普通高级中学实验教科书（信息技术整合本）

数学

第二册（下A）

人民教育出版社中学数学室 编著

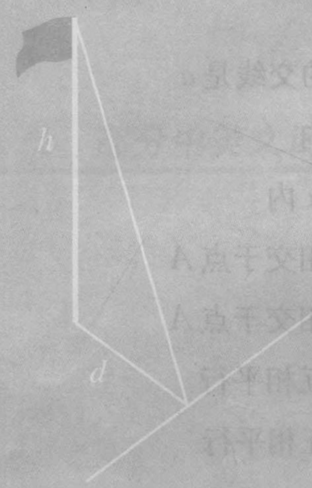
SHUXUE

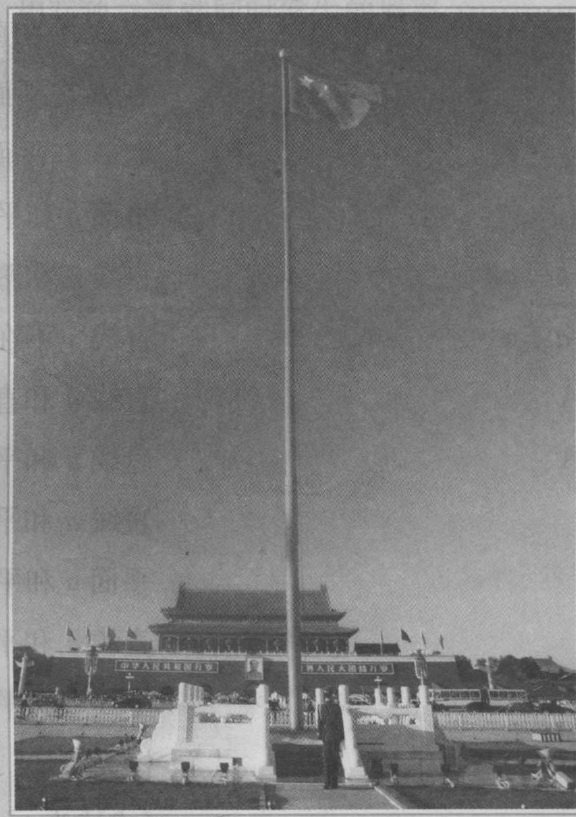
人民教育出版社

本书部分常用符号

$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α 和平面 β 的交线是 a
$a \subset \alpha$ 或 $a \subsetneqq \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \not\subset \alpha$ 或 $a \nsubseteq \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a 和直线 b 相交于点 A
$a \cap \alpha = A$	直线 a 和平面 α 相交于点 A
$a // \alpha$	直线 a 和平面 α 互相平行
$\alpha // \beta$	平面 α 和平面 β 互相平行
$a \perp \alpha$	直线 a 和平面 α 互相垂直
$\alpha \perp \beta$	平面 α 和平面 β 互相垂直
α-AB-β（或 α-a-β）	棱为 AB，面为 α、β 的二面角 （或棱为 a，面为 α、β 的二面角）
A_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数
$n!$	正整数 1 到 n 的连乘积
C_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数
$P(A)$	事件 A 的概率
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件
$A \cdot B$	事件 A，B 同时发生

第9章　直线、平面、简单几何体





人们在研究物体的形状、大小和位置关系时，认识了各种各样的几何图形，例如线段、三角形、圆、长方体、球等. 在初中几何里，我们已经研究过一些几何图形，并且认识到几何图形都可以看作点的集合.

空间中的一些点组成线和面，这些点、线、面构成空间的几何图形，可以说空间图形是空间中一些点的集合. 组成空间图形的点可以都在同一个平面内，也可以不都在同一个平面内. 像线段、三角形、圆等图形那样，各点都在同一个平面内的图形是平面图形. 像长方体、球等图形那样，各点不都在同一个平面内的图形是立体图形. 初中几何主要研究平面图形，也涉及一些简单的立体图形. 平面图形和立体图形都是空间图形.

土木建筑、机械设计、航行测绘等大量的实际问题，都要涉及对立体图形的研究. 例如，左页中的旗杆垂直立在地面上，旗杆与地平面内的直线存在什么样的位置关系？竖立旗杆时应该怎样才能保证它垂直立于地平面上？如果旗杆的高度为 h，旗杆底端与地平面内某条直线 l 间的距离为 d，那么旗杆顶端到 l 的距离是多少？要解决这类问题，就要用到有关立体图形的知识.

研究立体图形，一方面要注意立体图形问题与平面图形问题的区别，考虑问题时要着眼于整个空间，而不能局限于一个平面；另一方面要注意立体图形与平面图形的联系，立体图形中有些点在同一个平面内，对平面图形的研究是讨论立体图形的基础，立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决.

学习关于立体图形的知识，需要空间想象力，即对于几何图形的形状、大小、位置关系及其运动变化的认识与处理的能力.

本章将在初中几何知识的基础上，进一步研究有关立体图形的基础知识，研究对象主要包括最基本的立体图形——空间的直线、平面和简单几何体，研究内容主要是这些对象的几何性质、位置关系的判定、画法、度量计算以及相关的应用等.

1 空间直线和平面

9.1 平面

1. 平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面等，都给我们以平面的形象. 几何里所说的平面，就是从这样的一些物体中抽象出来的. 但是，几何里的平面是无限延展的.

直线也是无限延伸的. 通常我们画出直线的一部分来表示直线. 同样地，我们也可以画出平面的一部分来表示平面. 当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很像平行四边形. 因此，通常画平行四边形来表示平面（图 9-1(1)). 当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成邻边的 2 倍长. 当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 9-1(2)、(3)). 这样，看起来立体感强一些.

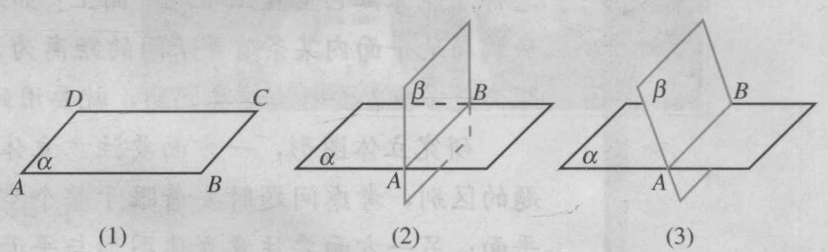


图 9-1

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 9-1 (1)).

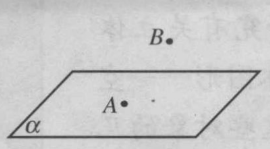


图 9-2

平面内有无数个点，平面可以认为是由它内部的所有的点组成的点集，其中每个点都是它的元素. 点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 不在平面 α 内（也称点 B 在平面 α 外)，记作 $B\notin\alpha$（图 9-2).

2. 平面的基本性质

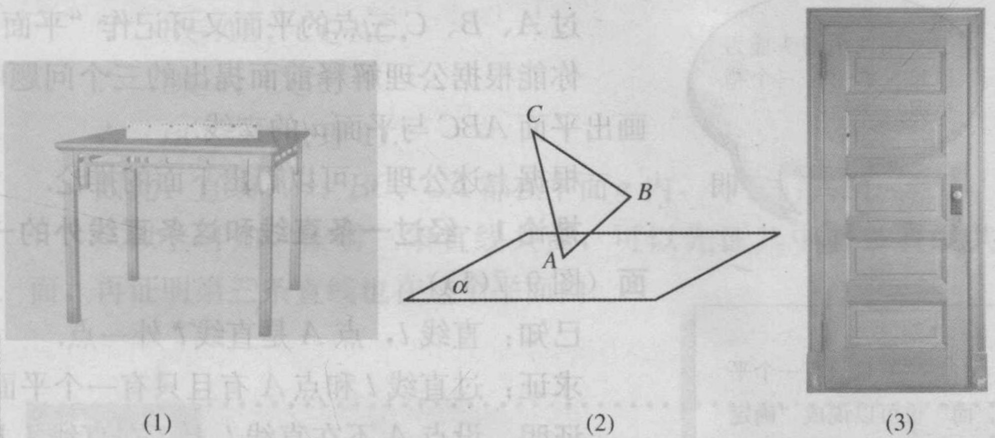
先研究下列问题：

(1) 如图 9-3(1)，怎样用一把直尺检查桌面是否平整？

(2) 如图 9-3(2)，$\triangle ABC$ 的一个顶点 A 在平面 α 内，平面

ABC 与平面 α 的公共点会只有一个点 A 吗？

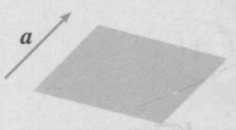
（3）如图 9-3(3)，怎样固定教室的门或窗？



(1)　(2)　(3)

图 9-3

平面也可以看作是由直线运动形成的. 如图，用图形计算器或计算机画一条直线 l，使 l 沿向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，追踪它，可以形成平面的一部分.



在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质. 我们把它们当作公理，也作为进一步推理的基础.

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

直线也是由无数个点组成的集合. 点 P 在直线 l 上，记作 $P\in l$；点 P 不在直线 l 上（也称点 P 在直线 l 外），记作 $P\notin l$.

平面也是由无数条直线组成的集合. 如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说**直线 l 在平面 α 内**，或者说**平面 α 经过直线 l**，记作 $l\subset\alpha$. 直线 l 上的点不都在平面 α 内（也称**直线 l 在平面 α 外**），记作 $l\not\subset\alpha$.

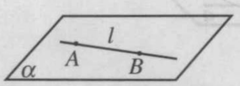


图 9-4

公理 1 的含义如图 9-4 所示，也可以用符号表示为

$$A\in l,\ B\in l,\ A\in\alpha,\ B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha.$$

公理 2　如果两个平面❶有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

❶ 在本章中，没有特殊说明的“两个平面”，均指不重合的两个平面.

如果平面 α 和 β 有一条公共直线 l，就说平面 α 和 β 相交，交线是 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

公理 2 的含义如图 9-5 所示，也可以用符号表示为

$$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l \text{ 且 } P\in l.$$

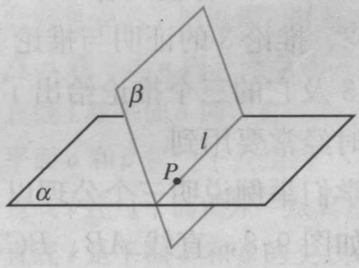


图 9-5

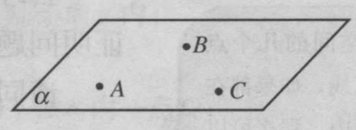


图 9-6

用两个指头能否顶起一本书？三个指头呢？

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 9-6）.

过 A、B、C 三点的平面又可记作“平面 ABC”.

你能根据公理解释前面提出的三个问题吗？在图 9-3（2）中，画出平面 ABC 与平面 α 的交线.

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图 9-7(1)）.

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”.

已知：直线 l，点 A 是直线 l 外一点.

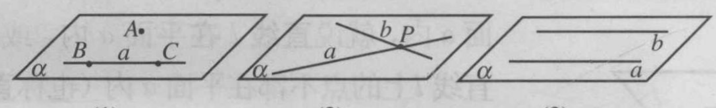
求证：过直线 l 和点 A 有且只有一个平面.

证明：设点 A 不在直线 l 上，在直线 l 上任取两点 B 和 C，于是有 $A\notin l$，$B\in l$，$C\in l$，即 A、B、C 为不共线的三点．根据公理 3，经过 A、B、C 三点有一个平面 α．因为 $B\in l$，$C\in l$，所以由公理 1 可知 $l\subset\alpha$，即平面 α 是经过直线 l 和点 A 的平面.

又根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 的平面只有一个，所以经过直线 l 和点 A 的平面只有一个.

推论 1 可以用符号表示为

$$A\notin l \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha\text{，使 } A\in\alpha\text{，} l\subset\alpha.$$



(1)　(2)　(3)

图 9-7

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 9-7(2)）.

我们规定：直线 a 和直线 b 相交于点 P，记作 $a\cap b=P$.

推论 2 可以用符号表示为

$$a\cap b=P \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha\text{，使 } a\subset\alpha\text{，} b\subset\alpha.$$

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 9-7(3)）.

推论 3 可以用符号表示为

$$a/\!/b \Rightarrow \text{有且只有一个平面 } \alpha\text{，使 } a\subset\alpha\text{，} b\subset\alpha.$$

推论 2、推论 3 的证明与推论 1 的证明类似.

公理 3 及它的三个推论给出了确定一个平面的一些条件，以后证明问题时经常要用到.

请同学们举例说明三个公理以及三个推论的应用.

例　如图 9-8，直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C，判定这三条直线是否共面[1]，并说明理由.

解：这三条直线共面．理由如下：

[1] 空间的几个点和几条直线，如果都在一个平面内，那么可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”.

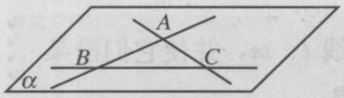


图 9-8

∵ 直线 AB 和 AC 相交于点 A，

∴ 直线 AB 和 AC 确定一个平面 α（推论 2）.

∵ $B\in AB$，$C\in AC$，

∴ $B\in\alpha$，$C\in\alpha$.

∴ $BC\subset\alpha$（公理 1）.

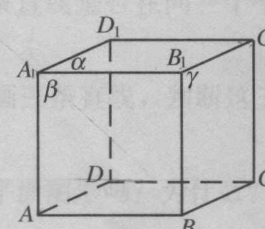
因此，直线 AB、BC、CA 都在平面 α 内，即它们共面.

从以上可知，证明三条直线共面，可以先证其中两条直线共面，再证明第三条直线也在这个平面内.

练 习

1. 填空：

正方体的各顶点如图所示，正方体的三个面所在平面 A_1C_1、A_1B、BC_1 分别记作 α、β、γ.



（第 1 题）

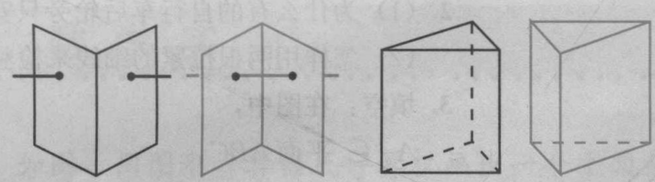
(1) $A_1\in\alpha$，B_1 _∈_ α，C_1 __ α，D_1 _∈_ α；

(2) $A\in\beta$，B __ β，A_1 __ β，B_1 __ β；

(3) $A\notin\alpha$，B _∉_ α，A _∉_ γ，B _∈_ γ；

(4) $\alpha\cap\beta=A_1B_1$，$\beta\cap\gamma=$____，$\alpha\cap\gamma=$____.

2. 观察 (1)、(2) 中甲、乙两个图形，用模型说明它们的位置有什么不同，并用字母来表示各个平面.



甲　乙　甲　乙

(1)　(2)

（第 2 题）

3. 用生活中的实例说明本节的公理及推论.

4. 用集合符号表示下列语句，并画出图形：

(1) 点 A 在平面 α 内，点 B 不在平面 α 内；

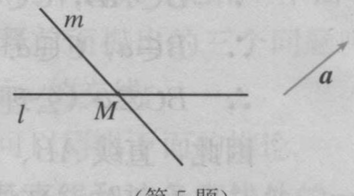
(2) 直线 l 在平面 α 内，直线 m 不在平面 α 内；

(3) 平面 α 和 β 相交于直线 l；

(4) 直线 l 经过平面 α 外一点 P 和平面 α 内一点 Q；

(5) 直线 l 是平面 α 和 β 的交线，直线 m 在平面 α 内，l 和 m 相交于点 P.

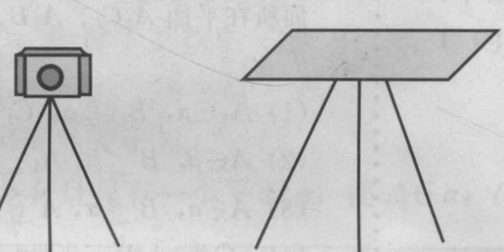
5. 如图，用图形计算器或计算机画两条相交直线 l、m，并使它们沿某一个向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，追踪它们，观察发生的现象.



（第 5 题）

习 题 9.1

1. 为什么照相机支架、平板仪（如图）都只用三条腿就够了？

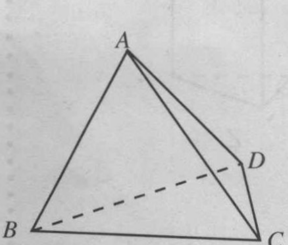


（第 1 题）

2. (1) 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？

(2) 怎样用两根拉紧的细线来检验桌子的四条腿的底端是否共面？

3. 填空：在图中，



（第 3 题）

A __∈__ 平面 ABC，

A __∉__ 平面 BCD，

BD __∈__ 平面 ABD，

BD __∉__ 平面 ABC，

平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=$ __AC__，__平面ABC ∩ 平面BCD__ $=BC$.

4. 用符号表示下列语句，并画出图形：

(1) 点 P 在平面 α 内，但在平面 β 外；

(2) 直线 l 在平面 α 内，但不在平面 β 内；

(3) 直线 l 和 m 相交于点 P；

(4) 平面 α 和 β 的交线是 l，点 P 在 l 上；

(5) 直线 l 经过平面 α 内一定点 P，但 l 在 α 外.

5. 选择题：

(1) 经过同一直线上的 3 个点的平面（ C ）.

(A) 有且只有 1 个.　　　　(B) 有且只有 3 个.

(C) 有无数个.　　　　　　(D) 只有 0 个.

(2) 直线 a、b、c 两两平行，但不共面，经过其中 2 条直线的平面共有 (B)

(A) 1 个.　　(B) 3 个.　　(C) 0 个.　　(D) 6 个.

(3) 直线 a、b、c 交于一点，经过这 3 条直线的平面 (D)

(A) 有 0 个.　　　　　　(B) 有 1 个.

(C) 有无数个.　　　　　　(D) 可以有 0 个，也可以有 1 个.

(4) 过不共面的 4 个点中的 3 个点的平面共有 (C)

(A) 0 个.　　(B) 3 个.　　(C) 4 个.　　(D) 无数个.

6. 不共面的 4 个点中能否有 3 个点共线？为什么？

7. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

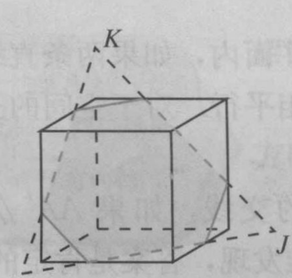
8. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

9. 一条直线与两条平行直线都相交，判断这三条直线是否在同一个平面内并说明理由.

10. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线，判断这三条直线是否在同一个平面内并说明理由.

11. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

数学实验



如图，用图形计算器或计算机画出一个平面截正方体所得到的截面，并指出截面的形状有哪几种？

（可以在 http://www.pep.com.cn/zhongxsx/index.htm 下载文件“正方体的截面.gsp”，然后演示、研究，看一看与你的结论是否一致.）

9.2 空间直线

❶ 在本章中，没有特殊说明的“两条直线”，均指不重合的两条直线.

1. 空间两条直线的位置关系

观察教室中墙面、天花板、地面之间的交线，由此你认为空间的两条直线❶有哪几种位置关系？再举些例子说明你的结论.

通过观察，不难发现，空间的两条直线有以下三种位置关系：

(1) **相交直线**——有且仅有一个公共点；

(2) **平行直线**——在同一个平面内，没有公共点；

(3) **异面直线**——不同在任何一个平面内，没有公共点.

例如，在图 9-9 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB 与 BC 是相交直线，直线 AB 与 A_1B_1 是平行直线，直线 AB 与 CC_1 是异面直线.

你能指出正方体12条棱所在的直线中有多少对异面直线吗？

两条直线相交或平行时，确定一个平面. 但是，三条直线交于一点或两两互相平行时，它们不一定共面. 请你在图 9-9 的正方体中找出一些这样的例子.

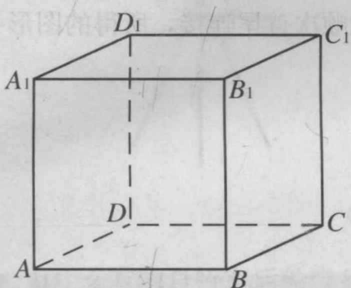


图 9-9

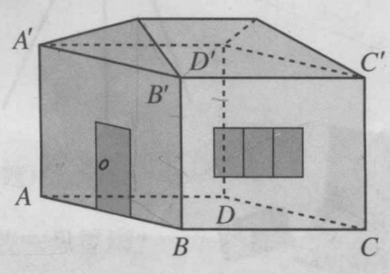


图 9-10

2. 平行直线

在初中几何里已经知道，在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行. 对于空间的三条直线，是否也有这样的规律呢？

利用你身边的物体，说出一些你认为平行但是不在同一个平面内的三条直线.

例如，如图 9-10，房间里墙与墙的交线，如果 $AA' /\!/ BB'$，$CC' /\!/ BB'$，那么是否有 $AA' /\!/ CC'$？不难发现，答案是肯定的.

我们把上述规律作为本章的第 4 个公理.

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

公理 4 也可以用符号表示如下：

设 a、b、c 为直线，

$$\left.\begin{matrix} a /\!/ b \\ c /\!/ b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a /\!/ c.$$

a、b、c 三条直线两两平行，可以记为 $a /\!/ b /\!/ c$.

❶ 四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.

用图形计算器或计算机画出（或在 http://www.pep.com.cn/zhongxsx/index.htm 下载名为“空间四边形.gsp”的文件）可以转动的立体图形，转动它并从各个角度进行观察.

例 1　已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形❶，E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是边 CB、CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，求证四边形 $EFGH$ 有一组对边平行但不相等.

证明：如图 9-11，连结 BD.

∵　EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

∴　$EH /\!/ BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$.

又在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

∴　$FG /\!/ BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$.

根据公理 4，$EH /\!/ FG$.

又 $EH=\frac{1}{2}BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$，即 $FG>EH$，

∴　四边形 $EFGH$ 的一组对边平行但不相等.

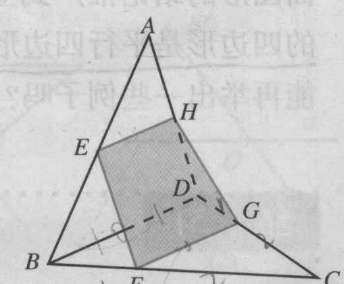


图 9-11

由公理 4，我们可以推出下面的结论.

定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

❶ 这里 $AB /\!/ A'B'$ 并且方向相同，即向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{A'B'}$ 方向相同.

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB /\!/ A'B'$，$AC /\!/ A'C'$，并且方向相同❶.

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

证明：对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 都在同一平面内的情况，用初中几何知识可证明. 下面我们证明两个角不在同一平面内的情况.

如图 9-12，在 AB、$A'B'$，AC、$A'C'$ 上分别取 $AD=A'D'$、$AE=A'E'$，连结 AA'、DD'、EE'、DE、$D'E'$.

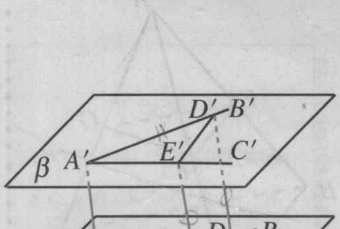


图 9-12

∵　$AB /\!/ A'B'$，$AD=A'D'$，

∴　四边形 $AA'D'D$ 是平行四边形.

∴　$AA' \underline{/\!/} DD'$.

同理　$AA' \underline{/\!/} EE'$.

根据公理 4，可得 $DD' /\!/ EE'$.

又可得 $DD' = EE'$.

∴ 四边形 $EE'D'D$ 是平行四边形.

∴ $ED = E'D'$. 于是$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

∴ $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

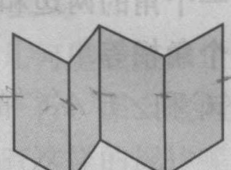
把上面两个角的两边反向延长，就得出下面的推论：

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

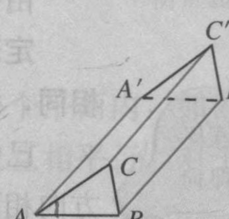
对于平面图形得出的结论，有些可以推广到立体图形. 例如，上面的定理和推论对于平面图形都成立，现在经证明可知对于立体图形也成立. 但是，并非所有关于平面图形成立的结论，对于立体图形仍然适用. 例如，在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行，但在空间里没有这样的结论（图 9-10 中，$AB \perp BB'$，$BC \perp BB'$，但是 AB 与 BC 不平行）. 因此，一般地说，要把关于平面图形的结论推广到立体图形，必须经过证明. 再如，“四边相等的四边形是平行四边形”这个结论对立体图形并不一定成立. 你还能再举出一些例子吗?

练　习

1. 如图，把一张长方形的纸对折几次，然后打开，说明为什么这些折痕互相平行.



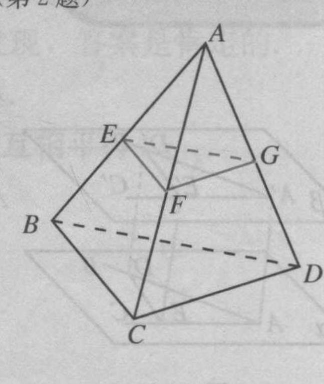
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，AA'、BB'、CC'不共面，且 $BB' \underline{/\!/} AA'$，$CC' \underline{/\!/} AA'$，求证$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

3. 如图，立体图形 A-BCD 的 4 个面分别是$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$，E、F、G 分别为线段 AB、AC、AD 上的点，$EF /\!/ BC$，$FG /\!/ CD$，$\triangle EFG$ 和$\triangle BCD$ 有什么关系？为什么？



（第 3 题）

经过这部分内容的学习，你会发现直线 AC 与直线 D_1B_1、D_1A_1、D_1C_1 之间的距离是相同的，而直线 AC 与直线 D_1B_1 成 $90°$角，直线 AC 与直线 D_1C_1、D_1A_1 都成 $45°$的角.

3. 异面直线

在图 9-13 所示的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AC 与直线 D_1B_1、D_1A_1、D_1C_1 之间的关系有什么相同点与不同点？

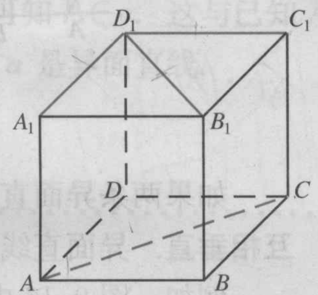
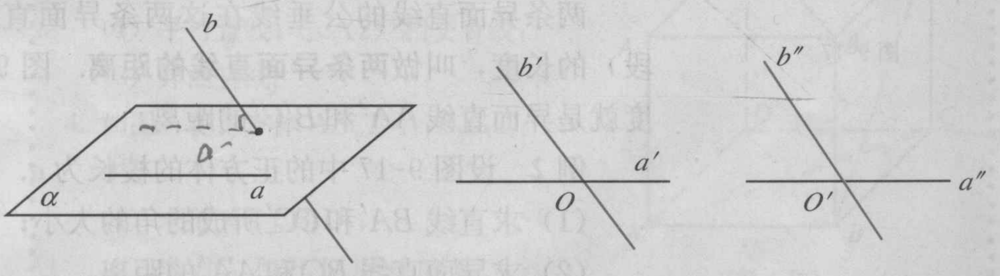


图 9-13

如图 9-14(1)，直线 a、b 是异面直线. 经过空间任一点 O，作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做**异面直线 a 和 b 所成的角**（或夹角）（图 9-14(2)）.



(1) (2) (3)

图 9-14

如果过空间点 O 以外的任意一点 O'，再作直线 $a'' \parallel a$，$b'' \parallel b$（图 9-14(3)），那么由公理 4 可知，$a' \parallel a''$，$b' \parallel b''$. 因此，直线 a'' 和 b'' 所成的锐角（或直角）与直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）相等. 这就是说，异面直线 a 和 b 所成的角，只由直线 a 和 b 的相互位置来确定，而与点 O 位置的选择无关.

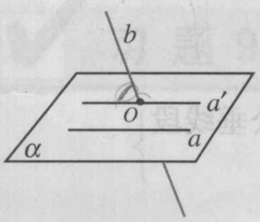


图 9-15

为了简便，点 O 可以在两条异面直线中的一条上选取. 例如，在图 9-15 中，点 O 取在 b 上，过点 O 作 $a' \parallel a$，a' 与 b 所成的角就是异面直线 a 和 b 所成的角.

通过画平行线的方式，使两条异面直线移到同一平面的位置上，是研究异面直线所成的角时使用的方法. 这种把立体图形的问题转化为平面图形问题的方法很重要.

可以在 http://www.pep.com.cn/zhongxsx/index.htm 下载"异面直线所成的角.gsp"的文件，研究两条异面直线所成角的问题.

观察图 9-16 中的六角螺母的棱 AB 和 CD 所在的直线，或机械部件蜗轮和蜗杆的轴线，可以看出，它们所成的角的大小分别是 $60°$和 $90°$.

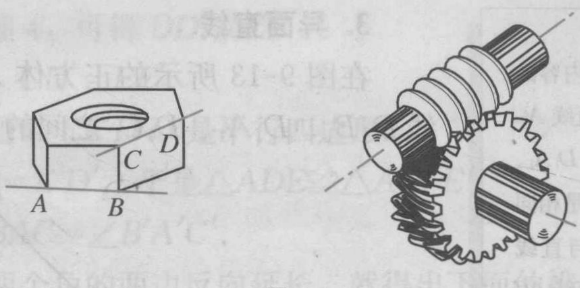


图 9-16

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这**两条异面直线互相垂直**. 异面直线 a 和 b 互相垂直，也记作 $a\perp b$.

例如，图 9-16 中，蜗轮和蜗杆的轴线是互相垂直的异面直线，蜗杆到蜗轮的传动方向改变了 90°的角.

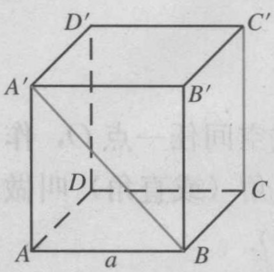


图 9-17

图 9-17 中，正方体的棱 AA' 和 $B'C'$ 所在的直线是两条异面直线，直线 $A'B'$ 和它们都垂直并且相交. 和两条异面直线都垂直相交的直线，叫做**两条异面直线的公垂线**.

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段（公垂线段）的长度，叫做**两条异面直线的距离**. 图 9-17 中线段 $A'B'$ 的长度就是异面直线 AA' 和 $B'C'$ 的距离.

例 2　设图 9-17 中的正方体的棱长为 a.

（1）求直线 BA' 和 CC' 所成的角的大小； 40

（2）求异面直线 BC 和 AA' 的距离. a

解：（1）$\because$　$CC'\parallel BB'$，

$\therefore$　BA' 和 BB' 所成的锐角就是 BA' 和 CC' 所成的角.

$\because$　$\angle A'BB'=45°$，

$\therefore$　BA' 和 CC' 所成的角是 45°.

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB\perp AA'\\ AB\cap AA'=A\\ AB\perp BC\\ AB\cap BC=B\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}AB\text{ 是 }BC\text{ 和 }AA'\text{ 的公垂线段}\\ AB=a\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow BC\text{ 和 }AA'\text{ 的距离是 }a.$$

对于任意两条异面直线，它们的公垂线有且仅有一条（证明略）.

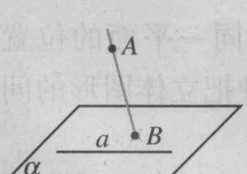


图 9-18

例 3　求证：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

已知：$a\subset\alpha$，$A\notin\alpha$，$B\in\alpha$，$B\notin a$（图 9-18）.

求证：直线 AB 和 a 是异面直线.

证明：用反证法.

假设直线 AB 和 a 共面，即有平面 β 使 $AB\subset\beta$，$a\subset\beta$，于是

$A\in\beta$，$B\in\beta$.

因为过直线 a 和点 B 有且仅有一个平面，即平面 α. 于是 α 与 β 是同一平面，即 $\alpha=\beta$.

由假设知 $a\subset\beta$，可知 $A\in\alpha$. 这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

因此，直线 AB 和 a 是异面直线.

练 习

1.（1）两条直线互相垂直，它们一定相交吗？

（2）垂直于同一直线的两条直线，有几种位置关系？

2. 举出互相垂直的异面直线和异面直线的公垂线的实际例子.

3. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线使它们成为：

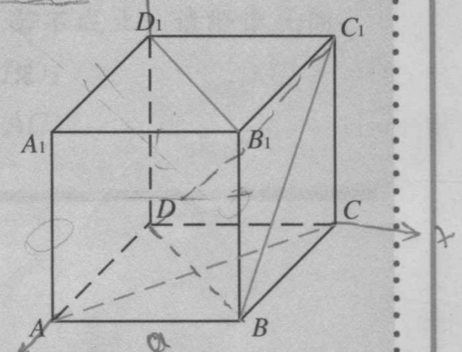
（1）平行直线；（2）相交直线；

（3）异面直线.

4. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中：

（1）求证 $AC\perp B_1D_1$；

（2）求 BC_1 和 B_1D_1 所成的角.



（第 4 题）

习 题 9.2

1. 选择题：

（1）如果两条直线 a 和 b 没有公共点，那么 a 与 b（ ）

（A）共面.　　（B）平行.

（C）是异面直线.　　（D）可能平行，也可能是异面直线.

（2）设 AA_1 是长方体的一条棱，这个长方体中与 AA_1 平行的棱共有（ ）

（A）1 条.　（B）2 条.　（C）3 条.　（D）4 条.

（3）设直线 a、b 分别是长方体的相邻两个面的对角线所在的直线，则 a 与 b（ ）

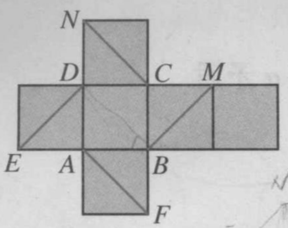
（A）平行.　　（B）相交.

（C）是异面直线.　　（D）可能相交，也可能是异面直线.

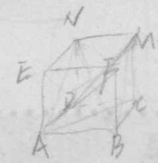
（4）如果 $OA/\!/O'A'$，$OB/\!/O'B'$，那以 $\angle AOB$ 和 $A'O'B'$（ C ）

(A) 相等.　　　　　　　　　　　(B) 互补.

(C) 可能相等，也可能互补.　　　(D) 大小无关.



(第 1(5) 题)



(5) 左图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中：

① BM 与 ED 平行；

② CN 与 BE 是异面直线；

③ CN 与 BM 成 $60°$ 角；

④ DM 与 BN 垂直.

以上四个命题中，正确命题的序号是(　　)

(A) ①、②、③.　　　　　　　(B) ②、④.

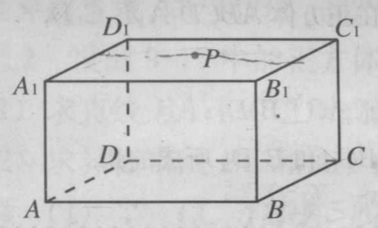
(C) ③、④.　　　　　　　　　(D) ②、③、④.

2. 判断题：

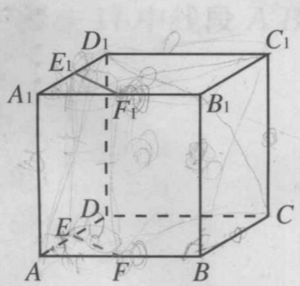
(1) a、b、c、d 是 4 条直线，$a/\!/b$，$b/\!/c$，$c/\!/d \Rightarrow a/\!/d$；　(√)

(2) 若 a、b 是直线，α、β 是平面，且 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 a、b 一定是异面直线.　(　　)

3. 如图，在长方体形木块的面 A_1C_1 上有一点 P，怎样过点 P 画一条直线和棱 CD 平行？



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，在正方体中，$AE=A_1E_1$，$AF=A_1F_1$，求证：$EF \underline{/\!/} E_1F_1$.

5. 已知 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点，求证四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

> ❶ 直线 a 和 b 不平行，可以记作 $a \not/\!/ b$；直线 a 和 b 没有公共点，可以记作 $a\cap b=\varnothing$.

6. 填空：

(1) 已知 a、b 是两条直线，且 $a \not/\!/ b$，$a\cap b=\varnothing$❶，那么 a 与 b ＿异面＿；

(2) 已知 a、b、c 是三条直线，且 $a/\!/b$，a 和 c 所成的角的大小为 θ，那么 b 和 c 所成的角的大小为＿＿＿＿；

(3) AA_1 是长方体的一条棱，这个长方体中与 AA_1 垂直的棱共有＿8＿条；

(4) 如果 a、b 是异面直线，直线 c 与 a、b 都相交，那么这三条直线中的两条所确定的平面共有＿＿＿＿个.

7. 已知直线 a 和 b 是异面直线，直线 $c/\!/a$，直线 b 与 c 不相交，求证直线 b、c 是异面直线.

8. 分别和两条异面直线 AB、CD 同时相交的两条直线 AC、BD 一定是异面直线吗？为什么？

9. 判断题：