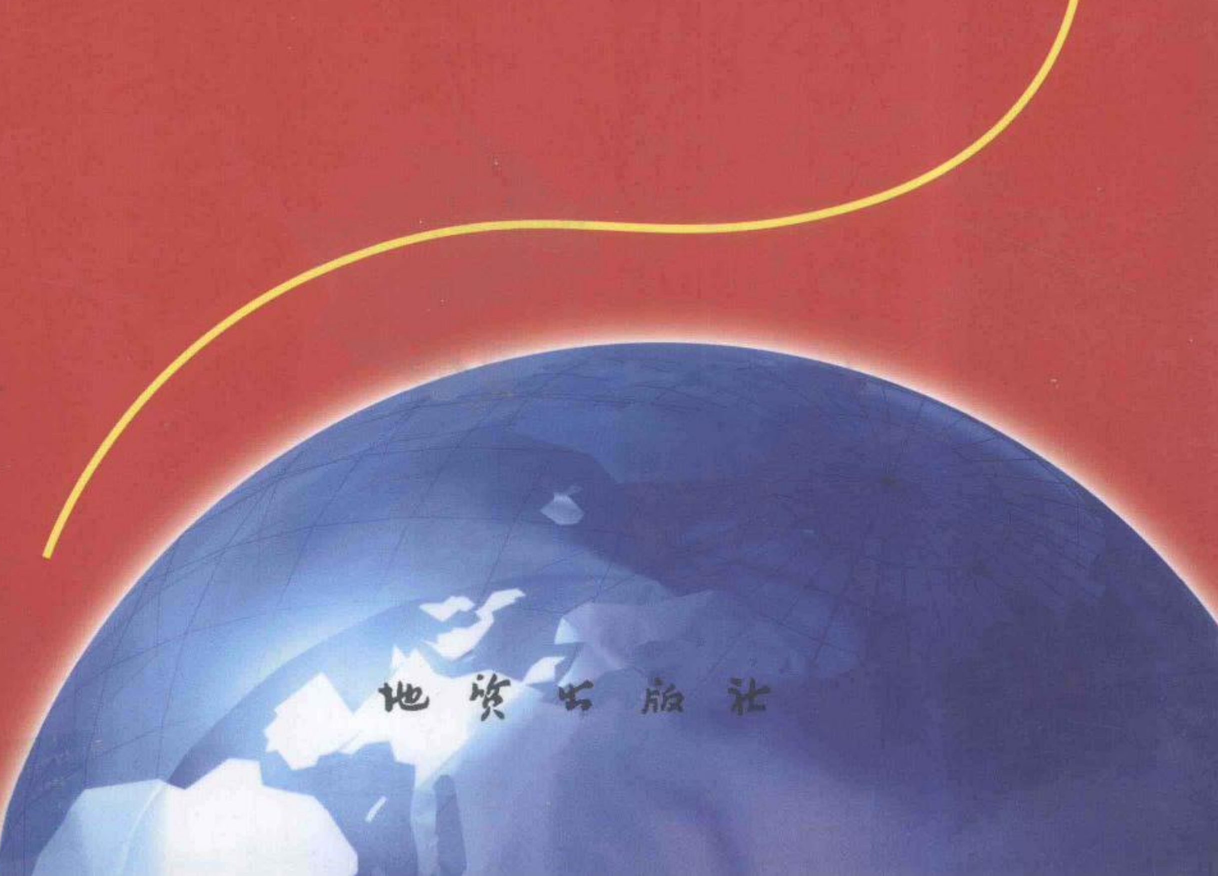
地震波传播理论与应用

位移函数地震波在界面的广义散射

WEIYI HANSHU DIZHENBO ZAI JIEMIAN DE GUANGYI SANSHE

牛滨华　孙 晟　孙春岩 著



地质出版社

研究生试用教材

中国地质大学（北京）研究生教材基金资助
国家自然科学基金委面上基金项目的资助

位移函数

地震波在界面的广义散射

牛滨华
孙　晟　孙春岩　著

地质出版社
·北　京·

内 容 提 要

波在界面的广义散射和Zoeppritz方程是地震学的基础和重要内容。本书讲述直角坐标系下Zoeppritz方程的基本理论和方程的多种表达形式等问题。基本理论主要有位移函数波动方程的边值定解问题，边值定解问题的求解，并得到解函数即Zoeppritz方程，Zoeppritz方程的分析及数值计算和解释等内容。多种表达形式问题主要有Zoeppritz方程的多样性、关联性和统一性，不同表达形式的Zoeppritz方程最终都会统一于表达形式相同的能量平衡方程。书中对各种问题的归纳和公式的导出都有详尽的阐述；涉及的Zoeppritz方程结构特点、递推规则、代表性方程等相关内容，均有系统的分析和综合。各章或以尾节或以单独的小结给出了本章内容要点。

阅读本书需要高等数学、线性代数、矩阵、场论矢量分析和弹性力学等方面的知识。本书关于波在界面的广义散射传播与Zoeppritz方程关系的讨论具有较好的系统性和综合性，可以作为地球物理学、勘查技术与工程以及各类有关专业本科生高年级和研究生的教材，本书也可以作为相关专业教师和科技人员教学科研的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

位移函数地震波在界面的广义散射/牛滨华等著.
—北京：地质出版社，2010.5
ISBN 978－7－116－06646－5

Ⅰ.①位… Ⅱ.①牛… Ⅲ.①地震波—泛函方程
Ⅳ.①P315.3

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第070238号

责任编辑：祁向雷　王春庆
责任校对：李　玫
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路31号，100083
电　　话：（010）82324508（邮购部）；（010）82324577（编辑室）
网　　址：http：//www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传　　真：（010）82310759
印　　刷：北京地质印刷厂
开　　本：787mm×1092mm 1/16
印　　张：17
字　　数：400千字
版　　次：2010年5月北京第1版·第1次印刷
定　　价：40.00元
书　　号：ISBN 978－7－116－06646－5

前　言

地震波遇界面产生的同类和转换反射、透射以及折射和全反射等现象可以称为波在界面的广义散射。这方面的内容是地震波传播理论和应用的重要组成部分。

波在界面的广义散射在传播本质上归结为求取波动方程边值定解问题的解函数。波动方程的边值定解问题分为位移和位移位两种表达形式，因此从求解的方式上可以分为“位移方法”和“位移位方法”。这两种形式的解函数除了表达形式略有差异外，在物理含义上具有一致性而且彼此之间也可以相互转换。本书的内容是“位移函数_地震波在界面的广义散射”，作者在另一本书中专门讲述“位移位函数_地震波在界面的广义散射”（地质出版社，2008）。这两本书对于认识地震波在界面的广义散射具有并行匹配的功能作用。

位移函数_地震波在界面的广义散射主要内容是 Zoeppritz 方程方法，所有问题的展开都是基于位移函数的地震波，因此可以称为“位移方法”。位移方法讲究射线上体积元的偏振方式，这是与“位移位方法”的不同之处。本书完整地阐述求取自由界面和弹性界面波动方程边值定解问题解函数的方法和过程，关注 Zoeppritz 方程表达形式的多样性、关联性和一致性并对这三者之间的关系进行了必要的剖析解释。

本书内容的框架结构

针对弹性界面和自由界面两种情况，全书共有十章。前面六章是弹性界面内容，第 7 章是自由界面内容。作为前面章节内容的自然延续，第 8 章是 Zoeppritz 方程 AVO 近似公式简介，第 9 章是含气储层 AVO 分析；第 8 和第 9 这两章内容也可以视为 Zoeppritz 方程（和 Knott 方程）理论在应用方面基本内容的介绍。本书最后的附录即第 10 章是为方便读者阅读本书所提供的地震波理论方面的必备知识。

第 1 章是 Zoeppritz 方程的基本问题。本章内容是后续章节内容的基础。首先是位移函数形式的波动方程的边值定解问题。其次是射线与坐标系之关系，这种关系表现在平面波法向矢量（即射线）与坐标系的关系，以及射线上体积元的偏振矢量与坐标系下位移矢量的关系；这些关系均涉及到“位移

方法”细节问题。最后是经典的Zoeppritz方程以及在此基础上总结提炼的具有普遍性的“Zoeppritz方程递推规则”。

第2章是Zoeppritz方程与坐标系。本章着重考察选择不同的坐标系与Zoeppritz方程表达形式的关系。从位移波动方程的边值定解问题出发，在物理和勘探两种坐标系中采用指定的偏振方式，考虑P波和SV波在四个象限分别入射界面时的Zoeppritz方程。对这两种坐标系中得到的Zoeppritz方程进行比较分析；结果表明，Zoeppritz方程的表达形式与坐标系的选择没有必然的关系。

第3章和第4章分别是非混合偏振的Zoeppritz方程和混合偏振的Zoeppritz方程。这两章内容突出Zoeppritz方程表达形式的多样性和关联性。多样性表现在P波和SV波偏振方式的多种变化和组合，由此得到不同条件下的多种形式的Zoeppritz方程。另一方面，每章最后一节都着重剖析了这些方程之间的关联性，关联性表现在各种不同条件下得到的Zoeppritz方程均可以用“代表性方程”和“独立性方程”加以概括。

第5章是波在弹性界面广义散射的能量方程。本章内容突出表明Zoeppritz方程多种表达形式的一致性。首先是Zoeppritz方程与Knott方程的关系，即Zoeppritz方程与Knott方程之间可以彼此相互转换。然后是波在弹性界面广义散射的能量平衡方程，其中分别考虑了P波和SV波各自分别下行入射和上行入射界面的情况。结果表明不同表达形式的Zoeppritz方程（以及Knott方程）最终都会统一于表达形式相同的能量方程。因此，从这个意义上讲，本书不可能也没有必要把所有不同表达形式的Zoeppritz方程全部列举出来。

第6章是（弹性界面）Zoeppritz方程的数值计算。Zoeppritz方程与Zoeppritz方程的数值计算是密不可分的整体，本章针对第3章和第4章中具有一定代表性的Zoeppritz方程进行了数值计算。通过对数值计算曲线的分析解释，可以加深对Zoeppritz方程结构特点、偏振方式、递推规则以及代表性方程和独立性方程等内容的认识和理解。本章选择方程的数值计算仅考虑临界角以内的情况，不涉及其他复杂特殊的情况。

第7章是自由界面的Zoeppritz方程。这部分内容是Zoeppritz方程的重要组成部分。本章内容可以视为前面章节即弹性界面之内容在“自由界面的表现”。一个半空间较之两个半空间，Zoeppritz方程无论在复杂性和多样性上都相对简单一些。但是，自由界面有着自身的特殊性和重要性，仍然需要给以足够的重视。

第8章是Zoeppritz方程的AVO近似公式简介，第9章是含气储层AVO分析。这两章是前面章节内容的自然延续，也是Zoeppritz方程理论在应用方

面的具体表现。AVO（Amplitude Versus Offset）是 Zoeppritz 方程精确解的近似公式，AVO 分析的基本功能就是利用 AVO 近似公式中所含有的纵横波速度和密度这些弹性参数解疑岩石的物理弹性特征，进而进行储层识别和储层含油气属性的分析解释，为油气能源或其他目的的勘探提供信息支撑。这两章内容仅是初步简单的介绍，有关读者可以阅读这方面的其他文献资料。

致谢

本书由牛滨华同志负责整体撰写，孙晟同志对全书的主要公式进行了推导并对有关文字内容的组合和文稿质量的保证做出了重要工作，孙春岩同志对第 1 章和附录以及全书的章节结构及其文字加工做出了贡献。感谢中国地质大学（北京）研究生院对本书出版的大力资助；本书编写得到国家自然科学基金委面上基金 49974028 和 40474043 项目的资助，书中有关内容也与基金项目的研究内容密不可分，对基金项目给予的资助表示衷心的感谢；真诚地感谢地下信息探测技术与仪器教育部重点实验室（中国地质大学，北京）；真诚地感谢同济大学海洋地质地球物理国家教委重点实验室。特别要感谢杨宝俊教授、高锐研究员、张中杰教授、于晟研究员对作者工作一贯的支持以及对作者撰写本书给予的真诚鼓励和具体帮助。作者还要感谢本书所用参考文献的各位学者和专家。

孙月成同志对第 8 章的文稿内容的搜集整理方面提供了积极的支持，晏信飞同志对第 9 章的文稿提供了帮助。晏信飞、姜虹、李迎秋、潘海滨、李阿伟、闫国英和张萌萌为本书出版的有关图件、文字审校等方面都做出了宝贵的工作。本书的文字及公式校对工作，周杰、尹昕忠、沈杰、郭允、郭继亮、邹荃、刘思思、涂丹丹、许福萍、贾冀辉和李萌等同志都付出了辛勤劳动并提出过宝贵意见。作者对他们表示衷心的感谢。由于作者水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

作者　于北京

2009 年 8 月

绪 论

地震波遇界面产生同类和转换反射、透射以及折射和全反射等现象可以称为地震波在界面的广义散射[1~4,8]。这方面的内容是地震波传播理论和应用的重要组成部分，在油气、水合物等能源地震勘探开发领域具有广泛的应用。首先，结合地震波在界面广义散射研究的发展概况简述我们的粗浅认识和思考；然后，针对研究地震波在界面广义散射研究中普遍使用的位移方法和位移位方法，阐述位移函数与位移位函数的关系，这种关系需要从物理场论的位移与位移位之间关系的理论中得到认识和理解；最后，是位移函数地震波在界面广义散射的基本内容，包含位移函数波动方程的边值定解问题与 Zoeppritz 方程，Zoeppritz 方程与 Knott 方程彼此间的相互转换，地震波在界面广义散射的能量方程，Zoeppritz 方程与 AVO 近似公式及其分析方法，以及其它相关的问题。

1 地震波在界面广义散射研究的发展简况

波在自由界面和弹性界面广义散射的研究包含两个层面：一个是波动方程加上界面条件的边值定解问题，另一个就是边值定解问题的求解。简言之，地震波在界面的广义散射就是确定波动方程满足的边值定解问题并求解该问题的解函数。

边值定解问题有位移和位移位两种表达形式，由此也存在两种研究方式。其中采用位移波函数研究的可以统称为**“位移方法”**，这种方法的典型代表是 Zoeppritz 方程；而采用位移位波函数研究的可以统称为**“位移位方法”**，这种方法的典型代表是 Knott 方程，位移位方法本身又可以分为 Knott 和非 Knott 两种具体的情况。位移和位移位两种方法在物理内涵上是一致的，但也存在着数学解法方面的差异。

1.1 矢量波场的纵波和横波波场的分解

弹性波场中纵波和横波概念的提出：矢量地震波场即弹性波场中纵波和横波的分解在地震波理论和应用发展中具有划时代的意义。矢量波场的纵波和横波波场的分解等价于矢量位移的标量位移位和矢量位移位的分解。

现有的地震波理论和应用成果表明，弹性波（或地震波）传播的研究与物理学中光波和声波的研究密不可分[1~4,8]。Poisson（泊松）在 19 世纪 20 年代首先提出了弹性介质中同时存在纵波和横波的概念，并建立了“泊松介质”；Poisson 还证明了位移运动方程中可以由两个位移分量之和表示；其中之一是标量位（即标量势）函数的梯度，它满足纵波的波动方程；另一个是位移矢量中的涡旋（即旋度）函数，它满足横波的波动方程。Poisson 的关于波动方程的通解中没有明确包含涡旋场位移分量的“矢量位”函数。Lamé（拉梅）1852 年首先完整地利用标量位和矢量位表述了波动方程的通解，后人称这样的解为 Lamé 解；在电磁场理论的研究中 Helmholtz（亥姆霍兹）对矢量场的分解也做出过同样

的贡献。经过半个世纪之后，1906 年日本的地震学创始人 F. Omori（大森房吉）利用当时世界上最好的地震台网观测到了地壳固体介质中存在的纵波和横波，用实际观测的地震数据证实了 Poisson 和 Lamé 等人理论研究成果的正确性。

地震波理论关于矢量地震波场分解的完整表述是，位移矢量可以分解为标量位移位的梯度和矢量位移位的旋度，或者说矢量波动方程可以分解为标量位移位满足的纵波波动方程和矢量位移位满足的横波波动方程。这种理论表明了地震波在界面广义散射的边值定解问题及其求解等相关问题的研究存在位移和位移位两种基本方式。

1.2 地震波在界面的广义散射

地震波在界面广义散射的研究无论是采用位移方式还是位移位方式，前人都进行了广泛而卓有成效的研究，这些成果极大地丰富和完善了地震波的理论和实践。

George Green（格林）于 1839 年首先针对自由界面试图用弹性波解释光的反射和折射，在细节上类似现代的平面波在界面的广义散射分析；但是，Green 没有完成两个半空间不同弹性介质界面上波的反射和透射的进一步研究。波在两个半空间弹性界面的深入研究是 Knott（诺特）在 1899 年和 Zoeppritz（佐普里兹）在 1901 年分别独立地完成的，这就是今天大家所熟知的 Knott 方程和 Zoeppritz 方程。Rayleigh（瑞雷）1887 年从理论上推导了面波的存在即现在所称的 Rayleigh 面波，这种面波是一对平面谐波（P 波和 SV 波）在弹性半空间表面平行入射时产生的。Horace Lamb（兰姆）1904 年研究了固体半空间自由表面上点脉冲震源定解问题的精确解，这实质上是球面波的反射和折射问题；对分界面上的此类问题，后来人们统称为“Lamb 问题”；其后的研究结果表明，自由表面点源发射的球面波可以表示为平面波的叠加（Weyl）和作为柱面波的叠加（Sommerfeld 即索莫菲积分）。Love（拉夫）于 1911 年在研究表层对瑞雷面波传播的影响时，发现了另一种面波；这就是当覆盖层的横波速度小于下伏层的横波速度时，在这两种介质的分界面上可以产生 SH 型的面波。Stoneley（斯通利）在 1924 年推导出介质内部弹性分界面附近存在 Stoneley 面波即 Rayleigh 型面波。Rayleigh 和 Love 面波在天然和人工地震（陆上自由表面）观测中普遍存在，而 Stoneley 面波仅在井中才能观测到。

1.3 回顾中的认识和思考

回顾并剖析波在界面广义散射研究的发展进程可以引出许多有价值的思考。

首先是矢量弹性波场中纵波和横波概念的提出，由此表明位移和位移位都是表征地震波传播的基本物理量。学者 Lamé 建立了位移矢量与位移位的关系，Lamé 方程的提出对地震波理论发展做出了重要贡献，为纵波和横波概念的建立，特别是实际地球探测中纵波和横波的识辨以及提取奠定了扎实的理论基础。

其次是运用地震波场的位移函数和位移位函数开展波在界面上广义散射的研究，典型的代表有，位移形式的 Zoeppritz（佐普里兹）方程和位移位形式的 Knott（诺特）方程，其中前者的边值定解问题基于位移函数，而后者的边值定解问题基于位移位函数。位移位函数的引入以及位移与位移位关系的确立完善了地震波场的理论，拓展了波在界面广义散射研究的方法，也为地震波有关理论方法的研究提供了广泛的途径，特别是 20 世纪 70 年代基于纵波波动方程的地震波场偏移成像理论及其方法技术的研究发展。

现有的地震波理论和应用成果表明，地震波遇界面时大致存在以下几种情况：第一种是P或SV波在弹性界面正常入射时的反射和透射，这种反射和透射包含同类反射和透射以及异类（即转换）反射和透射，它们普遍遵循Snell定律。第二种情况是波在弹性界面产生复杂的反射和透射，例如P波或SV波等于或大于临界角入射以及广角反射等情况。第三种是界面的Rayleigh、Love和Stoneley面波。第四种是SH波在自由界面和弹性界面的广义散射。上述的许多重要成果都采用了位移位形式的波函数，例如自由界面的Rayleigh面波。

这里应该提及并探讨位移位函数的物理意义，这个问题可以从理论和应用两个层面考察。位移位函数在现有的地震波理论体系中具有重要的地位和不可或缺的作用，例如基于Lamé方程的矢量波场中纵波和横波波场的分解，波在界面广义散射的Knott方程等。另一方面把弹性波场与电场类比可以知道，电场中的电场矢量和电势函数能够分别对应弹性波场中的位移矢量和标量位函数，但是标量位函数不像电势函数那样具有明确的物理含义，因为在实际的地震波场中没有确切的物理量与标量位函数相对应，矢量位函数也存在类似的情况。

另一个值得关注的问题是Zoeppritz方程与Knott方程的关系。众所周知，实际地震资料处理中的AVO（振幅与偏移距的关系）和AVA（振幅与入射角的关系）商业化软件几乎都是采用位移形式的Zoeppritz方程或演变的方程，而不是位移位形式的Knott方程，这表明位移形式的Zoeppritz方程可以与陆上实际检波的位移物理量数据直接接轨（即记录数据的物理量与AVO处理中的物理量之间相一致)，给相关的数据处理和解释带来便利。但是也存在另外的情况，如海上自由表面地震数据是压力物理量，而AVO分析处理通常使用的却是位移形式的Zoeppritz方程，（即记录数据的物理量与AVO处理中的物理量两者之间并不一致)。事实上地震波理论已经证明了Zoeppritz方程与Knott方程可以彼此相互转换，这两个方程在地震波理论和应用中具有同样的重要地位和作用。

2 场论中位移与位移位关系的普遍理论

地震波在界面广义散射的研究存在位移和位移位两种基本方式，这里关键的问题是位移与位移位之间的关系。因此需要从场论的普遍理论出发进一步加深对矢量函数与位函数（即标量位函数和矢量位函数）之间关系的认识和理解。

标量场。空间区域D的每点M (x, y, z) 对应一个数量值 φ，它在此空间区域D上就构成一个标量场，用点M (x, y, z) 的标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 表示[9]。若M (x, y, z) 的位置用矢径 $\vec{r}$ 确定，则标量 φ 可以看作变矢 $\vec{r}$ 的函数即 $\varphi=\varphi(\vec{r})$。例如，温度场 $u(x, y, z)$，密度场 $\rho(x, y, z)$，电位场 $e(x, y, z)$ 都是标量场。

矢量场。空间区域D的每点M (x, y, z) 对应一个矢量值 $\vec{a}$，它在此空间区域D上就构成一个矢量场，用点M (x, y, z) 的矢量函数 $\vec{a}(x, y, z)$ 表示。若M (x, y, z) 的位置用矢径 $\vec{r}$ 确定，则矢量 $\vec{a}$ 可以看作变矢 $\vec{r}$ 的矢函数即 $\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$，或 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，例如，位移场 $\vec{u}(x, y, z)$、电场 $\vec{E}(x, y, z)$ 和磁场 $\vec{H}(x, y, z)$ 都是矢量场。

从场论和矢量分析知识知道，梯度算符∇作用到一个标量场φ则产生矢量场$\nabla\varphi$；散度算符$\nabla\cdot$作用到一个矢量场$\vec{\boldsymbol{a}}$则产生标量场$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$；旋度算符$\nabla\times$作用到矢量场$\vec{\boldsymbol{a}}$则产生矢量场$\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}$。

2.1 无散无旋场

无散无旋场从数学角度考虑也称为调和场，它满足，

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}=0 \text{ 和 } \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=0$$

由于$\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}=0$，则存在标量位函数$\varphi$（注：函数$\varphi$即$\varphi$（M）在数学场论中称为标量函数，在物理场论中称为标量位函数或标量势函数）使下式成立，

$$\vec{\boldsymbol{a}}=-\nabla\varphi$$

于是有，

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=-\nabla\cdot(\nabla\varphi)=-\nabla^2\varphi=0 \text{ 或 } \nabla^2\varphi=0 \tag{1}$$

所以这样的矢量场$\vec{\boldsymbol{a}}$（M）可以由标量位函数φ来描述，而φ满足**Laplace**（拉普拉斯1749~1827，法国天文学家、数学家）方程（1）式。例如，无源的电场和磁场。

2.2 有散无旋场

有散无旋场（即无旋有散场）也称为有源无旋场，它满足，

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=f \text{ 和 } \nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}=0$$

其中，f为一数量函数。由于$\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}=0$，则存在标量位函数$\varphi$使下式成立，

$$\vec{\boldsymbol{a}}=-\nabla\varphi$$

由此得到，

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=\nabla\cdot(-\nabla\varphi)=f$$

即

$$\nabla^2\varphi=-f \tag{2}$$

所以矢量场$\vec{\boldsymbol{a}}$（M）也可以由标量位函数φ来描述，并且φ满足**Poisson**（泊松）方程（2）式。例如，有源的电场和磁场。

2.3 无散有旋场

无散有旋场（即有旋无散场）也称为无源有旋场，它满足，

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=0 \text{ 和 } \nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}\neq 0$$

由于$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=0$并从矢量场的定义可知，这时存在矢量位函数$\vec{\psi}$（注：函数$\vec{\psi}$即$\vec{\psi}$（$M$）在数学场论中称为矢量函数，在物理场论中称为矢量位函数或矢量势函数）使下式成立，

$$\vec{\boldsymbol{a}}=\nabla\times\vec{\psi} \text{ 和 } \nabla\cdot\vec{\psi}=0$$

于是

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{a}}=\nabla\times(\nabla\times\vec{\psi})=\vec{\boldsymbol{b}}\neq 0$$

再由公式$\nabla\times(\nabla\times\vec{\psi})=\nabla(\nabla\cdot\vec{\psi})-\nabla^2\vec{\psi}$，得到，

$$-\nabla^2\vec{\psi}=\vec{\boldsymbol{b}} \tag{3}$$

说明这时的矢量场$\vec{\boldsymbol{a}}$（M）可用另一个矢量位函数$\vec{\psi}$来描述，且$\vec{\psi}$也满足**Poisson**（泊松）

方程（3）式。

2.4 有散有旋场

有散有旋场也称为有旋有源场，它满足

$$\nabla\times\vec{a}\neq 0 \text{ 和 } \nabla\cdot\vec{a}\neq 0$$

这是**最一般的矢量场（注意**：从数学场论角度考虑，也把最一般的场称为无散无旋场），这样的场可以分解为有旋场和有散场两部分之和，即

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$$

其中，$\vec{a}_1$ 满足无旋场即 $\nabla\times\vec{a}_1=0$，$\vec{a}_2$ 满足无散场即 $\nabla\cdot\vec{a}_2=0$。于是，对 $\vec{a}_1$ 存在标量位函数 φ 使 $\vec{a}_1=-\nabla\varphi$ 成立，对 $\vec{a}_2$ 存在矢量位函数 $\vec{\psi}$ 使 $\vec{a}_2=\nabla\times\vec{\psi}$ 成立。因此，有散有旋场可以又表达为

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi} \tag{4a}$$

若取 $\vec{a}_1=\nabla\varphi$ 和 $\vec{a}_2=\nabla\times\vec{\psi}$ 成立，上式还可以写成

$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi} \tag{4b}$$

上式就是有散有旋场的表达形式。注意有散有旋场的 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=-\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$ 与 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$ 两种表达形式没有本质性的差别，使用中注意前后一致就行了。

综上所述，基于场论中矢量函数与位函数的一般理论可以知道，弹性波场即地震波场是最一般的矢量场，位移矢量场 $\vec{u}$ 满足 **Lamé** 方程。从地震学考虑，Lamé 方程分为右手 $\vec{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$（即 $\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$）和左手 $\vec{u}=\nabla\varphi-\nabla\times\vec{\psi}$ 两种形式，其中标量位函数 φ 满足纵波的波动方程，矢量位函数 $\vec{\psi}$ 满足横波的波动方程。基于 Lamé 方程，可以把地震波传播理论中研究“位移函数”的问题等价地转化为研究“位移位函数”的问题，例如位移位形式的地震波在界面的广义散射，（标量位移位的）纵波波动方程的偏移成像。

3 位移函数波动方程的边值定解问题与 Zoeppritz 方程

位移函数波动方程的边值定解问题即这里所称的 Zoeppritz 方法，主要内容包含确立位移函数波动方程的边值定解问题、求取边值定解问题的解即 Zoeppritz 方程和讨论 Zoeppritz 方程的多种表达形式以及递推规则。

3.1 位移函数波动方程的边值定解问题

地震波在界面上的边值定解问题就是求解波动方程满足弹性界面连续条件下的解函数。该边值定解问题由波动方程和界面方程两部分组成；同时分为“位移函数”和“位移位函数”两种表达形式，其一是位移函数，其二是位移位函数。Zoeppritz 方程是基于位移函数的该边值定解问题得到的，**“Zoeppritz 方程”**是该边值定解问题的**“解函数”**。这部分内容参见第 1 章第 1 节。

边值定解问题的求解必须选择坐标系和平面波。这需要讨论了两个问题：一个是射线坐标系与观测坐标系的关系即平面波的法线矢量与坐标系的关系，另一个问题是射线上体积元的偏振方式与坐标系的关系。这部分内容请参见第 1 章第 2 节。

3.2 位移函数波动方程边值定解问题的求解

位移函数边值定解问题的求解，从数学上讲不存在障碍。具体求解过程参见第1章第3节。这个过程是，首先设定满足边值定解问题中波动方程的平面波函数，波函数包含入射、同类反射和透射以及转换反射和透射五个具体波，还要规定这些波射线上体积元的偏振方式；然后把设定的波函数代入边值定解问题中的界面方程，同时定义反射和透射系数，经整理后得到解函数就是对应的Zoeppritz方程。在二维直角坐标系，弹性界面的Zoeppritz方程是关于反射和透射系数的4阶线性代数方程组，自由界面的Zoeppritz方程是关于反射系数的2阶线性代数方程组。

需要注意二维直角坐标系的选择关系到平面波函数法向矢量的表示，进而会影响边值定解问题解函数的形式。另外入射和反射波射线上体积元的偏振方式也会影响解函数的形式。

求取边值定解问题可以得到几个有价值的方程。第一个是Snell方程。第二个是同类反射和透射系数以及转换反射和透射系数的定义方程。第三个是Zoeppritz方程。

包含经典Zoeppritz方程在内的，XOZ物理坐标系_射线上P波体积元为正向偏振和SV波体积元为右手偏振，P波从四个象限入射弹性界面的四个Zoeppritz方程，该内容请参见第1章第3节。

Zoeppritz方程的数值计算是Zoeppritz方程本身的外延内容，通过数值计算可以使人们认识和理解地震波在各种条件的弹性界面上散射的规律，使用者应该根据研究任务设计具体的参数并经计算得到合理正确的结果。

3.3 Zoeppritz方程的多种表达形式和递推规则

在理论和应用中Zoeppritz方程的多种表达形式是不能回避的一个重要基础问题。Zoeppritz方程的多样性、关联性和一致性是指Zoeppritz方程“表达形式”的多样性、关联性和一致性。多样性表明了Zoeppritz方程“表达形式”存在差异；关联性表明这些方程在一定“规则”下彼此之间可以相互转换；一致性表明不同表达形式的方程可以统一于表达形式相同的能量平衡方程。

整体上讲Zoeppritz方程存在多种表达形式有两个层面的因素：第一个层面因素是入射、反射及透射P波和SV波射线上“体积元偏振方式的多样性”；第二个层面因素是对于选择的二维坐标系均存在入射波分别从四个象限的入射方式。这方面的相关内容可以参见本书的第2章至第4章。

Zoeppritz方程的递推规则（具体参见第1章第4节）：

（1）**规则1_ 左右递推**

入射波在同一介质左侧和右侧入射界面时，所得两个Zoeppritz方程的系数矩阵中，与入射波同类的反射波和透射波系数同相，而与入射波异类的反射波和透射波系数反相（即符号相反）。

（2）**规则2_ 上下递推**

入射波在界面两侧介质下行和上行入射界面时，所得两个方程中（注意是方程而不仅仅是系数矩阵）的某一个方程包含角度、速度、密度、反射和透射系数等所有参数

“角标”中的数字，“1 置换为 2”而“2 置换为 1”，就可以得到另一个方程。上行与下行方程的对应关系是：左侧下行对应右侧上行，右侧下行对应左侧上行。

（3）**规则 3_ 由 1 推 3**

观测坐标系（例如，地震勘探坐标系和物理坐标系等）中只要知道了入射波在其中某一个象限入射的 Zoeppritz 方程，按照规则 1 和规则 2 就可以导引出其它三个象限入射情况的 Zoeppritz 方程。这个规则对 P 波和 SV 波均适用。

递推规则具有普适性。使用者针对研究问题的需要可以选择不同的二维坐标系以及入射波可能的入射方式，同时规定统一的“偏振方式”（参见第 1 章第 3 节）。运用 Zoeppritz 方程的递推规则可以给有关公式推导和问题讨论带来极大的便利。确定选择方式的所得结果即 Zoeppritz 方程还可以与其它表达形式的 Zoeppritz 方程彼此进行相互转换和类比，使用者不必担心 Zoeppritz 方程表达形式的差异会带来错误的结果，因为所有不同表达形式的 Knott 方程都可以统一于表达形式相同的（波在界面上满足的）能量平衡方程（参见第 5 章）。

4 值得注意的问题

这里提出值得注意的问题有：Zoeppritz 方程与 Knott 方程的彼此转换，地震波在界面的能量守恒方程，AVO 近似公式和 AVO 分析方法。

4.1 Zoeppritz 方程与 Knott 方程的彼此转换

Zoeppritz 方程与 Knott 方程具有密切的关联性，这种关联性就是 Zoeppritz 方程和 Knott 方程具有等价性，而且这个结论具有普遍性。相同的坐标系下，针对同类入射波例如 P 波或 SV 波的相同入射方式，一方面运用变换矩阵可以把 Zoeppritz 方程转换为 Knott 方程，另一方面也可以把 Knott 方程转换为 Zoeppritz 方程。

Zoeppritz 方程与 Knott 方程彼此相互转换的内容体现在第 5 章第 1 节和第 2 节。第 5 章第 1 节讲述“Zoeppritz 方程转化为 Knott 方程”，其中包含 P 波入射界面和 SV 波入射界面两种情况。第 5 章第 2 节讲述“Knott 方程转化为 Zoeppritz 方程”，其中包含 P 波入射界面和 SV 波入射界面两种情况。

通过构造并引入相关的“变换矩阵和变换方程”，可以实现 Zoeppritz 方程与 Knott 方程的彼此相互转换。设定 P 波入射和相关射线上体积元偏振方式时，考察两种情形：（ⅰ）Zoeppritz 方程转化为 Knott 方程。例如，参见第 5 章第 1 节的（5.1.3）式，它表达了 P 波从界面上覆介质下行入射界面时，对应的 Zoeppritz 方程转化为 Knott 方程的“反射和透射系数变换方程”。再如，参见第 5 章第 1 节的（5.1.8）式，它表达了 P 波从界面下伏介质上行入射界面时，对应的 Zoeppritz 方程转化为 Knott 方程的“反射和透射系数变换方程”。（ⅱ）Knott 方程转化为 Zoeppritz 方程。例如，参见第 5 章第 2 节的（5.2.3）式，该式表达了 P 波从界面上覆介质下行入射界面时，对应的 Knott 方程转化为 Zoeppritz 方程的“反射和透射系数变换方程”。再如，参见第 5 章第 2 节的（5.2.6）式，该式表达了 P 波从界面下伏介质上行入射界面时，对应的 Knott 方程转化为 Zoeppritz 方程的“反射和透射系数变换方程”。类似的方法，第 5 章第 1 节和第 2 节，还针对 SV 波入射界面

时，讨论了对应的 Zoeppritz 方程转化为 Knott 方程和对应 Knott 方程转化为 Zoeppritz 方程的“反射和透射系数变换方程”。

4.2 地震波在界面的能量守恒方程

地震波传播的本质是能量的传播，波在界面上也同样遵循能量守恒关系。不同表达形式的 Zoeppritz 方程最终都能统一于表达形式相同的能量平衡方程。

从 Knott 方程和 Zoeppritz 方程都可以得到界面上的能量平衡方程，对于从 Knott 方程得到的能量方程称之为 Knott 方程的能量方程，对于从 Zoeppritz 方程得到的能量方程称之为 Zoeppritz 方程的能量方程。由于 Knott 方程和 Zoeppritz 方程之间可以相互转换，因此，Knott 方程对应的能量方程与 Zoeppritz 方程对应的能量方程，两者本质上是一致的。

第 5 章第 3 节，运用位移位函数的 Knott 方程，讲述了“波在弹性界面广义散射的能量平衡方程”。结果表明，Zoeppritz 和 Knott 两个方程的多种表达形式都将最终统一于表达形式相同的“能量平衡方程”。因此从这个意义上讲，本书不可能也没有必要把所有可能的 Zoeppritz 方程全部列举出来。

4.3 AVO 近似公式

Zoeppritz 方程的实用化研究是一项重要课题，20 世纪 50 年代特别是 80 年代以后，这方面的研究有了长足的进展，许多学者做出了卓有成效的贡献。20 世纪 80 年代后发展起来的 AVO（Amplitude Versus Offset）分析方法技术就是显著的典型，AVO 方法力图通过包含地层纵横波速度比（或泊松比）和密度比信息的振幅随角度的变化特征，分析解释储层的物理弹性和含油气情况。目前的地震数据处理方面，已经实现了 AVO 方法的商业化软件，在油气能源地震勘探及其相关领域发挥着应有的作用。

从应用方面称呼的“**AVO 分析**”准确地讲就是 **Zoeppritz 方程精确解**的近似公式，也称其为 **AVO 近似公式**。由于 Zoeppritz 方程参数组合设计选择的复杂性和多样性以及求取 Zoeppritz 方程精确解的困难；因此，把 Zoeppritz 方程的精确解转换为近似解就成为理论转换为应用所要解决的关键问题。目前的 AVO 近似公式表达形式多样且各有特点和差异性，但是它们却有着共同的目标和相同点。

从 AVO 的理论基础可以知道，无论是 Zoeppritz 方程还是 AVO 近似公式，它们都含有标定界面之上和之下地层介质弹性特性的基本参数即 V_{1P} 和 V_{2P}、V_{1S} 和 V_{2S} 以及 ρ_1 和 ρ_2（纵波、横波速度和密度三组参数）。**AVO 分析的基本功能**就是利用 AVO 近似公式中所含有的这些弹性参数解疑岩石的物理弹性特征，进而进行储层识别和储层含油气属性的分析解释，为油气能源或其它目的的勘探提供信息支撑。

第 8 章着重对有关的 AVO 近似公式进行简介。主要有 P－P（P 波入射 P 波反射）波的 AVO 近似公式，P－SV（P 波入射 SV 波反射）波的 AVO 近似公式；讨论分析这些近似公式的背景、假设条件和实用性等问题，在相关近似公式的对比分析中还采用了数值计算方法。该章内容是前面章节内容在应用方面的延伸，这些内容仅仅是初步的，侧重于分析解决问题的思想方法，需要在实际技术应用方面进一步学习的读者可以参考 AVO 方面的其它文献资料。

4.4 AVO 分析方法

随着油气田勘探开发程度的提高，AVO 技术在储层预测和流体识别领域发挥着重要作用，目前已经成为降低油气勘探开发风险不可或缺的技术。AVO 分析是地震数据处理的一种特殊方法，这种处理过程包含数据处理分析和地震波场模拟两个相互关联的部分。

第 9 章从实际应用出发，围绕概念、思想、原理和方法以及适用条件，简述 AVO 分析的基本方法。以含气储层为例叙述 AVO 随深度变化的规律，流体替代和薄层效应对 AVO 特征的影响；运用数值计算和人工波场合成方法，着重讨论了四种典型含气储层的 AVO 特征。这些内容是 AVO 的基本问题，有助于读者认识和掌握 AVO 分析方法的本质。

使用 AVO 分析方法需要注意：

（1）现有的 AVO 分析处理软件或模块，依据的都是单一弹性界面的情况；而实际情况则是多个界面，例如目标储层上覆若干个弹性界面，或者薄互层的储层等复杂情况。因此，AVO 分析方法特别强调地震处理中的“保真性”，只有高保真的地震波数据，才能使 AVO 分析处理的结果较客观的反映目标界面的真实 AVO 属性特征；否则就是虚假甚至错误的 AVO 属性特征。

（2）AVO 分析也是地震处理中的一种反演方法，不可避免的存在多解性，因此为了减少多解性，增加分析处理结果的可靠性和可信度，必须使用录井、测井和地质等必要的先验信息，以此约束 AVO 分析处理的全过程。有效地先验信息约束，才能保证 AVO 分析处理过程的顺利进行，并得到可靠性和可信度较高的分析结果；否则无法进行正常的 AVO 分析处理，乃至于得到无法解释或没有含义的处理结果。

5　结　语

地震学博大精深，需要探索和研究的课题广泛而复杂，从个人能力而言不可能把所有的问题讲清楚，本书中所涉及的位移函数地震波在界面的广义散射内容仅是最基本的问题。理论和实践的结合以及碰撞过程中存在众多的问题需要研究探索，例如，对于不太成熟的理论需要进一步研究使之完善，对于较为完善的理论需要在转化为技术方法上做细致的探索，大层面的理论还可以针对具体的目标并在解决具体问题中转化为分支理论和技术，面对复杂问题和实践力图提出新的思想和新的理论。下面仅就波在界面广义散射的两个具体问题谈一下个人的粗浅看法。

现有的前人关于地震波在界面广义散射的研究成果同地震学的其它成果一样，仍然需要深入地认识和总结，这是理论应用于实际的需要也是进一步发展的基础。已有的理论转化为应用需要解决许多具体和复杂的细节问题，这种转换总是要延续一段时间甚至相当长的一段时间，例如，Poisson（泊松）和 Lamé（拉梅）关于纵波和横波概念的提出到实际观测的印证经过了半个多世纪，Knott（诺特）和 Zoeppritz（佐普里兹）方程的提出到研制出可处理实际地震资料的商业化软件大致经历了近一个世纪，Biot 饱和孔隙流体双相介质理论的部分成果应用于实际也走过了近半个世纪的历程，各向异性理论的部分成果应用于实际也经过了一段漫长的时间。总之，理论的提出到完善以及理论转换为应用的技术方法都需要人们特别是后来的人们坚持不懈地在探索中向前发展。

地震学发展的另一个重要课题就是去发现和提出新理论新思想。前人不可能把所有的事情都做完，后人也不会无事可做，科学就意味着永无止境，就意味着不懈地去探索。一方面已有的理论可以向复杂的相关问题进行拓展，尽管这种拓展会带来极大的挑战；例如，前人关于波在单一界面广义散射的理论如果考虑多层界面、薄互层的各向异性、黏弹性和孔隙流体等复杂因素将使得问题的研究变得复杂和困难，但是这种研究在理论和应用上仍然是有意义的。另一方面就是在前人成果基础上去发展和发现新理论新思想；例如，人们对前人关于孔隙流体介质理论能够有效地应用于实际一直在作不断地努力，同时也在完善发展前人已有成果基础上，力图对孔隙流体介质提出新的认识和新的思想，例如，裂隙、裂缝各向异性的孔隙流体介质，或者复杂岩性储层中地震波的传播理论和模型；再如，波在界面上广义散射与孔隙度的关系即 AVO 或 AVA 不仅与角度有关，而且也与（油气水及水合物等）储层的孔隙度以及孔隙中的流体成分有密切关系，这些方面的研究始终是重要的前沿课题。

目　录