某个样本点出现.

由一个样本点组成的事件, 称为**基本事件**. 样本空间 Ω 本身也是 Ω 的子集, 它包含 Ω 的所有样本点, 在每次试验中 Ω 必然发生, 称为**必然事件**. 空集 $\emptyset$ 也是 Ω 的子集, 它不包含任何样本点, 在每次试验中都不可能发生, 称为**不可能事件**.

例 1.1.6 在抛掷一枚骰子的实验中, 分别记“点数是 1”为 A , “点数是偶数”为 B , “点数大于等于 2”为 C , “点数大于 6”为 D , “点数小于等于 6”为 F , 则 $A = \{1\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $D = \emptyset$, $F = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

在一个样本空间中, 如果只有有限个样本点, 则称它为**有限样本空间**; 如果有无限多个样本点, 则称它为**无限样本空间**. 例 1.1.1 ~ 例 1.1.3 中的样本空间都是有限样本空间, 在例 1.1.4 和例 1.1.5 中的样本空间都是无限样本空间.

1.1.3 随机事件的关系和运算

在一个随机试验中, 一般有很多随机事件. 为了通过对简单事件的研究来掌握比较复杂的事件的规律, 需要研究事件的关系及事件的运算. 由于事件是样本空间的子集, 因此事件的关系及运算与集合的关系及运算是相互对应的. 关键是要理解事件的关系及运算的概率含义.

在以下的讨论中, 假定 Ω 是试验 E 的样本空间, 所论及的事件都是同一试验 E 的事件.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事件 B **包含** 事件 A , 或称事件 A **包含于** 事件 B , 或称事件 A 是事件 B 的子事件, 记作

$$B \supset A \quad \text{或} \quad A \subset B.$$

易知, 对任意事件 A , 有

$$\emptyset \subset A \subset \Omega.$$

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B , 事件 B 也包含事件 A , 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记作 $A = B$. 事件 A 与事件 B 相等, 表明 A 和 B 是样本空间的同一子集.

3. 事件的并 (或和)

如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**并或和**, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{A \text{ 发生或 } B \text{ 发生}\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

在例 1.1.6 中, $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$.

事件 A 和事件 B 作为样本空间 Ω 的子集, 事件 $A \cup B$ 就是子集 A 与 B 的**并集**.

4. 事件的交 (或积)

如果事件 A 和事件 B 同时发生, 则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**交或积**, 记作 $A \cap B$ 或 AB , 即

$$A \cap B = \{A \text{ 发生且 } B \text{ 发生}\} = \{\omega | \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

在例 1.1.6 中, $B \cap C = \{2, 4, 6\}$.