普通高等院校“十二五”规划教材
全国高校教材学术著作出版审定委员会审定

LILUN WULI DAOLUN

# 理论物理导论

## （上册）

田成林　江遴汉　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校“十二五”规划教材

全国高校教材学术著作出版审定委员会审定

# 理论物理导论

## （上册）

田成林　江遴汉　编著

国防工业出版社

## 内容简介

本书系统阐述了理论物理学的基本概念、基本原理和基本方法。全书体系完整、结构新颖，叙述清楚、分析透彻，内容精炼、逻辑严密，物理图像清晰、物理概念准确。

全书分为上下两册，共20章。上册包括经典力学、经典电动力学、狭义相对论三部分内容。其中经典力学2章、经典电动力学4章、狭义相对论2章。下册包括量子力学、统计力学两部分内容。其中量子力学6章、统计力学6章。为方便教学，各章均附有一定数量的习题。

本书可作为高等院校理工科非物理专业本科生和研究生或物理专业本科生理论物理课程的教材或参考书，亦可供从事理论物理教学或研究的工作人员参阅。

本书适合两学期讲授。建议上、下册各讲授80学时。

**图书在版编目（CIP）数据**

理论物理导论：全2册/田成林，江遴汉编著.
—北京：国防工业出版社，2014.1
ISBN 978-7-118-09110-6

Ⅰ.①理… Ⅱ.①田… ②江… Ⅲ. ①理论物理学
Ⅳ.①O41

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第317576号

※

国防工業出版社 出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048）
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
新华书店经售

*

**开本** 787×1092 1/16 **印张** 18¼ **字数** 430千字
2014年1月第1版第1次印刷 **印数** 1—1000 册 **定价** 92.00元（上下册）

**（本书如有印装错误，我社负责调换）**

国防书店：（010）88540777 发行邮购：（010）88540776
发行传真：（010）88540755 发行业务：（010）88540717

# 前　言

理论物理是物理学的重要分支学科，是现代科学的重要组成部分。它的创立充盈着深刻的哲学思辨，引领人类真正看清了物质结构与物质运动的本来面目，催生出了 19 世纪的机器时代和 20 世纪的信息时代，革命性地改变了人们的生活方式与价值观。有理由相信，理论物理依旧是今后技术革命与技术创新最重要的思想源泉。正因如此，当今，理论物理受到人们越来越多的重视，成为诸如材料科学、信息科学、理论化学、生物学及光电技术、电子工程、自动控制等科学技术领域高层次研究人员不可或缺的知识基础。

本书是理工科非物理专业高年级本科生及研究生学习理论物理的一本教材，书中涉及理论物理学较全面的基础知识，如果本书能够引起读者对理论物理学的兴趣，抑或能够激发出读者对奇妙物质世界探求的冲动，我们将感到无比欣慰。

考虑到读者的知识结构和学时限制，本书在素材的选择、组织和处理等方面，既注重合理把握内容的知识水准，充分体现导论的基础性定位，又顾及它的易读性，在不失理论物理“味道”的前提下，尽量避免冗长的数学推演和晦涩难懂的文字表述。基于以上考虑，本书具有下述三个特点：

一是内容丰富，体系完整。书中涵盖了物理专业本科生水平的经典力学、经典电动力学、狭义相对论、量子力学和统计力学的所有基本内容，每部分内容各自独立且在结构上又相互联系。通过对本书的研读，能使读者较全面地掌握理论物理学的基本知识，为进一步深造打下坚实基础。

二是逻辑严密，结构紧凑。本书在不破坏理论框架的严谨性和完整性前提下，对内容做了合理压缩，舍弃了不必要的重复和繁枝缛节，以阐述基本原理为统领，以建立物理思想为主线，以解决典型问题为突破点，以形成物理图像、掌握处理问题方法为目的，循序渐进、逐步展开，构建起重点突出、线条清晰、逻辑严密、结构严谨的内容体系。

三是深入浅出，通俗易懂。理论物理概念抽象，推演技术难度大，常给初学者带来理解和应用方面的极大困难。本书力求叙述上形象生动、通俗易懂，推演中简洁明了、线条清晰，尽量避免物理本质淹没于繁复的数学推导之中的现象。即使那些多数读者并不熟悉，但理论表述无法回避的数学，本书在处理这类内容时，本着数学是物理学的工具的态度，将注意力集中于数学知识的使用上，重点则放在物理规律的阐述上。如偏微分方程解的唯一性定理，严格的数学证明较为繁琐，但从物理上看，在一定边界条件下，任何物理场的空间分布必然是唯一的。这样，在学习物理内容的同时，就能使读者自然掌握并应用这些数学知识，而不至于带来额外的负担。因此，那些听起来令人却步的数学，不会成为研读本书的障碍。

本书分上下两册。上册包括经典力学、经典电动力学和狭义相对论三部分内容。考虑到牛顿力学在理工科学生的公共物理课程中已经做过介绍，本书的经典力学部分只介绍拉格朗日力学和哈密顿力学。这部分内容是进一步学习后续内容的基础。在经典电动

力学部分，为求避免重复，把运动电荷的辐射问题放在狭义相对论部分统一介绍。下册包括量子力学和统计力学两部分内容。量子力学部分系统介绍了量子力学的基本原理、重要推论及典型应用，由于篇幅所限，舍去了散射问题。统计力学部分包含可逆过程热力学理论和统计力学两部分内容，其中，在热力学中，介绍了热力学第一、第二和第三定律，导出了热力学基本微分方程和一些常用的重要关系，关于不可逆过程热力学及相变问题未做介绍。在统计力学中，详细介绍了平衡态统计的基本原理和三大分布，以及它们的典型应用。此外，对涨落问题和非平衡态问题做了扼要介绍。本书充分反映了理论物理学的特点与精髓，编排上浸淫了作者数十年的教学经验与体会。全书内容按 160 学时设定，上、下册各 80 讲授学时。

本书是以我们多年来为国防科学技术大学指挥类应用物理专业本科生、其它非物理专业高年级本科生及研究生讲授“理论物理导论”和相关课程的讲义、教案为基础整理编撰而成。其中，经典力学和量子力学部分的讲义由田成林提供，经典电动力学和狭义相对论部分的讲义由李承祖提供，统计力学部分的讲义由田成林、程香爱提供。江遴汉整理编写了本书的上册，田成林编写了本书的下册，并对全书进行了审定。在此我们对李承祖教授和程香爱教授表示衷心感谢。刘永录老师对书稿进行了详细校对，提出许多宝贵意见；全国高校教材学术著作审定委员会二编室慕云主任为本书出版做了大量协调联络工作，作者对他们一并表示感谢。

囿于作者学识有限，错误和疏漏在所难免，敬请读者批评指正。

作者

2013 年 5 月

# 目 录

## 第一篇 分析力学

## 第二篇　经典电动力学

## 第三篇 狭义相对论

# 第一篇　分析力学

## 引　言

世界是物质的，物质是运动的，运动是有规律的。自然界最简单、最基本的物质运动形式是机械运动——物体的相对位置随时间的变化。研究机械运动规律的学科称为经典力学。其它更复杂、更高级的运动形态都包含有机械运动的形态。所以经典力学是其它工程学科的基础。

经典力学是一门古老的学科，其理论体系的形成过程是：在大量观察和实验事实的基础之上，引入一些合理的假设或原理，经过严格的数学推演，从而形成严格的理论体系。在经典力学理论中，物体的运动规律用严格的数学方程式表达。因此，定量规律和科学的预见性是这一理论的突出特点。或者说，经典力学是一门精确的、决定论的科学。

在经典力学的发展历程中，形成了两种理论表述形式。一种形式称为牛顿（Newton）力学，另一种形式称为分析力学。

牛顿力学的主要特征就是矢量性，侧重于用“力”和“加速度”表述问题。其最大优点是形象、直观，并且物理意义明确。其缺点是不便于处理复杂的力学问题。

随着18、19世纪世界工业革命的快速发展，在工程技术中遇到许多迫切需要解决的力学问题。应用牛顿力学求解这类问题时，不可避免地需要求解大量的、联立的微分方程组，而要精确地解出这些方程组的解析解，是异常困难的，几乎是不可能的。为了克服上述困难，拉格朗日和哈密顿等人应用分析数学的方法，建立起了分析力学。分析力学更侧重于用“能量”、“动能”、“势函数”表述问题，具有更广泛的意义。分析力学又分为两种等价的表述形式。一种形式称为拉格朗日力学，另一种形式称为哈密顿力学。分析力学的优点是：①弥补了牛顿力学的不足；②理论的数学表述更为抽象、概括和优美，特别适用于理论分析；③分析方法容易移植到其它分支学科（如统计力学和电动力学）。分析力学的缺点是：①由于其理论的高度抽象性，使得所推出的结论，在一定程度上，缺乏直观和明确的物理含义；②用分析力学的方法求解简单问题，有时稍嫌复杂。应该指出，就其物理内涵而言，牛顿力学、拉格朗日力学和哈密顿力学是完全等价的，其差别仅仅在于其数学表述的不同。考虑到本书的读者在此之前已经学习过大学物理或基础物理，对牛顿力学已经初步掌握，并且已经具备了数学分析等知识基础，所以，本书只介绍分析力学理论。

还应该强调的是，任何物理理论都有一定的局限性，都是在一定范围内和特定条件下的相对真理。经典力学也具有一定的局限性，也只在一定的领域内才成立。在物理学的术语中，用“作用量”和“速度”来区分运动领域，作用量＝动量×空间间隔。或者

作用量＝能量×时间间隔。作用量>>普朗克常数 $h$（$\approx 6.63\times10^{-34}$J•s）的领域称为宏观领域。作用量与 $h$ 相差不很大的领域称为微观领域。速度<<真空光速 $c$（$\approx 3.0\times10^{8}$m/s）的领域称为低速运动领域。速度与 $c$ 相接近的领域称为高速运动领域。经典力学只适用于宏观低速运动领域，也就是我们日常生活中能够感知的运动领域。微观领域用量子力学理论。高速运动领域用狭义相对论理论。这两部分内容将在本书的后半部分加以介绍。

此外，分析力学研究的系统是线性系统，即描述系统的微分方程是线性方程，方程中只含有各阶导数的一次幂。如果研究的系统是非线性系统，则需要用微分方程的定性理论进行分析，这是非线性力学的任务。

分析力学的任务是：（1）应用解析数学方法，熟练推演系统的运动规律；
（2）为学习后续课程打牢坚实的理论基础。

# 第1章　拉格朗日力学

力学中运动方程可以用不同形式表示，本章将讨论拉格朗日形式及其简单应用。

## 1.1　约束　广义坐标

### 一、关于约束与自由度的讨论

1. 自由度

自由度的定义是：**描述物体运动所需要的独立的空间坐标变量的数目。**

例如：描述单个质点的运动需要三个坐标，在直角坐标系中表示为$(x,y,z)$。当质点完全自由时，$x$、$y$、$z$彼此独立。此时，我们说该质点有三个自由度；如果系统是由$n$个完全自由的质点组成的自由系统，则描述该系统的**位形**需要$3n$个彼此独立的坐标：$(x_1,y_1,z_1)$，…，$(x_i,y_i,z_i)$、…，$(x_n,y_n,z_n)$。所以，由$n$个完全自由的质点组成的自由系统有$3n$个自由度；对于单个自由刚体，描述其质心位置需要三个坐标$(x_c,y_c,z_c)$，描述其转轴方向需要两个坐标$(\theta,\varphi)$，描述其绕轴自转需要一个坐标$\psi$，所以，单个自由刚体有六个自由度。

2. 约束

实际中所遇到的力学系统一般都不是自由系统，总是要受到各种各样的限制，这些限制又称为约束。

（1）**约束的定义：限制力学系统自由运动的条件称为约束**。受到约束的系统称为**约束系统**。今后如果无特别声明，所涉及的力学系统都是指约束系统。

（2）**约束方程**：约束的数学表达式称为约束方程。

例如：单个质点被限制在曲面上运动，其约束方程为

$$f(x,y,z)=0 \tag{1.1.1}$$

单个质点被限制在曲线上运动，其约束方程为

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

一般地，由$n$个质点组成的力学系统，如果有$k$个约束，其约束方程表示为

$$f_\beta(x_1,y_1,z_1;\cdots;x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1;\cdots;\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n;t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,k)$$

其中上面带点的符号表示该坐标对时间的全微商，也就是与该坐标相关联的分速度。如：$\dot{x}_1=\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t=v_{1x}$。将上述的$3n$个坐标重新用下标编排，上式改写为

$$f_\beta(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_{3n};t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,k) \tag{1.1.3}$$

为了简捷起见，通常又把上式缩写为

$$f_\beta(x;\dot{x};t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,k) \tag{1.1.4}$$

在实际问题中，约束是多种多样的。可以根据约束的性质，对其进行适当分类。

（3）**约束的分类。**

① **几何约束与运动约束。**

如果约束方程中只含有坐标变量，则这类约束称为几何约束，其约束方程表示为

$$f_\beta(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,k) \tag{1.1.5}$$

几何约束达到的效果不但限制了系统的几何位形，而且能够从约束方程组消去坐标变量，从而减少描述系统的坐标数目，使得剩余的坐标都是相互独立的。所以，几何约束又称为**完整约束**。

如果约束方程中不但含有坐标变量，而且含有坐标变量对时间的全微商，则这类约束称为运动约束，也称为**微分约束**，其约束方程表示为式（1.1.3）。如果此式中所有的全微商可以积分为坐标变量，则此式可化为几何约束，也就是完整约束。如果此式中的全微商不能解出为坐标变量的关系，则不能达到消元的目的，描述系统的实际坐标之间彼此不完全独立。所以，这类约束又称为**不完整约束**。在实际物理问题中，很少遇到不完整约束问题，故以后不再讨论。

② **稳定约束与不稳定约束。**

若约束方程中不显含时间$t$，则称这类约束为稳定约束；反之，称为不稳定约束。

③ **不可解约束与可解约束。**

如果力学系统在运动过程中始终不能脱离约束，则称这类约束为不可解约束，其约束方程通常写为等式。例如：单个质点限制在固定的曲面上运动，其约束为$f(x,y,z)=0$。

如果力学系统在运动过程中可以脱离约束，则称这类约束为可解约束，其约束方程通常写为不等式。例如：质点在运动过程中可能离开曲面，其约束可写为$f(x,y,z)\leqslant 0$或$f(x,y,z)\geqslant 0$。此时，不能通过约束关系式达到消元的目的，所以，**可解约束是不完整约束**。当然，其逆否命题也成立：**完整约束一定是不可解约束。**

我们再次以单个质点的运动为例，简单阐述一下约束的概念。质点固定于长度为$l$的刚性杆的一端，刚性杆绕另一端$o$点转动。若$o$点固定于坐标原点，则

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

此约束是稳定的不可解约束，当然也是完整约束。若$o$点沿$x$轴正向以速度$v_0$作匀速直线运动，则

$$(x-v_0t)^2+y^2+z^2-l^2=0$$

此约束是不稳定不可解完整约束。若将上式中的刚性杆改为不可伸长的柔软轻绳，则

$$(x-v_0t)^2+y^2+z^2-l^2\leqslant 0$$

此约束是不稳定的可解约束，当然也是不完整约束。

3. 自由度与约束的关系

由于约束限制了坐标的独立性，一个约束方程减少一个独立性，所以自由度与约束的关系是：

**自由度＝自由系统的坐标数－约束方程的个数**

对于由$n$个质点组成的系统，如果有$k$个约束方程，则系统的自由度$s=3n-k$。

对于单个刚体，如果有$k$个约束方程，则刚体的自由度$s=6-k$。例如：定点转动刚体的自由度＝6–3＝3；平动刚体的自由度＝6–3＝3；定轴转动刚体的自由度＝6–3–2＝1；平面平行运动刚体的自由度＝6–2–1＝3；等等。

对于受到完整约束的系统（称为**完整系**），实际所需坐标数＝系统的自由度。

对于受到不完整约束的系统（称为**非完整系**），实际所需坐标数>系统的自由度。

**二、广义坐标**

为了描述系统的位形，可以选择质点或物体的具体坐标。但是，为了使问题的表述更简捷，也可以更一般地选择其它变量。为此，我们定义广义坐标为：**完全描述系统位形所必需的数目最少的变量**。

对于**完整系**，广义坐标数＝独立变量数＝系统的自由度。

对于**非完整系**，广义坐标数>独立变量数＝系统的自由度。

例如：对于由 $n$ 个质点组成的系统，如果有 $k$ 个完整约束方程，有 $r$ 个不完整约束方程，则系统的广义坐标数＝ $3n-k=3n-(k+r)+r=s+r>s$ 。若 $r=0$ ，则上述系统是完整系，此时，广义坐标数＝自由度 $s$ 。选择 $s$ 个广义坐标为 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$ ，把质点坐标表示为广义坐标的函数

$$x_i=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_s;t)\quad(i=1,2,\cdots,3n) \tag{1.1.6}$$

上式又称为坐标变换方程。

关于广义坐标，还要强调以下几点。

（1）一般来说，广义坐标是描述整个系统的一组抽象数，不是具体质点的坐标。它们一般与所有质点的坐标都有关，这一点可以从坐标变换方程式（1.1.6）看出。

（2）广义坐标不一定具有长度量纲，而是具有广泛意义的独立变量。它可以是角度、面积或体积，也可以是动量、角动量或能量等。

（3）广义坐标一般不构成矢量，所以无需构建坐标架，但有时要规定其“正负”。

（4）用广义坐标建立的运动方程有优点也有缺点。其优点有二：第一是解决了约束系统变量不独立的问题；第二是方程个数<牛顿力学的联立方程数。其缺点是有时所得结论不很直观，物理意义不很明确。

如上所述，广义坐标的引入，解决了受约束系统坐标不独立的问题。原则上说，约束方程越多，系统自由度越少，广义坐标个数越少，问题就越容易求解。但是，从约束方程出发，利用消元法消去不独立的变量，常常并非易事。另外，约束越多，约束力就越多，而约束力是被动的未知力，因此，如果用牛顿力学列方程，得到的牛顿方程并不简单。为了解决以上问题，拉格朗日给出了虚位移、虚功和理想约束的概念，使得力学方程中不出现约束力，从而大大地简化了动力学问题的求解。在解决动力学问题之前，先要解决静力学问题，这就要用到下一节的虚功原理。

## 1.2　虚功原理

在介绍理想约束和虚功原理之前，先要介绍虚位移和虚功的概念。

**一、虚位移**

如图 1.2.1 所示，设质点约束在曲面 $S$ 上运动， $t$ 时刻位于曲面上某一点，该时刻运

动趋势是：在切平面内沿任意方向运动都是可能的。由此，给出虚位移的定义。

1. 虚位移的定义

在一定的约束条件下，**质点在 $t$ 时刻瞬时设想将要发生的位移，记为 $\delta\boldsymbol{r}$** 。

为了理解虚位移的概念，我们也给出在牛顿力学中学习过的**实位移的定义**：

在一定的约束条件下，**质点在 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间内真实发生的位移，记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$** 。

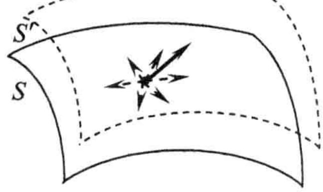

图 1.2.1 虚位移示意图

2. 虚位移与实位移的区别

（1） $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的发生，除了受到约束条件的限制外，还要受到其它真实存在的物理条件（如所受的力和初始条件）的制约，所以是真实发生的位置矢量的无限小变化。定义 $\delta\boldsymbol{r}$ 时，只考虑约束条件的限制，不考虑其它物理条件，所以是假想的位置矢量的无限小变化。

（2） $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 总是在一定的 $\mathrm{d}t$ 内发生的，若 $\mathrm{d}t=0$ ，必有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$ 。而 $\delta\boldsymbol{r}$ 是 $t$ 时刻瞬时设想将可能发生的，总有对应的 $\delta t=0$ 。

（3） $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 只有一个，而 $\delta\boldsymbol{r}$ 有无限多个。对于稳定约束， $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是无限多个 $\delta\boldsymbol{r}$ 中的一个。例如：固定曲面 $S$ 的约束。对于不稳定约束， $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 完全不同。例如：约束曲面也在运动，$t$ 时刻的位置为 $S$ ， $t+\mathrm{d}t$ 时刻的位置为 $S'$ 。$t$ 时刻的 $\delta\boldsymbol{r}$ 位于 $S$ 的切平面内。而在 $t\sim t+\mathrm{d}t$ 时间内的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的起点位于 $S$ 上，末端位于 $S'$ 上。

## 二、虚功

若系统内的质点发生实位移，作用在质点上的力就要在实位移上做功，这是真实功。同样，若设想系统内的质点作虚位移，则也可以设想作用在质点上的力在虚位移上做功。当然，这些力并不一定真的做功，故称为虚功。虚功的元功记为 $\delta W$ 。

作用在系统上的力分为两大类，一类称为**主动力**（记为 $\boldsymbol{F}$ ），另一类称为**约束力**(记为 $\boldsymbol{R}$)。主动力是指：由外界作用在系统上的外力，它是主动的，是系统状态变化的源泉，通常它也是已知的（对于正问题：已知外力求位形）。约束力是指：在约束处，由约束体施加于被约束系统的反抗脱离约束的力，所以有时又称为**约束反力**。约束力是被动的，随着主动力和运动状态的变化而变化。在求解出运动状态之前，约束力是未知的。作用在第 $i$ 个质点上的合力等于主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{R}_i$ 的矢量和。设该质点的虚位移为 $\delta\boldsymbol{r}_i$ ，则作用在第 $i$ 个质点上的合力所做的虚功为

$$\delta W_i=\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

作用在系统上的所有力所做的虚功为

$$\delta W=\sum_{i=1}^{n}\delta W_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \tag{1.2.1}$$

若存在一种约束系统，使得上式中第二项求和式为零，则力学方程中将不出现约束力。

## 三、理想约束

1. 理想约束的定义

若作用在系统上的约束力的虚功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{3n}R_i\cdot\delta x_i=0 \tag{1.2.2}$$

则称此系统为理想约束系统。

2. 理想约束的三种情形

（1）约束力不为零，虚位移也不为零，但是约束力与虚位移方向正交，即

$$\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.2.3}$$

例如：光滑曲面约束、光滑曲线约束、光滑铰链约束、……

（2）约束力不为零，虚位移也不为零，但是一对作用力与反作用力的虚功之和为零，即

$$\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+(-\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.2.4}$$

例如：长度不变的绳子和杆的约束。

（3）约束力不为零，但是虚位移为零，即

$$\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.2.5}$$

例如：定点约束、固定面上的纯滚动。

若系统在运动中存在摩擦，则一般不满足理想约束条件。但是，如果可以将摩擦力的表达式用其它途径表示出来（如物体在流体介质中作低速运动，物体所受摩擦力与速度正比反向，即 $\boldsymbol{f}=-\alpha\boldsymbol{v}$），此时可将摩擦力作为主动力处理，则理想约束条件仍然成立。

从理想约束的定义可以看出，引入虚位移和虚功的意义就是消除了系统力学方程中的约束力。下面从虚功的角度讨论系统的静力学平衡问题。

## 四、虚功原理

设第 $i$ 个质点平衡，其牛顿力学的平衡方程为

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.6}$$

从而

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

若系统内每个质点都平衡，则系统也平衡，必有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

若系统受到理想约束，由条件式（1.2.2）可得，此时主动力虚功之和为零。这就是虚功原理。

1. 虚功原理的表述

**理想约束系统处于平衡态的充要条件是作用于系统的主动力的虚功之和等于零，即**

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{3n}F_i\cdot\delta x_i=0 \tag{1.2.7}$$

注意，上面的表述中所说的“充要条件”的另一种表述为：**虚功原理与牛顿力学的平衡方程是等价的**。即：由牛顿力学的平衡方程式（1.2.6）可导出虚功原理的式（1.2.7）（上面已给出）；反过来，由式（1.2.7）也可导出式（1.2.6），但是要证明这一点并不容易。表面看起来，把理想约束条件式（1.2.2）和虚功原理的式（1.2.7）直接相加可得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^{3n}(F_i+R_i)\cdot\delta x_i=0 \tag{1.2.8}$$

但是，不能由此直接写出牛顿力学的平衡方程式（1.2.6），因为尚未计及约束关系。从数学上看，式（1.2.8）中的诸 $\delta x_i$ 并不独立，不能直接写出每个 $\delta x_i$ 前面的系数都为零，还必须考虑约束方程，给出 $\boldsymbol{R}_i$ 与约束方程的关系；从物理上看，正是由于主动力和约束体的共同作用，才决定了受约束系统平衡时的位形和约束力。下面就从主动力和约束方程出发，应用拉格朗日不定乘子法，解决上述问题。

2. 拉格朗日不定乘子法

设系统受理想的完整约束（在静力学中，不完整约束非常少见），约束方程为

$$f_\beta(x_1,x_2,\cdots,x_{3n};t)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,k) \tag{1.2.9}$$

对约束方程式（1.2.9）两边取全微分

$$\delta f_\beta=\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\delta x_i=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,k)$$

取 $k$ 个常数 $\lambda_\beta(\beta=1,2,\cdots,k)$，分别乘以上式中的 $k$ 个式子，对 $\beta$ 求和，两个求和后交换顺序，然后与式（1.2.7）相加，可得

$$\sum_{i=1}^{3n}(F_i+\sum_{\beta=1}^{k}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i})\delta x_i=0$$

其中 $\lambda_\beta$ 称为**拉格朗日不定乘子**，实际上是待定因子。**不定乘子法的要点就是：总可以选择一组适当的 $\lambda_\beta(\beta=1,2,\cdots,k)$，使得 $k$ 个不独立的 $\delta x_i$ 前面的系数为零。当然，剩余的 $3n-k$ 个独立的 $\delta x_i$ 前面的系数也为零。**从而

$$F_i+\sum_{\beta=1}^{k}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,3n) \tag{1.2.10}$$

令

$$R_i=\sum_{\beta=1}^{k}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\cdots,3n) \tag{1.2.11}$$

或

$$\boldsymbol{R}_i=\sum_{\beta=1}^{k}\lambda_\beta\nabla_i f_\beta \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.12}$$

可得

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

从物理上看，这就是牛顿力学的平衡方程，其中 $\boldsymbol{R}_i$ 就是第 $i$ 个质点所受的约束力。

由上可知，应用拉格朗日不定乘子法，不但证明了虚功原理与牛顿力学的平衡方程的等价性，而且给出了同时求出系统平衡位形和约束力的方法。即：由式（1.2.10）的 $3n$ 个方程和 $k$ 个约束方程，解出系统平衡时质点的 $3n$ 个坐标 $x_i(i=1,2,\cdots,3n)$ 和 $k$ 个拉格朗日不定乘子 $\lambda_\beta(\beta=1,2,\cdots,k)$，再由式（1.2.11）或式（1.2.12）解出约束力。

解决虚功原理中坐标不独立问题的另一种方法是广义坐标法。

3. 虚功原理的广义坐标表述

对于自由度为 $s$ 的理想完整系，选择 $s$ 个广义坐标 $q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$，把质点坐标表示为广义坐标的函数

$$x_i=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_s;t) \quad (i=1,2,\cdots,3n)$$

把虚位移表示为全微分的形式