Gaodeng
Shuxue

高等数学

（下册）

四川大学数学学院高等数学教研室　编

四川大学出版社

Gaodeng Shuxue

高等数学

（下册）

四川大学数学学院高等数学教研室　编

四川大学出版社

责任编辑:毕　潜
责任校对:唐　飞
封面设计:墨创文化
责任印制:王　炜

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 四川大学数学学院高等数学教研室编. —成都：四川大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5614-7010-7

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①四…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 162995 号

书名　**高等数学（下册）**

作　者	四川大学数学学院高等数学教研室
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号（610065）
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978-7-5614-7010-7
印　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	14.75
字　数	395 千字
版　次	2013 年 8 月第 1 版
印　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
定　价	32.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:http://www.scup.cn

前　言

本书是根据普通高等教育大学数学教学大纲以及硕士研究生高等数学考试大纲编写的，并针对当前高等院校的教学实际，重新整理了教材内容，教材具有体系完整、叙述详细、说理浅显、内容透彻、例题和习题全面及便于教学等特点.

全书分上下册. 上册为一元函数微积分部分；下册为多元函数微积分部分. 具体内容为：上册包括数列极限与数项级数、函数极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及函数项无穷级数；下册包括空间解析几何与矢量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分及微分方程.

鉴于普通初、高级中学数学教学大纲的不断修订，相比于其他同类教材，本书补充了极坐标等内容，并完善了一些初、高中阶段介绍过的概念及相应内容.

由于理工各专业所需要的数学不尽相同，本教材除共同需要的部分外，增加了一些加 * 号的内容，除了各专业可根据需要自行选用外，也可作为高等数学学习的补充课外参考内容.

本书可作为对大学数学要求较高的高等院校理工科非数学类各专业工科高等数学课程的教材或参考书.

本书由四川大学数学学院高等数学教研室组织编写，参加编写的人员有牛健人、高波、冷忠建、钮海、吕子明、闵心畅、项兆虹等.

本书的出版得益于四川大学数学学院、四川大学出版社及四川大学教务处的关心和帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢.

由于水平所限，又兼仓促完稿，本书在内容安排、文字修饰和习题选配等方面还存在许多问题，希望教材使用者及广大读者予以指正.

编　者

2013 年 6 月

目 录

第 8 章　空间解析几何与矢量代数

作为数学分支“几何学”的重要部分，空间解析几何是学习多元函数微积分、线性代数以及其他数学课程必不可少的基础. 同时，也是学习物理、力学以及其他工程技术学科所必需具备的数学知识.

本章首先介绍矢量及其运算，并建立空间坐标系，然后介绍平面与直线，曲面与曲线以及二次曲面等空间解析几何的基本内容.

§8.1　矢量及矢量的运算

矢量来源于力学、物理学. 本节从物理、力学上引入矢量运算的定义，并给出其运算规律以及矢量平行、垂直的重要定理.

§8.1.1　矢量、矢量的模、单位矢量

在物理、力学中，如速度、加速度、力、位移等既有大小又有方向的量称为**矢量**(或称**向量**). 用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示大小为 AB 线段的长度，沿 AB 直线从点 A 到点 B 方向的矢量，点 A 称为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**始端**，点 B 称为矢量的**终端**，也可用 $\vec{a}$,$\vec{b}$，$\vec{c}$ 或者黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示矢量，如图 8.1 所示. 符号 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，称为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，同样 $|\vec{a}|$ 表示矢量 $\vec{a}$ 的模，$|\boldsymbol{a}|$ 表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模.

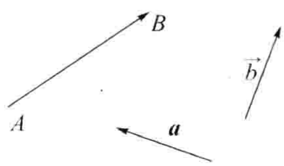

图 8.1

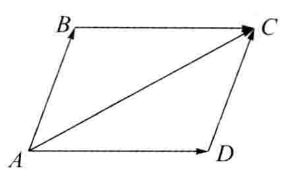

图 8.2

定义 1　若两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同、大小相等(模相等)，则称两矢量**相等**，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，也即一个平行移动后的矢量与原矢量相等，这样的矢量又称为**自由矢量**. 在数学上，我们研究的矢量都是指自由矢量.

如图 8.2 所示的平行四边形 $ABCD$，矢量 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

定义 2　若两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小(模)相等、方向相反($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互为逆向矢量)，则称 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负矢量**，或称 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的负矢量. 记为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

如图 8.2 中，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$.

定义 3　长度为零的矢量(模等于零)，称为**零矢量**，记为$\vec{0}$，在不至于混淆的情况下也写为“**0**”. 零矢量又称为**点矢量**，无一定方向，所以可以是任意方向的矢量.

定义 4　长度为一个单位(模等于 1)的矢量称为**单位矢量**. 一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量为与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同、长度(模)为一个单位的矢量，记为 $\boldsymbol{a}^0$.

§8.1.2　矢量的加法

在物理力学中，两个力的合力用“平行四边形法则”确定，如图 8.3(a)所示，矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 表示两个力，以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，对角线为 OC，则矢量 $\overrightarrow{OC}$ 是 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的合力，记为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，这便是矢量加法的“平行四边形法则”.

“平行四边形法则”可简化为“三角形法则”，如图 8.3(b)、(c)所示. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，那么 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

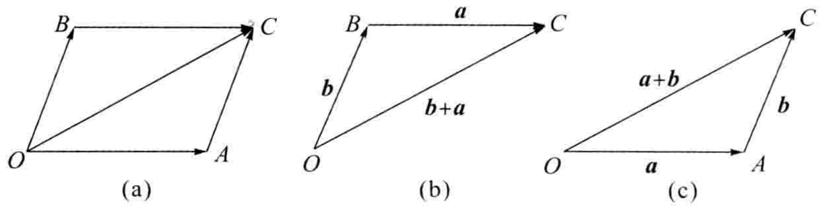

图 8.3

定义 5　两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法. 若 $\boldsymbol{a}$ 的终端与 $\boldsymbol{b}$ 的始端相连，则从 $\boldsymbol{a}$ 的始端到 $\boldsymbol{b}$ 的终端的矢量为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，称为“$\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}$”. 若 $\boldsymbol{b}$ 的终端与 $\boldsymbol{a}$ 的始端相连，则从 $\boldsymbol{b}$ 的始端到 $\boldsymbol{a}$ 的终端的矢量为 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，称为“$\boldsymbol{b}$ 加 $\boldsymbol{a}$”.

因为矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 构成一个三角形，所以又称为“三角形法则”，显然，矢量的加法满足交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

从两个矢量相加的“三角形法则”，不难推广到多个矢量相加的“封闭多边形法则”. 如图 8.4 所示，设矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，作加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$. 则只要把矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 依次序首(始端)尾(终端)相连，那么从矢量 $\boldsymbol{a}$ 的始端到矢量 $\boldsymbol{d}$ 的终端的矢量为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$.

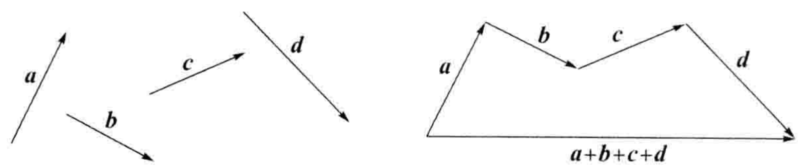

图 8.4

“代数”中引入负数后，加法的逆运算减法，已当作代数和，减一个数相当于加该数的相反数. 矢量运算同样如此，矢量 $\boldsymbol{a}$ 减矢量 $\boldsymbol{b}$ 相当于加“$-\boldsymbol{b}$”，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，如图 8.5 所示.

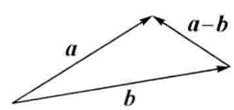

图 8.5

矢量的加法与数的加法类似，满足以下规律：

(1)若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$；

(2)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(交换律)；

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(结合律)；

(5)若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$(消去律).

§8.1.3　数乘矢量

定义 6　实数 k 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积称为**数乘矢量**. 记为 $k\boldsymbol{a}$，它的模 $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$. 其方向为：当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $k=0$ 时，$0\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；当 $k=1$ 时，$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；当 $k=-1$ 时，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘矢量满足下列规律：

(1)$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}k$(交换律)；

(2)$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$，$k$，$l$ 为实数(结合律)；

(3)$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$，$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$(分配律)；

(4)若 $k\neq 0$，$k\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，

　若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$k\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{a}$，则 $k=l$(消去律).

例如，矢量 $\boldsymbol{a}$ 为非零矢量，即 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，则因为 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，所以 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

矢量加法与数乘矢量统称矢量的**线性运算**. 设任意二实数 k，l，与两个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的运算 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性运算.

显然，当 $k=l=1$ 时，为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；当 $l=0$ 时，为 $k\boldsymbol{a}$. 因此矢量的线性运算包含矢量加法与数乘矢量.

线性运算又称为**线性组合**，即 $k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合. 若矢量 $\boldsymbol{c}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}$，又称矢量 $\boldsymbol{c}$ 可被 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性表示，…. 这些都是线性代数课程中讨论的重要概念，其几何意义在于矢量共线与共面的问题.

对于自由矢量来说，互相平行的矢量称为**共线矢量**，平行于同一平面的矢量称为**共面矢量**. 关于矢量共线与共面有以下常用到的结论：

结论 1　零矢量与任何矢量共线(零矢量平行于任何矢量).

结论 2　若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有等式 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ 成立，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(数乘矢量与原矢量平行).

结论 3　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的数 k_1，k_2，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证明　必要性. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，有 $1\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，这时 $k_1=1$，$k_2=0$；当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时，有 $0\boldsymbol{a}+1\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，这时 $k_1=0$，$k_2=1$；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量时，因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，所以 $\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的数乘，即存在实数 l，使得 $\boldsymbol{a}=l\boldsymbol{b}$(当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时 $l>0$，反向时 $l<0$). 有

$$\boldsymbol{a}-l\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

即

$$k_1=1,\quad k_2=-l.$$

所以必存在不全为零的数 k_1，k_2，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 成立.

充分性. 若存在不全为零的数 k_1，k_2，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则当 $k_1\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{b}$；

当 $k_2 \neq 0$ 时，$\boldsymbol{b} = -\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{a}$. 所以由结论 2 知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

结论 4 若矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足关系 $\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$($k_1$，$k_2$ 为实数)，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 三矢量共面(由矢量加法可证).

结论 5 三个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1，k_2，k_3，使得 $k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 成立(作为练习证明).

§8.1.4 两矢量的数量积(内积)

从物理学中知道在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下使物体作直线运动而产生位移 $\boldsymbol{s}$ 时所做的功(见图 8.6)为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

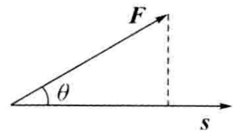

图 8.6

定义 7 两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(内积)，等于两矢量的模与两矢量夹角的余弦的乘积. 记为

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

式中，$\theta = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$，为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 即平移两矢量使始端重合为角的顶点，以两矢量为边所成的角，规定 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

数量积满足以下规律：

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$(交换律)；

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$(分配律)；

(3) $(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$；

(4) $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

这里要注意，三个矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的积，$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ 之间未必相等，特别要注意 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 是无意义的.

由数量积的定义可推得两个重要公式. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，则有：

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|};$$

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} \text{ 或记为 } a_b = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|};$$

$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} \text{ 或记为 } b_a = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

定理 1 两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

证明 必要性. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

充分性. 若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 0$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零矢量时，零矢量与

任何矢量都垂直. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量时，即 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时，有 $\cos\theta=0$；即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，两矢量垂直.

§8.1.5　两矢量的矢量积

回忆物理学中**矩**的概念. 如图 8.7 所示，悬臂长为 S，悬臂端作用力为 $\boldsymbol{F}$，则 $\boldsymbol{F}$ 与力臂 $\boldsymbol{S}$ 产生的矩的大小等于 $|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\sin\theta$，方向规定为右手定则.

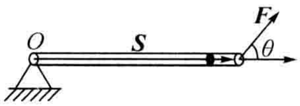

图 8.7

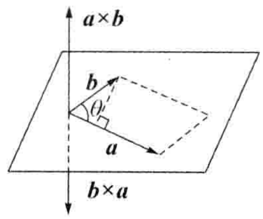

图 8.8

定义 8　两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**矢量积**为一个矢量，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模等于两矢量的模与两矢量夹角 $\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的正弦 $\sin\theta$ 的积，即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta;$$

方向垂直于 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在平面，按右手定则指定的方向，如图 8.8 所示.

因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边所构成平行四边形的面积.

矢量积满足下列规律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$（$k$ 为实数）；

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

　$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$（分配律）.

可以看出矢量积只有分配律成立，交换律与结合律都不成立，即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 未必等于 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. 所以连乘积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 同样无意义.

定理 2　两矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证明　必要性. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，故

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0,$$

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

充分性. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零矢量时，因零矢量与任何矢量平行，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量时，则 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，因此 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

* §8.1.6 混合积

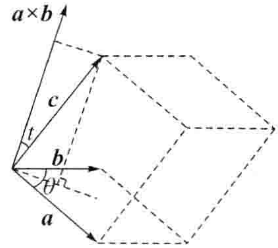

图 8.9

定义 9 三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为**混合积**, 记为 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$.

设矢量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 t, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos t \\ &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

由图 8.9 知混合积的绝对值 $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 三矢量为棱所构成的平行六面体的体积.

混合积具有下列性质:

(1) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ (轮换性);

(2) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]=-[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$ (对换变号);

(3) $[k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, k\boldsymbol{c}]=k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$;

(4) $[\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$.

以上性质在下一节建立坐标系后, 用向量的坐标及混合积的行列式表达式, 再根据行列式的性质很容易给出证明.

定理 3 三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=0$.

证明 必要性. 若矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直. 所以

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

充分性. 若 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=0$, 即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos t=0$, 则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$ 或 $|\boldsymbol{c}|=0$ 或 $\cos t=0$(t 为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的夹角), 若 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 所以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面; 若 $|\boldsymbol{c}|=0$, 则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 零矢量与 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 共面; 若 $\cos t=0$, 则 $t=\frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直, 所以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面. 综上所述, 当 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=0$ 时, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面.

§8.1.7 矢量代数的应用举例

例 1 证明三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

证明 作任意三角形, 如图 8.10 所示 $\triangle ABC$, D, E 分别为 AB, AC 边的中点, 连接 DE, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},\end{aligned}$$

所以 $DE\parallel BC$, 且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

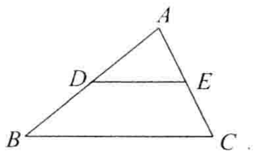

图 8.10

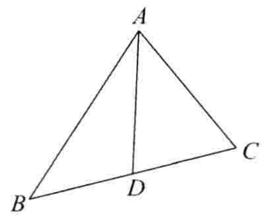

图 8.11

例 2　如图 8.11 所示$\triangle ABC$，D 为 BC 边的中点，试证：

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

证明　因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，又$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

例 3　证明下列等式：

(1)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$；

(2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

证明　(1)左端$=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)=$右端；

(2)左端$=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$

$=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2+(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2=$右端.

例 4　设有空间三点 A，B，C 及点O，且$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$. 若$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_3$ 满足等式 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0}$，试证 A，B，C 三点共线.

证明　因为$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)\\&=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1.\end{aligned}$$

又因为 $\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_1=-\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1$，有

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{0},$$

即 $AB\parallel AC$，所以 A，B，C 三点共线.

例 5　设 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零矢量，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 试证：

(1)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

(2)$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的夹角θ 满足$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

证明　(1)因为 $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}$，有 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 垂直 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在平面，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$(且 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$)；

(2)因为 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$，有 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$. 即 $\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-|\boldsymbol{b}|^2$，又因为 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$，所以

$$\cos\theta=-\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|}<0,$$

即

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi .$$

习题 8－1

1. 已知矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 已知矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=3$，夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$，求以矢量 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形对角线的长.

3. 已知平行四边形对角线矢量为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$. 其中 $|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2$，夹角 $\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\pi}{6}$，求此平行四边形的面积.

4. 判断下列等式何时成立.

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$； (4) $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$.

5. 下列运算是否正确？为什么？

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(4) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

6. 用几何作图验证下列等式.

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}$；

(2) $\left(\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)-\left(\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

7. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线矢量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$.

8. 证明 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$.

9. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，试证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

10. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

11. 设有平行四边形 $ABCD$，且 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，求垂直于 AD 边的高矢量.

12. 若矢量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，矢量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于矢量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

13. 证明不等式 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

14. 若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为非零矢量，且满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，试证：

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1.$$

15. 证明：(1) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

16. 试证(关于矢量共线与共面的结论 5)：三矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

§8.2　坐标系、矢量的坐标

本节将建立空间直角坐标系，把矢量及其运算数量化.

§8.2.1　坐标系

初等代数中的数轴，使直线上的点与实数建立了一一对应关系，平面解析几何中的直角坐标系与极坐标系使平面上的点与二元有序数组一一对应.

为了确定空间中的一点在一定参考系中的位置，按规定的方法选取的有序数组(或一个数)称为点的**坐标**，这种规定坐标的方法称为**坐标系**.

规定坐标的方法必须使每一个点的坐标是唯一的，不同的坐标表示不同的点. 因此能使点与有序数组(或数)一一对应便可构成坐标系，通常用**网格法**与**矢量法**构成坐标系，网格法多用于几何空间. 为便于推广到抽象的 n 维空间，需掌握矢量法.

网格法　如在平面直角坐标系中 x 与 y 为任意实数时，分别表示相互垂直的两族直线构成密布整个平面的网，平面上任意一点均是 x 与 y 分别为某实数所代表的两条直线的交点，使得二元有序数组(x, y)与平面上的点一一对应，称(x, y)为平面上点的坐标.

极坐标系是由称为**极点** O 所引出的一族射线及以 O 为圆心的一族同心圆构成一张网覆盖整个平面，实数 θ 表示射线，非负数 r 表示圆，除 $r=0$ 为极点外，平面上其他的点均是某条射线与某个圆的交点. 因而可以用二元有序数组(θ, r)确定点的位置，称为点的坐标.

又如地图上的经、纬度是球面上的坐标系，经线与纬线构成覆盖整个球面的网，除南北极点外，球面上的点均是某条经线与某条纬线的交点，因此可用经度与纬度确定球面上某点的位置.

矢量法　在一直线上，取一个非零矢量 $\boldsymbol{e}$，则直线上任意一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线，所以存在实数 x，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}$. 若把直线上的矢量的始端均确定在一定点 O(称为**原点**)，这样给定一个实数 x 就确定一个矢量. 这个矢量的终端也同时确定，因此数(x)称为矢量的**坐标**，也称为矢量终端点的坐标. 如果矢量 $\boldsymbol{e}$ 为单位矢量，则此直线上点的坐标与数轴一致.

平面上取一定点 O(为原点). 以点 O 为始端的两个不共线的矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，则平面上任意一矢量 $\boldsymbol{a}$ 都存在唯一确定的有序数组(x_1, x_2)，使得 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$. 同样把平面上的任意矢量的始端均定在点 O，那么(x_1, x_2)确定矢量终端点的位置，所以(x_1, x_2)称为矢量终端点的坐标，也称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 如果矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为相互垂直的单位矢量，则称为平面上的**正交系**，也即是平面直角坐标系. 只需把 x_1，x_2 用 x，y 表示，那么便与平面直角坐标系一致.

§8.2.2 空间直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系

上面对直线上和平面上的坐标系作了简要的介绍，并按其构成特征分为网格法和矢量法. 下面介绍空间中的三种坐标系，即空间直角坐标系、柱面坐标系和球面坐标系. 其中，空间直角坐标系既可看作是由矢量法构成的坐标系，又可看作是由网格法构成的坐标系. 柱面坐标系和球面坐标系则是由网格法构成的坐标系.

空间直角坐标系 首先取空间中一定点 O，作三个以 O 点为始端的两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，就确定了三条以 O 点为原点的两两垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，分别称为 x 轴、y 轴、z 轴，并依 Ox，Oy，Oz 的顺序按右手法则规定坐标轴的正向. 这样就由矢量法建立了一个空间直角坐标系，如图 8.12 所示. 显然，在 x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$，$(0, 0, z)$.

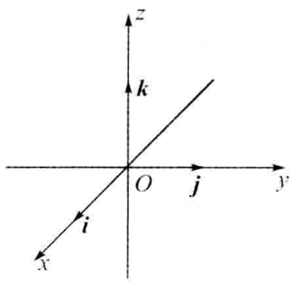

图 8.12

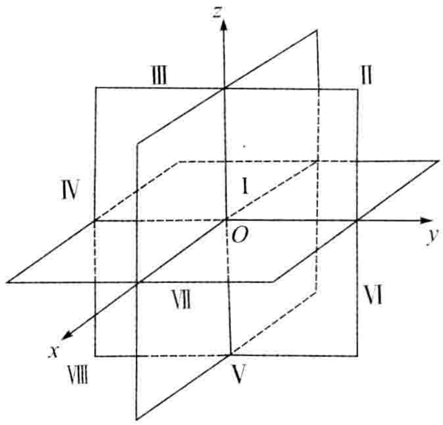

图 8.13

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，称为坐标面. 其中，由 y 轴和 z 轴确定的坐标面称为 Oyz 面，由 z 轴和 x 轴确定的坐标面称为 Ozx 面，由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 Oxy 面. 上述坐标面上点的坐标分别为 $(0, y, z)$，$(x, 0, z)$，$(x, y, 0)$.

三个坐标面把空间分为八个部分，称为八个卦限. 以空间点的坐标 (x, y, z) 中 x，y，z 的正负号区别划分，称为：第Ⅰ卦限(+ + +)；第Ⅱ卦限(− + +)；第Ⅲ卦限(− − +)；第Ⅳ卦限(+ − +)；第Ⅴ卦限(+ + −)；第Ⅵ卦限(− + −)；第Ⅶ卦限(− − −)；第Ⅷ卦限(+ − −).

如图 8.13 所示，其中，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限合称为上半空间，Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限合称为下半空间. 同样也可将空间分为左半空间和右半空间，或者前半空间与后半空间.

柱面坐标系 空间中一点 $P(x, y, z)$，在 Oxy 面上投影 Q 的极坐标为 r，θ，即 $r = |OQ|$，θ 是 OQ 与 x 轴正向的夹角，z 仍然是 P 在空间直角坐标系中的 z 坐标. 显然，空间中任何一点 P 都可用三个数 r，θ，z 唯一确定，(r, θ, z) 称为点 P 的柱面坐标(如图 8.14所示)，这里规定：

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$