中学生智力开发丛书

高中数学一题多解500例

高志峰 编

东北师范大学出版社

高中数学一题多解500例

高 志 峰 编

东 北 师 范 大 学 出 版 社

高中数学一题多解500例

GAOZHONG SH UXUE YITI DUOJIE 500 LI

高 志 峰 编

责任编辑：杨述春　封面设计：王　帆　责任校对：木　心

东北师范大学出版社出版　吉林省新华书店发行

（长春市斯大林大街110号）　长春市第四印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米 1/32　1989年12月第1版

印张：25.75　1989年12月第1次印刷

字数：570千　印数：00 001—10 000册

ISBN 7-5602-0344-2/G·129　定价：7.50元

前　言

《高中数学一题多解500例》是依据新编《全日制中学数学教学大纲》，根据现行高中数学课本（甲种本）的体系并结合多年的教学经验编写而成的。编写此书的目的是为了帮助广大高中学生和自学青年更好地学习、理解和掌握高中数学的基础知识，熟悉和掌握各种类型题的解题方法、技巧和规律，培养发散型思维，提高多角度综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力。

本书分为代数、平面三角、立体几何、平面解析几何四部分。每部分包括题目、解题分析、解（证）法与说明。

关于题目　本书选入题目500余例，所有例题力求具有针对性、典型性、综合性，力求体现高中数学各科知识的基本点、重点和难点。

关于题解　为使读者阅读方便，题解就附在题后。例题大多给出两个以上解法。解法力求具有一般性、启发性和示范性。其中，解法1是常用的、基本的方法，其余的解法是带有技巧性、灵活性的方法。

关于分析和说明　在解法之前有简短的解题分析，题解之后有解题总结即说明。

本书不仅可供广大高中学生和自学青年阅读，也可供高中数学教师教学时参考。

本书在编写过程中，曾得到南开大学数学系李成章、中国科学院长春光机所王慧田、东北师范大学研究生部王亚君以及汤朝瑞、晁振英、何艳春、姚凤春、刘丽芬等老师、同志的指导和帮助，在此深表感谢。

由于编者水平有限，经验不足，对书中存在的缺点、错误，热诚欢迎读者批评指正。

编　者

1989 年 1 月

序

数学对于人们从事社会主义建设具有重要作用。随着生产和科学技术的飞速发展，人们越来越意识到数学的重要，越来越重视对于数学的学习。

解答数学习题是学好数学的必要条件，因此，它在数学教学和学习中占有重要地位。解题本领的大小是数学水平高低的主要标志之一。解题训练对人的培养作用很大，对提高人的素质十分必要，因此，人们非常重视对解题的研究。

解题是一种探索性、创造性的工作。所谓解题就是用已知的数学知识和解题经验、方法，把未知转化为已知，进而求（证）出未知的过程。

人们学习数学，都要解答大量的、甚至是成千上万道的习题。有的在解题过程中能够掌握解题规律，收效较大；有的则不能，往往是一遇到形式不同或者少见的习题，就茫无所措，不知如何解答。这里原因当然很多，其中主要原因就是没有牢固掌握基础知识，不善于灵活运用知识，不注意解题过程，没能从中归纳出解题的一般手段和方法以及解题的规律和技巧。近年来，出版了不少题书，多是着眼于升学考试，很少就关于解题规律和寻求解题方法给出一般的提示和建议，结果使学习者做了很多习题，费时不少，收效不大。

为了满足高中数学教学的需要，帮助广大高中学生和自学青年学好数学，作者根据现行高中数学教学大纲的要求，按照现行教材的内容，在总结自己多年教学经验的基础上，

从大量的习题中优化和精选出500道，编写成《高中数学一题多解500例》一书。

全书囊括了高中数学教材的全部内容，较好地体现了大纲的要求，既注意突出教材的重点，又注意突破教材的难点，题目科学、新颖、典型、适用，具有明确的目的性，较强的针对性，较大的综合性和灵活性。每题都首先给出常规解法，其后给出灵活解法及解题技巧，最后指出解题规律。全书由浅入深，文图并茂，可读性很好，不失为诸多题书中的一本好书。

本书可供数学教师、教研人员、高中学生和自学青年及学生家长辅导学生使用。相信读者通过对本书的学习，将会加深理解和牢固掌握高中数学基础知识，熟悉各种类型题的解（证）题方法，发展智能，提高数学水平。望本书能成为广大读者的良师益友，愿您喜欢它，祝您成功！

李浩明

1989年10月18日

目　　录

第一篇　代　　数

第一章　数　与　式

1　求 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$的值.

解法 1

原式 $=\sqrt{9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}+\sqrt{9-2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}$

$=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}=6.$

解法 2

令　$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=u$ $(u>0)$，$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=v$ $(v>0)$，则

$$\begin{cases} u^2+v^2=22, & ① \\ uv=7. & ② \end{cases}$$

① + ② × 2，得

$$u^2+v^2+2uv=36,$$

即　$(u+v)^2=36.$

∵　$u>0$，$v>0$，　∴　$u+v=6.$

即　$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6.$

解法 3

设　$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=x$，两边平方并整理，得

$$22+2\sqrt{(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})}=x^2,$$

即　$22+2\sqrt{11^2-72}=x^2.$

$36=x^2$，　∴　$x=6.$

即 $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=6$。

解法 4

当 $A>0$，$B>0$，$A^2-B>0$ 时，有公式

$$(1)\ \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

$$(2)\ \sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

利用公式(2)，得

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=2\sqrt{\frac{11+\sqrt{11^2-72}}{2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{11+7}{2}}=6.$$

2 比较下列两个数的大小：

$(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}$ 和 $(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}$

解法 1

$$\because\quad \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}}{(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}}=\left[\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2}\right]^{66}$$

$$=\left[\frac{5+6+2\sqrt{30}}{3+8+2\sqrt{24}}\right]^{66}=\left(\frac{11+2\sqrt{30}}{11+2\sqrt{24}}\right)^{66}$$

$$>1,$$

$$\therefore\quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}>(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}.$$

解法 2

$$\because\quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=11+2\sqrt{30}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=11+2\sqrt{24},$$

$\therefore \quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^2>(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2>0,$

$\therefore \quad [(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2]^{66}>[(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2]^{66}.$

即 $\quad (\sqrt{5}+\sqrt{6})^{132}>(\sqrt{3}+\sqrt{8})^{132}.$

3 计算$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}$的值.

解法 1

首先计算含n重根号时的值:

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}\ (n\text{重根号})$$

$$=\sqrt[2^2]{2^{2^2-1}\cdot\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}\ (n-1\text{重根号})$$

$$=\sqrt[2^3]{2^{2^3-1}\cdot\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}\ (n-2\text{重根号})$$

$$=\sqrt[2^4]{2^{2^4-1}\cdot\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}\ (n-3\text{重根号})$$

……

$$=\sqrt[2^n]{2^{2^n-1}}=2^{\frac{2^n-1}{2^n}}.$$

当n很大时,$\dfrac{2^n-1}{2^n}\to 1$,

故$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}=2$.

解法 2

令 $x_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$ (n重根号),则

$$(x_n)^2=2^{2^0}\cdot\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}\ (n-1\text{重根号}),$$

$$(x_n)^{2^2}=2^{2^2-1}\cdot\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}\ (n-2\text{重根号}),$$

$$(x_n)^{2^3}=2^{2^3-1}\cdot\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}\ (n-3\text{重根号}),$$

……

$$(x_n)^{2^{n-1}}=2^{2^{n-1}-1}\cdot\sqrt{2},$$

$$(x_n)^{2^n}=2^{2^n-1}.$$

两边开2^n次方，得

$$x_n=2^{\frac{2^n-1}{2^n}},\quad\therefore\quad\lim_{n\to\infty}x_n=2。$$

即 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}=2.$

解法 3

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}$（$n$ 重根号）

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{2^2}}\cdot2^{\frac{1}{2^3}}\cdot\cdots\cdot2^{\frac{1}{2^n}}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$$

$$=2^{\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}}=2^{\frac{2^n-1}{2^n}},$$

$$\therefore\quad\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{2^n-1}{2^n}}=2.$$

解法 4

令 $u_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}_{n\text{重根号}}$，则

$$u_n^2=2\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}}_{n-1\text{重根号}}$$

$$u_n^2=2u_{n-1}.$$

对 u_n 与 u_{n-1} 取极限，应有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}u_{n-1}=u.$$

故　$u^2=2u$，$\because$ $u>0$，$\therefore$ $u=2$.

即　$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots}}}}=2$.

说明　此题几种解法主要利用了极限的思想，用类似的方法可以解决如下的求值问题：

(1)　$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots}}}}$　$(a\geqslant 0)$　　答：〔a〕

(2)　$\sqrt{a\div\sqrt{a\div\sqrt{a\div\sqrt{\cdots}}}}$　$(a>0)$　　〔$\sqrt[3]{a}$〕

(3)　$\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{\cdots}}}}}$　$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$　〔$\sqrt[3]{a^2b}$〕

(4)　$\sqrt{a\div\sqrt{b\div\sqrt{a\div\sqrt{b\div\sqrt{\cdots}}}}}$　$(a>0,\ b>0)$

$\left[\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}\right]$

(5)　$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots}}}}$　$(a\geqslant 0)$　　〔a〕

(6)　$\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{\cdots}}}}$　$(a\geqslant 0)$　$\left[\dfrac{\sqrt{1+4a}-1}{2}\right]$

4　分解因式 $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$.

解法 1

把原式展开，消去 $2abxy$ 与 $-2abxy$，在剩下的六项中，就x^2和y^2来分组.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^2x^2+b^2y^2+2abxy+a^2y^2+b^2x^2-2abxy\\&\quad+c^2x^2+c^2y^2\\&=(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2)\\&=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)\\&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2).\end{aligned}$$

解法 2

展开原式，就a^2、b^2、c^2分组。

$$\begin{aligned}原式&=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)+(c^2x^2+c^2y^2)\\&=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+c^2(x^2+y^2)\\&=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2).\end{aligned}$$

5 分解因式 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解法 1

$$\begin{aligned}原式&=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2\\&=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)\\&=(b-c)[a^2+bc-a(b+c)]\\&=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)\\&=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]\\&=(b-c)(a-b)(a-c).\end{aligned}$$

说明　这种字母轮换式多项式分解因式，可保留原式中任何一项，而把其余几项展开，分组后提取公因式．也可以把原式各项都展开，重新分组，提取公因式．

解法 2

观察所给多项式可以看出，当 $b=c$，或 $c=a$，或 $a=b$ 时，多项式都等于 0．所以原式含有因式 $b-c$，$c-a$，$a-b$．于是由因式定理有

原式 $=l(b-c)(c-a)(a-b)$.

根据恒等式定义，可令 $a=0$，$b=1$，$c=-1$，从而得 $l=-1$.

$$\begin{aligned}故原式&=-(a-b)(b-c)(c-a)\\&=(a-b)(b-c)(a-c).\end{aligned}$$

6　分解因式　$(a+2b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3$.

解法 1

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (a+2b+c)^3-[(a+b)^3+(b+c)^3] \\
&= (a+2b+c)^3-[(a+b)+(b+c)][(a+b)^2 \\
&\quad -(a+b)(b+c)+(b+c)^2] \\
&= (a+2b+c)^3-(a+2b+c)[(a+b)^2-(a+b) \\
&\quad \cdot (b+c)+(b+c)^2] \\
&= (a+2b+c)[(a+2b+c)^2-(a+b)^2+(a+b) \\
&\quad \cdot (b+c)-(b+c)^2] \\
&= (a+2b+c)[(2a+3b+c)(b+c)+(a+b) \\
&\quad \cdot (b+c)-(b+c)^2] \\
&= (a+2b+c)(b+c)(3a+3b) \\
&= 3(a+2b+c)(a+b)(b+c).
\end{aligned}
$$

解法 2

原式写作 $(a+2b+c)^3+[-(a+b)]^3+[-(b+c)]^3$

由于 $(a+2b+c)+[-(a+b)]+[-(b+c)]=0$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 3(a+2b+c)[-(a+b)][-(b+c)] \\
&= 3(a+2b+c)(a+b)(b+c).
\end{aligned}
$$

说明　此解法应用了公式当$a+b+c=0$时，$a^3+b^3+c^3=3abc$，使解题过程大为简化.

解法 3

设$a+b=m$，$b+c=n$，则$a+2b+c=m+n$，于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (m+n)^3-m^3-n^3 \\
&= m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-m^3-n^3 \\
&= 3mn(m+n) \\
&= 3(a+b)(b+c)(a+2b+c).
\end{aligned}
$$

7　判定多项式 $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$能否分解为两个一次因式的积，若能分解，试分解之.

解法 1

多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 能分解为两个一次因式的条件是

$$4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0,$$

这里 $a=1$，$b=3$，$c=2$，$d=4$，$e=5$，$f=3$，

$\therefore$　$4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2$

$=4\times1\times2\times3+3\times4\times5-1\times5^2-2\times4^2-3\times3^2$

$=0$.

$\therefore$　所给多项式能分解成两个一次因式的积.

设　$x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

$=(x+2y+m)(x+y+n)$

$=x^2+3xy+2y^2+(m+n)x+(m+2n)y+mn$.

比较等式两端同类项的系数，得

$$\begin{cases} m+n=4, \\ m+2n=5, \\ mn=3, \end{cases} \quad 解得\begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases}$$

所以，原式$=(x+2y+3)(x+y+1)$.

解法 2

原式$=(x+2y)(x+y)+4x+4y+3$

$=(x+2y)(x+y)+(x+2y)+3(x+y)+3$

$=(x+2y)(x+y+1)+3(x+y+1)$

$=(x+2y+3)(x+y+1)$.

解法 3

设　$x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3=0$,

即 $x^2+(3y+4)x+2y^2+5y+3=0$,

$$x=\frac{-(3y+4)\pm\sqrt{(3y+4)^2-4(2y^2+5y+3)}}{2}$$

$$=\frac{-(3y+4)\pm\sqrt{(y+2)^2}}{2}$$

$$=\frac{-3y-4\pm(y+2)}{2}=\begin{cases}-y-1\\-2y-3.\end{cases}$$

所以，原式$=(x+y+1)(x+2y+3)$。

解法 4

令 $y=0$，得

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$,

令 $x=0$，得

$2y^2+5y+3=(y+1)(2y+3)$,

又 $x^2+3xy+2y^2=(x+y)(x+2y)$

$\therefore$ $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

$=(x+y+1)(x+2y+3)$.

说明 解法 4 用到了如下定理:

多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 能分解成两个一次因式之积的充要条件是:

$ax^2+dx+f=(a_1x+f_1)(a_2x+f_2)$,

$cy^2+ey+f=(c_1y+f_1)(c_2y+f_2)$,

$ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y)$.

8 试确定 k 的值，使$x^2+7xy+ky^2-5x+43y-24$能分解成两个一次因式的积。