愛知社

新編各科常識問答

改版本 ②

民國廿三年

上海新聲書局印行

新編各科常識問答

版權	平裝	甲集上下兩册定價大洋一元二角
所有	平裝	乙集上下兩册定價大洋一元二角

民國二十三年七月一日改版本第八版

編輯者　愛知社編輯部

負責校對·出版·發行者李耀星

發行所　上海新聲書局

上海四馬路東華里五五九號

代理發行所　各埠民智書局
各埠北新書局
各埠開明書店
開封豫郁文書莊
開封豫文書局
長沙湘芬書局
西安大東書局
上海　武昌　亞新地學社

分銷處　各埠各大書局

三角法問答目次

三角法問答

I. 式之變形

(一) 銳角三角式之變形及數值計算問題

(A) 摘 要

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Sin}A\,\mathrm{cosec}A &= 1 \cdots (1) \\ \cos A\sec A &= 1 \cdots (2) \\ \tan A\cot A &= 1 \cdots (3) \end{aligned}\right\}(\mathrm{A}) \text{ 又} \left\{\begin{aligned} \mathrm{cosec}A &= \frac{1}{\mathrm{Sin}A} \\ \sec A &= \frac{1}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{1}{\tan A} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \cdots\cdots (4) \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \cdots\cdots (5) \end{aligned}\right\}(\mathrm{B}) \text{ 又} \left\{\begin{aligned} \tan A\ \cos A &= \sin A \\ \cot A\ \sin A &= \cos A \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin^2A+\cos^2A &= 1 \cdots\cdots (6) \\ 1+\tan^2A &= \sec^2A \cdots\cdots (7) \\ 1+\cot^2A &= \mathrm{cosec}^2A \cdots\cdots (8) \end{aligned}\right\}(\mathrm{C})$$

(B) 問題反解法

(1) $(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin)^2$ 試簡單之

解： 原式 $=\cos^2A+2\cos A\sin A+\sin^2A+\cos^2A$

$-2\cos A\sin A+\sin^2A$

$=2(\cos^2A+\sin^2A)=2$

(2) 試變 $\sin^4A+\cos^4A$ 爲 $1-2\sin^2A\cos^2A$

解： $\sin^4A+\cos^4A=\sin^4A+2\sin^2A\cos^2A+\cos^4A$

$-2\sin^2A\cos^2A$

$=(\sin^2A+\cos^2A)^2-2\sin^2A\cos^2A$

$=1-2\sin^2A\cos^2A$

(3) 試簡單 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$

解： 原式 $=\dfrac{1-\sin\theta \quad 1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$=\dfrac{2}{1-\sin\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$

(4) $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$ 試簡單之

解： 原式 $=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$

(5) 試將 $(\tan A+\sec A)^2$ 以 $\sin A$ 項表之

解：$(\tan A+\sec A)^2=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2=\left(\dfrac{\sin A+1}{\cos A}\right)^2$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}=\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$$

(6) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$ 試簡單之

解　原式$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}}=\tan\alpha\tan\beta$

(7) 試証$(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$

解：左邊$=[(1+\sin A)+\cos A]^2$

$$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)\cos A+\cos^2 A$$

$$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)+1-\sin^2 A$$

$$=(1+\sin A)(1+\sin A+2\cos A+1-\sin A)$$

$$=2(1+\sin A)(1+\cos A)$$

(8) $\tan\theta\,\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\,\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$ 試證明之

解：左邊$=\cot\theta\tan^2\theta\,\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$$=\cot\theta\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\cot\theta\frac{1-\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\cdot\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

(別解1) $$\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}\cot^2\theta$$

∴ 左邊 $=\tan\theta\cot^2\theta\,\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}=\cot\theta\,\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

(別解2) 本式去分母

$$\tan\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$$

$$=\cot\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\cdots\cdots(1)$$

然 $\tan\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)=\tan\theta(1-\sin\theta)^2$

$$=\tan\theta\cos^2\theta$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta=\sin\theta\cos\theta$$

$\cot\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=\cot\theta(1-\cos^2\theta)$

$$=\cot\theta\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta=\sin\theta\cos\theta$$

故(1)式左邊之值等於右邊之值

$$\therefore\quad \tan\theta(1-\sin\theta)(b+\sin\theta)=\cot\theta$$

$$(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \tan\theta\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

(9) 試證明下式

$$\sec A+\tan A=\frac{1}{\sec A-\tan A}$$

解： 由公式 $1+\tan^2A=\sec^2A$

$$\sec^2A-\tan^2A=1$$

$$\therefore\quad (\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)=1$$

$$\therefore\quad \sec A+\tan A=\frac{1}{\sec A-\tan A}$$

數值計算問題

(1) $\tan\theta=\dfrac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ 時$\operatorname{cosec}\theta$之值如何試求之

解： $\tan\theta=\dfrac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ 故$\cot\theta=\dfrac{2mn+2n^2}{m^2+2mn}$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(\frac{2mn+2n^2}{m^2+2mn}\right)^2$$

$$=\frac{(m^2+2mn)^2+(2mn+2n^2)^2}{(m^2+2mn)^2}$$

然分子$=m^4+4mn+4m^2n^2+4n^2(m+n)^2$

$$=m^4+4m^2n(m+n)+4n^2(m+n)^2$$

$$=[m^2+2n(m+n)]^2=(m+2mn+2n^2)^2$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta=\frac{(m^2+2mn+2n^2)^2}{(m^2+2mn)^2}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta=\pm\frac{m^2+2mn+2n^2}{m^2+2mn}$$

但θ爲銳角則將負號棄之

答 $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{m+2mn+2n^2}{m^2+2mn}$

(2)　$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$時，試求 $a\cos\theta+b\sin\theta$ 之値，

解：由公式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\dfrac{a^2}{b^2}}=\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ （因θ爲銳角故棄負號）

次由公式 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \quad 原式 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(3) $\operatorname{cosec}\alpha = 3$時，試求$\sec\alpha - \tan\alpha$之值！

解：$\sec\alpha - \tan\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

然 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \dfrac{1}{3}$

$$\therefore \quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$ （但α爲銳角）

$$\therefore \quad \sec\alpha - \tan\alpha = \frac{1-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $\cot A=\frac{p}{q}$ 時 則 $\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ 之值如何？

解：$$\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}=\frac{p\cot A-q}{p\cot A+q}$$

$$=\frac{p.\frac{p}{q}-q}{p.\frac{p}{q}+q}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

(別解) 由公式 $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{p}{q}\quad\therefore\frac{\cos A}{p}=\frac{\sin A}{q}=k$$

$$\therefore\quad \cos A=pk\qquad \sin A=qk$$

以此代入本式

$$\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}=\frac{p^2k-q^2k}{p^2k+q^2k}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

(二) 餘角三角式之變形

(A) 摘 要

$$\begin{cases}\sin(90^\circ-A)=\cos A\\ \cos(90^\circ-A)=\sin A\\ \tan(90^\circ-A)=\cot A\end{cases}\qquad\begin{cases}\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A\\ \sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec}A\\ \cot(90^\circ-A)=\tan A\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 0^\circ = \cos 90^\circ = 0 \\ \cos 0^\circ = \sin 90^\circ = 1 \\ \tan 0^\circ = \cot 90^\circ = 0 \\ \cot 0^\circ = \tan 90^\circ = \pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \end{cases} \qquad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

(B) 問題及解法

(1) 下式試簡單之

$$\cot(90^\circ - A)\cot A\cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A)$$

解：$\cot(90^\circ - A) = \tan A$,　$\cos(90^\circ - A) = \sin A$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A$$

∴ 原式$= \tan A\cot A\sin A\cot A$

然 $\tan A\cot A = 1$

$$\therefore \text{原式} = \sin A\frac{\cos A}{\sin A} = \cos A$$

(2) $\sin^2(45^\circ + A) + \sin^2(45^\circ - A) = 1$ 試證明之

解：因$(45^\circ + A) + (45^\circ - A) = 90^\circ$

故 $45^\circ + A$與$45^\circ - A$互爲餘角，

$$\sin(45^\circ - A) = \cos(45^\circ + A)$$

$$\therefore\ \sin^2(45^\circ + A) + \sin^2(45^\circ - A)$$

$$= \sin^2(45^\circ + A) + \cos^2(45^\circ + A) = 1.$$

(三) 一般角三角函數式之變形及數值計算問題

問題及解法

(1) $\dfrac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\tan(180^\circ + \alpha)} \times \dfrac{\cot(90^\circ - \alpha)}{\tan(90^\circ + \alpha)} \times \dfrac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(-\alpha)}$ 試簡單之！

解： $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha \quad \tan(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$

$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

故原式 $= \dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha} \times \dfrac{\tan\alpha}{-\cot\alpha} \times \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$

$$= \cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha$$

(2) $\tan 238^\circ = \dfrac{8}{5}$ 時，$\sin 238^\circ$ 之值如何？

解：238° 為第三象限之角，故其正弦之值為負，因之 $\alpha=238°$ $\sin\alpha$ 以旣知數 $\tan\alpha$ 之項表示之時，其符號為負。

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

然 $\tan\alpha=\frac{8}{5}$

$$故\quad \sin\alpha=-\frac{\frac{5}{8}}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{5}\right)^2}}=-\frac{8}{\sqrt{89}}=-\frac{8\sqrt{89}}{89}$$

（四） 角之和及差之三角公式及數值計算問題

（A） 摘 要

（1） 二角之和及差之三角公式

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\ \tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(A)$$

（2） 二倍角或半角之三角公式

$$\left.\begin{aligned} \sin 2A &= 2\sin A \cos A \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 \\ \tan 2A &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \text{(B)}$$

(3) 半角之三角公式

$$\left.\begin{aligned} 1+\cos A &= 2\cos^2 \frac{A}{2} \\ 1-\cos A &= 2\sin^2 \frac{A}{2} \\ \frac{1-\cos A}{1+\cos A} &= \tan^2 \frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C)}$$

(4) 三倍角之三角公式

$$\left.\begin{aligned} \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\ \cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\ \tan 3A &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(D)}$$

(B) 問題及解法

(1) 試變$\tan A+\tan B$爲積形，

解： 原式$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

(2) $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)$試簡單之

解：原式$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

$$=\frac{(1+\tan A)^2-(1-\tan A)^2}{(1+\tan A)(1-\tan A)}$$

$$=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}=2\tan^2 A$$

(3) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$試簡單之

解：原式$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\ \cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$

(4) $\cos4\theta-4\cos2\theta+3=8\sin^4\theta$試證之

解：$\cos4\theta-4\cos2\theta+3=\cos4\theta-1-4\cos2\theta+4$

$$=4(1-\cos2\theta)-(1-\cos4\theta)$$