上海大学出版社

2007年上海大学博士学位论文 48

分数阶微分方程的理论分析与数值计算

● 作 者：邓 伟 华

● 专 业：计 算 数 学

● 导 师：李 常 品　马 和 平

上海大学出版社
2007年上海大学博士学位论文

分数阶微分方程的理论分析与数值计算

● 作 者：邓伟华
● 专 业：计算数学
● 导 师：李常品　马和平

图书在版编目(CIP)数据

2007年上海大学博士学位论文. 第1辑/博士学位论文编辑部编著. —上海：上海大学出版社，2010. 9
ISBN 978-7-81118-650-5

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①博… Ⅲ. ①博士—学位论文—汇编—上海市—2007 Ⅳ. ①G643.8

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第132864号

2007年上海大学博士学位论文

——第1辑

上海大学出版社出版发行

（上海市上大路99号 邮政编码200444）

（http://www.shangdapress.com 发行热线66135110）

出版人：姚铁军

*

南京展望文化发展有限公司排版

上海华业装潢印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本890×1240 1/32 印张311.75 字数8390千

2010年9月第1版 2010年9月第1次印刷

印数：1～400

ISBN 978-7-81118-650-5/G·543 定价：1200.00元(60册)

Shanghai University Doctoral Dissertation (2007)

Theoretical Analysis and Numerical Compuation for Fractional Differential Equations

Candidate: Deng Weihua
Major: Computational Mathematics
Supervisors: LI Changpin & MA Heping

Shanghai University Press
· Shanghai ·

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	杨忠华	教授，上海师范大学数信学院	200234
委员：	吴雄华	教授，同济大学应用数学系	200092
	羊丹平	教授，华东师范大学数学系	200062
	茅德康	教授，上海大学数学系	200444
	顾传青	教授，上海大学数学系	200444
导师：	李常品　马和平	教授，上海大学	200444

评阅人名单：

吴雄华	教授，同济大学应用数学系	200092
杨忠华	教授，上海师范大学数信学院	200234
徐明瑜	教授，山东大学数学学院	250100
伍渝江	教授，兰州大学数学学院	730000
吕金虎	教授，中科院数学与系统科学研究院	100080

答辩委员会对论文的评语

分数阶微积分是古老而又年轻的研究课题，具有重要的理论意义和应用前景。

论文针对分数阶微分方程中的理论分析、数值计算及工程应用中的典型问题，作了深入研究，获得了以下的创新成果：

1. 得到了多时滞线性分数阶常微分方程的一般性稳定性判据，分析了解的可微性，并给出了非线性分数阶常微分方程解的 Mittag-Leffler 表示。

2. 讨论了将多阶分数阶常微分方程化为同阶分数阶常微分方程的可能性，得到了多阶分数阶常微分方程的稳定性结果。

3. 运用了分数阶常微分方程的短记忆原理，将预估校正法与短记忆原理结合起来对分数阶常微分方程进行数值求解。同时给出了抛物型分数阶偏微分方程的计算格式，特别研究了 Fokker-Planck 方程。

4. 数值模拟了分数阶微分系统的动力学行为，包括广义混沌同步与多卷波吸引子的生成。

论文表明，邓伟华同学具有本学科坚实的基础理论和系统深入的专门知识，从事科学研究工作的能力强。本论文概念清晰，条理性好，讨论问题具体深入，是一篇优秀的博士学位论文。

邓伟华同学在答辩中表达清楚，能够正确回答问题。经答辩委员会无记名投票，一致同意通过该同学的博士学位论文答辩，并建议授予理学博士学位。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过邓伟华同学的博士学位论文答辩，建议授予理学博士学位。

答辩委员会主任：杨忠华

2007 年 6 月 1 日

摘　要

分数阶微积分已有很长的历史，早在 1695 年，Leibnitz 给 L'Hôspital 的一封信中就提到了分数阶微积分的概念，Leibnitz 写道："这会导致悖论，不过总有一天会得到有用的结果。"早期对分数阶微积分有贡献的数学家包括 Liouville、Riemann、Holmgrem。在近三个世纪里，对分数阶微积分理论的研究主要在数学的纯理论领域里进行，似乎它只对数学家们有用。然而在近几十年里，许多学者指出分数阶微积分非常适合于刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程，在经典模型中这些性质常常是被忽略的。如今，分数阶微分方程越来越多地被用来描述光学和热学系统、流变学及材料和力学系统、信号处理和系统辨识、控制和机器人及其他应用领域中的问题。

该论文共有五章，主体可分为三部分：其中，第一部分由第二和第三章组成，是对分数阶常微分方程做理论分析；第四章为论文的第二部分，研究对一般分数阶常微分方程及分数阶的 Fokker-Planck 方程（它是一种典型的分数阶偏微分方程）的数值计算；最后一章为分数阶微分方程的应用，即实现分数阶系统的广义同步与多卷波生成。

更具体地说，第一章简要地回顾分数阶微积分的几种定义并分析和比较它们的一些性质。

第二章通过应用 Laplace 变换的技术，由复分析的理论我们首次得到了多时滞线性分数阶常微分方程的特征方程，进而

给出了多时滞线性分数阶常微分方程的一般性的稳定性判据，并将这些结果应用于同步，同时分析了分数阶常微分方程解的可微性，最后给出了非线性分数阶常微分方程解的 Mittag-Leffler 表示，这部分内容是本文的重要内容。

第三章讨论了将多阶分数阶常微分方程转化为同阶分数阶常微分方程的可能性，并给出了多阶分数阶常微分方程的稳定性结果。

在第四章中，首先改进了数值求解分数阶常微分方程的预估校正法，然后从一个新的观点去理解分数阶微积分的短记忆原理，将预估校正法的思想与短记忆原理结合起来对分数阶常微分方程进行数值求解，并给出了详细的误差分析。同时利用 Riemann-Liouville 和 Caputo 导数的性质，将分数阶 Fokker-Planck 方程转化为抛物型分数阶偏微分方程，结合预估校正法和行方法的思想对时间分数阶 Fokker-Planck 方程和时间空间分数阶 Fokker-Planck 方程进行数值求解，这部分内容是本文的核心内容。

第五章是第四章的数值算法在工程上的进一步运用，我们数值模拟了分数阶微分系统的动力学行为，其中包括广义混沌同步及多卷波吸引子的生成。

关键词 分数阶微积分，分数阶微分方程，稳定性，可微性，预估校正法，短记忆原理

Abstract

Fractional operators have a long history, having been mentioned by Leibnitz in a letter to L'Hospital in 1695. Referring to the question of fractional differentiation, Leibnitz wrote, "It will lead to paradox, from which one day useful consequences will be drawn." Early mathematicians who contributed to fractional differential operators include Liouville, Riemann, and Holmgrem. For three centuries the theory of fractional derivatives developed mainly as a pure theoretical field of mathematics useful only for mathematicians. However, in the last few decades many authors pointed out that fractional calculus are very suitable for the description of memory and hereditary properties of various materials and processes, such effects are in fact neglected in classical models. Nowadays, fractional differential equations are increasingly used to model problems in acoustics and thermal systems, rheology and modelling of materials and mechanical systems, signal processing and systems identification, control and robotics, and other areas of application.

This thesis consists of five chapters, and the body can be divided into three parts, the first part (Chapters 2 - 3) focuses on theoretical analysis for fractional ordinary

differential equations (FODE) and the second part (Chapters 4) concentrates on numerical computation for FODE and fractional Fokker-Planck equations (it is a kind of typical fractional partial differential equations), the last chapter is of the applications of fractional differential equation, including the realization of generalized chaos synchronization and the generation of multi-scrolls by three methods.

More detailed, the first chapter briefly reviews the definitions of fractional calculus and further analyzes and compares some of their properties.

In Chapter 2, first attains the characteristic equation for multi-time-delayed linear FODE by using the technique of Laplace transform, then obtains the general stability criteria for multi-time-delayed linear FODE and applies the results to synchronization. Besides, some smoothness properties for the solutions of FODE are also got, and the Mittag-Leffler representation for the solutions of nonlinear FODE is presented.

Chapter 3 discusses the possibilities for transforming the multi-order FODE to FODE with the same order and provides the stability results for multi-order FODE.

In Chapter 4, the predictor-corrector approach for numerically solving FODE is improved, the short memory principle of fractional calculus is apprehended from a new point of view, and the idea of predictor-corrector is combined with the short memory principle for the numerical solution of FODE and the detailed error analysis is presented. Using the

properties of Riemann-Liouville derivative and Caputo derivative, firstly the fractional Fokker-Planck equation is converted to a parabolic fractional partial differential equation, then combining the predictor-corrector approach with the idea of method of lines, the numerical schemes for the time-fractional Fokker-Planck equation and time and space fractional Fokker-Planck equation are designed and verified, the Chapter is the central part of this thesis.

Chapter 5 numerically studies the dynamical behavior of fractional differential systems, including the realization of generalized chaos synchronization and the generation of multi-scrolls, and in fact this chapter is the further application in engineering for the numerical algorithm discussed in Chapter 4.

Key words Fractional Calculus, Fractional Differential Equations, Stability, Differentiability, Predictor-corrector Approach, Short Memory Principle

目　　录

第一章 前 言

本章在引言部分简要阐述分数阶微积分的历史及研究现状。然后在其余部分回顾分数阶微积分的几种定义并分析和比较它们的一些性质[55,72,79,82]。

1.1 引言

早在 1695 年，Leibniz 给 L'Hôspital 写了一封信，询问：整数阶导数的概念能否自然地推广到非整数阶导数。L'Hôspital 对这个问题感到很新奇，作为回信他反问了一个简单的问题："如果求导的次数为二分之一，那么将会是怎样的情况呢?"在这一年的 9 月 30 日，Leibniz 给 L'Hôspital 回信写道："这会导致悖论，不过总有一天会得到有用的结果。"这个特殊的日子——1695 年 9 月 30 日，因此被认为分数阶微积分的确切的诞生日。早期对分数阶微积分有贡献的数学家包括 Liouville、Riemann、Holmgrem。

在近三个世纪里，对分数阶微积分理论的研究主要在数学的纯理论领域里进行，似乎它只对数学家们有用。然而在近几十年里，许多学者指出分数阶微积分非常适合于刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程，在经典模型中这些性质常常是被忽略的。在研究黏弹性时，分数阶微分算子已经用来描述材料的本构方程。事实上，Abel 积分方程就是一个众所周知的包含分数阶积分算子的方程。如今，分数阶微分方程越来越多地被用来描述光学和热学系统、流变学及材料和力学系统、信号处理和系统识别、控制和机器人及其他应用领域中的问题。同时许多由分数阶微积分来建模的现实世界中的系统也展示出丰富的分数阶动力学行为，其中包括：黏弹性、彩色噪声、电磁

波、电解液的极化、分数阶分子动力学等等。

近些年来，一些关于分数阶微积分的奠基性工作的书籍相继出版，其中包括如下作者写的书：Gorenflo 和 Vessella[37]、Kiryakova[47]、McBride[67]、Miller 和 Ross[72]、Nishimoto[77]、Rubin[81]、Podlubny[79]，以及由 Samko、Kilbas 和 Marichev 撰写的百科全书式的专著[82]。尽管分数阶微积分与经典微积分有相同的历史，且已经有了相当的发展，但它远没有经典微积分的理论完善。随着分数阶微分方程在越来越多的学科领域里出现，无论对分数阶微分方程的理论还是计算方法的研究都显得尤为迫切。然而由于分数阶导数是拟微分算子，它的保记忆性（非局部性）在对现实问题进行了优美刻画的同时，也给理论分析和数值计算带来了相当的困难。本文旨在从这两个方向上做出努力。

1.2 分数阶微分算子的定义和性质

1.2.1 Gamma 函数和 Beta 函数

Gamma 函数是阶乘概念的推广，定义为：

$$\Gamma(z):=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt \ (\Re(z)>0),$$

它有如下两个性质：

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\ \forall n\in\mathbf{Z}^+;$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\ \forall z\in C.$$

Beta 函数是二项式系数倒数的推广，定义为：

$$B(z,\omega):=\int_0^1\tau^{z-1}(1-\tau)^{\omega-1}\,d\tau \ (\Re(z)>0,\Re(\omega)>0),$$

Beta 函数可用 Gamma 函数表示为：

$$B(z,\omega)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}.$$